

K.Bulota, P.Survila

Algebra

ir skaičių teorija

1

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K. Bulota, P. Survila

Algebra

ir skaičių teorija

1

Antrasis pataisytas ir papildytas leidimas

Lietuvos TSR Liaudies švietimo ministerijos
patvirtintas vadovėlis pedagoginių institutų
matematikos specialybei

**Scanned by
Cloud Dancing**



Vilnius „Mokslas“ 1989

Булота К. Ю., Сурвила П. В. Алгебра и теория чисел. Ч. 1: Учебник для студентов математических специальностей педагогических ин-тов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Вильнюс: Мокслас, 1989. — 412 с., ил.

В первой части учебника излагаются элементы математической логики, теории множеств и комбинаторики, числовые поля, элементы алгебраических структур, системы линейных уравнений, матрицы и определители, векторные пространства и линейные операторы, элементы линейного программирования.

Ил. 24. Библиогр. 24 назв.

Leidinį recenzavo doc. **A. Matuliauskas**

Pratarmė

Per praėjusius tryliką metų nuo vadovėlio pirmojo leidimo šiek tiek pasikeitė pedagoginių institutų matematikos specialybės algebros ir skaičių teorijos programa, buvo tobulinama lietuviškoji matematikos terminija. Į visa tai, taip pat į paaiškėjusius vadovėlio trūkumus buvo atsižvelgta ruošiant spaudai antrąjį jo leidimą. Pataisyti ar iš naujo parašyti kai kurie skyriai ir paragrafai, šiek tiek pakeista medžiagos dėstymo tvarka. Visai atsisakyta kvadratinų formų, kurios neįeina į algebros ir skaičių teorijos kurso programą. Bendrąją koncepciją, dėstymo stilių stengėmės išlaikyti.

Tikimės, kad šia knyga galės naudotis ir matematikos mokytojai. Kaip mokymo priemonė, ji tiks ir universiteto matematikos specialybės studentams.

Matematikos mokytojas privalo žinoti ne tik tą medžiagą, kurią jis tiesiogiai perteiks mokiniams. Pirmiausia jis turi suvokti, kas yra matematika kokią vietą užima matematikoje mokyklinis kursas. Pažintį su matematika reikia pradėti nuo visoms jos teorijoms bendrų sąvokų. Todėl pirmajame skyriuje pateikiami matematinės logikos ir aibių teorijos pradmenys: supažindinama su logikos dėsniais, įrodymo schemomis, sąryšiais, kombinatorikos elementais.

Antrasis skyrius skirtas algebrinėms struktūroms; pažintis su jomis pradama nuo algebrinių binarių operacijų ir jų savybių. Smulkiau negu pirmajame leidime apžvelgiama natūrinių skaičių sistema; matematinės indukcijos principas panaudojamas įrodinėjant natūrinių skaičių sudėties ir daugybos savybes. Trumpai supažindinama su pagrindinėmis algebrinėmis struktūromis: grupe, žiedu, lauku, jų paprasčiausiomis savybėmis, homomorfizmais ir izomorfizmais.

Trečiajame skyriuje nagrinėjami skaičių laukai. Aptariamas racionaliųjų skaičių laukas ir jo konstrukcija, gana detalai nagrinėjami kompleksiniai skaičiai: kompleksinių skaičių aibės konstrukcija, veiksmas, šaknies traukimas, 2–4-ojo laipsnio lygčių sprendimas.

Ketvirtajame skyriuje dėstomos tiesinių lygčių sistemos ir su jomis susijusi n -mačių vektorių su realiomis komponentėmis aibė.

Matricoms ir determinantams skiriamas gana didelis penktasis skyrius, nes matricos labai plačiai taikomos tiek grynojoje, tiek ir taikomojoje matematikoje.

Šeštajame skyriuje nagrinėjamos vektorinės erdvės, septintajame — tų erdvių tiesiniai operatoriai.

Aštuntajame skyriuje gvildenami su tiesinėmis nelygybėmis ir jų sistemos susiję klausimai, pateikiami prieš kelis dešimtmečius sukurto matematinės teorijos – tiesinio programavimo – pradmenys. Aiškinamas simplekso metodas.

Devintasis skyrius skiriamas grupių teorijos elementams.

Būsimajam matematikos mokytojui vidurinėje mokykloje teks aiškinti, tiksliai siauriau, tas pačias struktūras: racionaliųjų, realiųjų ir kai kurias kompleksinių skaičių laukų savybes, judesių grupės savybes, dvimačių ir trimačių vektorių su realiomis komponentėmis vektorines erdves ir kt. Todėl labai svarbu gerai suvokti šias sąvokas, įgusti jomis operuoti, skirti vieną nuo kitos. Iš pirmo žvilgsnio jos atrodo labai abstrakčios, nes matematika nenagrinėja atskirai kiekvienos konkrečios struktūros, o jas klasifikuoja pagal tam tikrus požymius ir tiria vieną abstraktų klasės atstovą (grupę, lauką, vektorinę erdvę ir kt.). Labai svarbu įsisąmoninti, kaip matematikoje iš jau turimų aibių konstruojamos naujos, naudojantis aibių Dekarto daugyba, ekvivalentumo sąryšiais ir kitais būdais. To nesupratus, negalima suvokti, iš kur ir kaip atsiranda sveikųjų skaičių aibė, jei iš pradžių žinoma tik natūrinių skaičių aibė, kaip atsiranda kompleksiniai skaičiai. O matematikos mokytojas privalo mokėti spręsti skaičių aibių (ir apskritai aibių) plėtimo uždavinius.

Vadovėlyje dėstoma medžiaga gana abstrakti, todėl pradžioje autoriai stengėsi plačiau paaiškinti ir paprastesnius faktus, kurie toliau laikomi aksiomais.

Supažindinus pirmajame skyriuje su teiginių veiksmais ir kvantoriais, toliau buvo galima formalizuoti apibrėžimų užrašymą, teoremų formuluotes ir įrodymus. Tačiau taip daryta tik ten, kur formalizuotas užrašas yra trumpesnis ir suvokiamas ne sunkiau, o dargi lengviau.

Visi paragrafai ir teoremos numeruojamos iš eilės per visą knygą. Kiekvieno paragrafo pabaigoje pateikiama uždavinų. Jie ypač reikalingi studentams neakivaizdininkams ir mokytojams.

Nuošiant rankraštį pateikė daug vertingų pastabų ir patarimų, nurodė pirmojo leidimo trūkumus Vilniaus pedagoginio instituto Algebros ir skaičių teorijos katedros docentai V. Bernotas ir R. Skrabutėnas. Jiems ir kitiems kolegoms tariame nuoširdų ačiū. Taip pat nuoširdžiai dėkojame recenzentams doc. A. Matuliuskui ir doc. S. Norgėlai.

Skaitytojams būsimė dėkingi už kritines pastabas. Jas prašome siųsti į „Mokslo“ leidyklą (232050 Vilnius, Žvaigždžių 23) arba į Vilniaus pedagoginio instituto Algebros ir skaičių teorijos katedrą (232034 Vilnius, Studentų 39).

Autoriai

Matematinės logikos ir aibių teorijos pradmenys

§1. Matematinė logika

Žmogui dažnai trūksta žinių apie kokį nors jį dominantį objektą. Kai nėra galimybių pasinaudoti informacijos šaltiniais, tenka bandyti pačiam gauti reikalingas žinias. Žinių trūkumą galima papildyti atliekant bandymus ir stebėjimus arba samprotaujant.

Samprotaudami susiduriame su dvejojo pobūdžio žiniomis: vienas jau turime, o kitas išvedame iš jų samprotavimais. Pirmąsias paprastai vadiname prielaidomis, antrąsias – išvadomis. Vadinasi, samprotaudami iš tam tikrų prielaidų gauname vienokias ar kitokias išvadas. Tačiau kaip sužinoti, ar tos išvados teisingos?

Dar senovėje žymiausi mąstytojai stengėsi nustatyti tokias samprotavimo taisykles, dėsnius, schemas, kuriomis remdamiesi galėtų apsisaugoti nuo klaidingų išvadų, samprotautų tiksliai teisingai. Buvo sukurtas mokslas apie teisingo samprotavimo būdus – *logika*.

Logika, kaip savarankiškas mokslas, atsirado IV amžiuje p. m. e. Vienu iš jos kūrėjų laikomas graikų filosofas *Aristotelis* (384 – 322 m. p. m. e.). Aristotelio sukurtoji logikos sistema išliko iki šių dienų. Ji vadinama *formaliąja logika*, nes tiria tokius samprotavimo dėsningumus, kurie priklauso ne nuo mąstymo turinio, o nuo jo formos, nuo minčių struktūros.

Kiekviena mokslinė teorija plėtodamasi pasiekia tokį abstrakcijos laipsnį, kai iškyla būtinybė įvesti simbolius sąvokoms ir ryšiams tarp jų žymėti. Įvedus simbolius, atsirado galimybė formalizuoti logikos dėsnius, taikyti matematikos metodus, sudaryti logikos nagrinėjamų objektų matematinius modelius.

Logikos matematizavimo idėją pirmasis pasiūlė žymusis vokiečių matematikas *Gotfridas Leibnisas* (1646 – 1716). Jis manė, kad visas turimas žinias galima išskaidyti į paprasčiausius elementus, pažymėti juos specialiais simboliais, apibrėžti veiksmų su tais simboliais taisykles – ir bus nauja algebra, kuri padės lengvai gauti naujas teisingas išvadas, patikrinti, ar teisingi įvairūs samprotavimai. Anot Leibnico, įvedus tuos simbolius, visiems, net ir filosofams, nereikės įrodinėti savųjų tiesų, stengtis vienas kitą perrėkti, užteks sėdus prie stalo paskaičiuoti, kurio tiesa ir kurio – ne. Tačiau ši Leibnico idėja, kaip vėliau paaiškėjo, iš principo neįgyvendinama.

Iš dalies Leibnico mintis savo darbuose realizavo airių matematikas *Džordžas Bulis* (1815 – 1864). Jis sukūrė algebrą, kurios metodai ir dėsniai vėliau buvo pritaikyti matematizuojant logiką. Palaipsniui susikūrė nauja matematinė teorija – *matematinė logika*, kuri savo ruožtu sudarė rimtas prielai-

das tolesnei matematikos plėtotei. Paaiškėjo, kad matematinė logika glaudžiai susijusi su *algoritmų teorija*. Jos reikšmė ypač išaugo skaičiavimo mašinų kūrimo ir jų tobulinimo laikotarpiu.

Logika svarbi ir pačiai matematikai. Vartojant matematinės logikos simbolius, galima trumpai užrašyti matematinius teiginius.

Šiame skyriuje trumpai apžvelgsime elementariausias matematinės logikos sąvokas, pagrindinius dėsnius, aiškinsime ryšį tarp aibių teorijos ir matematinės logikos.

§2. Teiginiai ir predikatai

Kad suprastume, ką vadinsime teiginiu, išnagrinėkime keletą sakinių.

1. Mokytojas įėjo į klasę su dienynu rankoje.
2. Kodėl vakar nebuvai pamokose?
3. Penki daugiau už tris. (Galima ir taip užrašyti: $5 > 3$.)
4. 48 dalijasi iš 6.
5. $23 + (-48) > 0$.

Antrasis sakinyss – klausiamasis. Kiti sakiniai teikia tam tikros informacijos. Visais atvejais (išskyrus antrąjį) galima vienareikšmiškai nustatyti, ką tie sakiniai teigia: tiesą ar netiesą.

Teiginys – tai sakinyss, kuris išreiškia tiesą arba netiesą.

Teiginys gali būti užrašytas raidėmis arba kitokiais simboliais. Jei teiginys išreiškia tiesą, tai jis vadinamas *teisingu*, jei netiesą – *neteisingu*. Pavyzdžiui, 5-asis sakinyss yra neteisingas teiginys.

Teiginius žymėsime mažosiomis raidėmis su indeksais arba be jų, pavyzdžiui, p , q , r ir pan. Bet kokio teiginio p teisingumui žymėti vartosime simbolį $\tau(p)$. Rašysime:

$\tau(p) = 1$, kai teiginys p teisingas,

$\tau(p) = 0$, kai p neteisingas.

Funkciją $\tau(p)$ vadinsime teiginio p *teisingumo reikšme*. Ne visuomet lengva rasti konkretaus teiginio teisingumo reikšmę.

Matematikoje daugelio teiginių teisingumas nustatomas *įrodymais*, t. y. seka tam tikrų samprotavimų, paremtų logikos dėsniais ir vieno teiginių išvedimo iš kitų teiginių taisyklėmis. Tokie teiginiai vadinami teoremomis. Matematinė logika nagrinėja, kaip nustatyti teiginio teisingumo reikšmę, kai teiginys yra sudėtingas, t. y. sudarytas iš kelių kitų teiginių.

Kaip jau matėme, yra sakinių, kurie nėra teiginiai. Toks, pavyzdžiui, 2-asis sakinyss iš paragrafo pradžioje pateiktų 5 sakinių. Išnagrinėkime dar keletą pavyzdžių.

6. Du iksai plius vienetas daugiau už nulį (arba $2x + 1 > 0$).
7. $a + b = b - a$.
8. $(a + b)c = ac - bc$.
9. $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad visi šie sakiniai (kitus tris taip pat nesunku užrašyti žodžiais) kažką teigia. Tačiau, ką jie teigia – tiesą ar netiesą – nustatyti negalima. Taip yra todėl, kad šiuose sakiniuose veiksnys yra kintamasis. Paėmę vieną kintamojo reikšmę, galime gauti teisingą teiginį, paėmę kitą reikšmę – neteisingą. Štai 7-asis sakinytas tampa teisingu teiginiu, kai $a=0$, ir neteisingu, kai $a \neq 0$.

Predikatu vadinamas sakinytas su vienu ar keliais kintamaisiais, kuris tampa teiginiu vietoj kintamųjų įrašius konkrečias jų reikšmes.

Predikatus žymėsime didžiosiomis raidėmis, tarp skliaustų nurodydami į jį įeinančius kintamuosius. Pavyzdžiui, 6–9 sakinius galime užrašyti kaip predikatus: $P(x)$, $Q(a, b)$, $R(a, b, c)$, $T(x)$.

Turėdami kokį nors predikatą $P(x)$, žinomų x reikšmių visumą galime skirti į dvi dalis: į tuos x , su kuriais $P(x)$ yra teisingas teiginys, ir į tuos x , su kuriais $P(x)$ – neteisingas teiginys. Todėl kiekvienas predikatas $P(x)$ apibrėžia aibę, žymimą

$$\{x | P(x)\},$$

– visumą tų x reikšmių, su kuriomis $P(x)$ tampa teisingu teiginiu. Vadinasi, jei $P(a)$ teisingas, tai $a \in \{x | P(x)\}$,
jei $P(a)$ neteisingas, tai $a \notin \{x | P(x)\}$.

Pavyzdžiui, jei $P(x)$ reiškia anksčiau minėtą 6-ąjį sakinį, tai

$$\{x | P(x)\} = \{x | 2x + 1 > 0\} = (-1/2, \infty).$$

Pastarąjį intervalą gauname išsprendę nelygybę $2x + 1 > 0$, t. y. radę tas x reikšmes, su kuriomis sakinytas $2x + 1 > 0$ tampa teisingu teiginiu.

Pažymėsime, kad vidurinėje mokykloje sprendžiamos lygtys, nelygybės, jų sistemos yra sakiniai su kintamaisiais, taigi predikatai. Jas sprendžiant ieškoma atitinkamais predikatais apibrėžtų aibių.

Uždaviniai

1. Nustatykite, kurie sakiniai yra teiginiai, kurie – predikatai:

- 1) Vilniuje yra kinoteatras „Planeta“;
- 2) Kinoteatras „Planeta“ yra Vilniuje;
- 3) Kur yra kinoteatras „Planeta“?
- 4) $a < b$;
- 5) $2x = 3$;
- 6) $2 \cdot 2 = 5$;
- 7) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 8) $3x - 4y > 10$;
- 9) $\sin x + \cos x = 1$;
- 10) $\lg x + \lg y = \lg xy$.
2. Nustatykite šių teiginių teisingumo reikšmes:
- 1) Lygiapločių trikampių aukštinės lygios;
- 2) Sakinytas „Skaičius π mažesnis už 3“ yra teiginys;
- 3) Ne visi 1-ojo uždavinio sakiniai yra teiginiai;
- 4) Lygtis $3x^2 + 4x - 5 = 0$ turi dvi šaknis;
- 5) Nelygybė $-x^2 + 2x - 3 > 0$ neturi sprendinių;

6) Nelygybė $\sin x > 1$ turi sprendinių.

3. Patikrinkite, ar iš nurodyto predikato $P(x)$ sudarytas teiginys yra teisingas, kai $x=a$:

1) $P(x) - „3x^2 + 4x - 5 > 0“$, $a=2$, $a=-1$, $a=5$, $a=-3$;

2) $P(x) - „\sin x > 1/2“$, $a=0$, $a=-\pi/2$, $a=3\pi/2$, $a=5\pi/3$;

3) $P(x) - „\lg x < 1“$, $a=2$, $a=5$, $a=15$, $a=432$.

4. Raskite trečiojo uždavinio predikatais apibrėžtas aibes.

§3. Loginės operacijos

Teiginiai skirstomi į *paprastuosius* ir *sudėtinius*. Paprastuoju laikomas toks teiginys, kurio negalima suskaidyti į jokių kitus teiginius. Jeigu teiginį galima suskaidyti į keletą paprastesnių savarankiškų teiginių, tai jį vadiname sudėtinu.

Sudėtiniai teiginiai sudaromi iš kitų teiginių (paprastų arba taip pat sudėtinų) sujungiant juos *loginėmis jungtimis*. Išskirsime šitokias penkias jungtis:

netiesa, kad;

arba;

ir;

tada ir tik tada, kai;

jeigu ..., tai.

Sudėtinių teiginių sudarymas naudojantis šiomis jungtimis – *loginės operacijos*. Priklausomai nuo vartojamos jungties, loginė operacija vadinama atitinkamai *neigimu*, *disjunkcija*, *konjunkcija*, *ekvivalencija*, *implikacija*–

Neigimas. Jeigu p – teiginys, tai teiginys „Netiesa, kad p “ (dažnai sakoma „Ne p “) vadinamas teiginio p neiginiu ir žymimas $\bar{p}$. Jo teisingumo reikšmė

$$\tau(\bar{p}) = 1 - \tau(p).$$

Taigi $\bar{p}$ yra teisingas teiginys tada ir tik tada, kai p – neteisingas.

Pavyzdžiui, jeigu q pažymėsime neteisingą teiginį „12 dalijasi iš 5“, tai $\bar{q}$ bus teisingas teiginys „Netiesa, kad 12 dalijasi iš 5“.

Disjunkcija (loginė sudėtis). Jeigu p ir q teiginiai, tai teiginys „ p arba q “ vadinamas teiginių p ir q disjunkcija (logine suma) ir žymimas

$$p \vee q.$$

Teiginių p ir q disjunkcija yra neteisingas teiginys tada ir tik tada, kai p ir q abu neteisingi.

Pavyzdžiui, imkime teiginius

r – „ $9 \cdot 2 - 20 > 0$ “,

t – „11 yra natūrinio skaičiaus kvadratas“,

s – „17 yra pirminis skaičius“.

Teiginys $s \vee t$, kurį skaitome „17 yra pirminis skaičius arba 11 yra natūrinio skaičiaus kvadratas“ yra teisingas, nes s – teisingas teiginys. Neteisingas teiginys neturi įtakos disjunkcijos teisingumui. Tuo tarpu sudėtinis teiginys $r \vee t$ yra neteisingas, nes neteisingi abu jį sudarantys teiginiai.

Pavyzdžiai. 1. Ar teisingas teiginys „ $2 \times 2 = 5$ arba $2 \times 3 = 6$ “?

Pažymėję teiginį „ $2 \times 2 = 5$ “ raide p , o teiginį „ $2 \times 3 = 6$ “ raide q , iš apibrėžimo lengvai randame $\tau(p \vee q) = 1$. Taigi teiginys teisingas.

2. Tarkime, kad p yra teiginys „Trikampis ABC status“, o q – teiginys „Trikampis ABC lygiakraštis“. Ar teisingas teiginys $p \vee q$?

Jeigu trikampis ABC yra status arba lygiakraštis, tai disjunkcija $p \vee q$ teisinga, nes teisingas bent vienas iš jos narių. Tačiau jeigu trikampis ABC nėra nei status, nei lygiakraštis, tai disjunkcija neteisinga, nes abu jos nariai – neteisingi teiginiai. Tad disjunkcijos teisingumas priklausys nuo to, koks iš tikrųjų yra trikampis ABC .

3. Turime 3 teiginius:

p – „Atkarpa AB ilgesnė už atkarpą CD “,

q – „Atkarpų AB ir CD ilgiai lygūs“,

r – „Atkarpa AB trumpesnė už atkarpą CD “.

Ar teisinga disjunkcija $p \vee q \vee r$?

Kad ir kokios būtų atkarpos AB ir CD , visuomet bus teisingas vienas iš tų trijų teiginių. Todėl pagal disjunkcijos apibrėžimą $p \vee q \vee r$ – visuomet teisingas teiginys.

Konjunkcija (loginė daugyba). Jeigu p ir q teiginiai, tai teiginys „ p ir q “ vadinamas teiginių p ir q konjunkcija (logine sandauga) ir žymimas

$$p \wedge q.$$

Teiginių p ir q konjunkcija $p \wedge q$ yra teisingas teiginys tada ir tik tada, kai p ir q abu teisingi.

Ši konjunkcijos teisingumo nustatymo taisyklė visiškai atitinka mūsų mąstymo patirtį.

Pavyzdys. Turime teiginius:

p – „23 yra pirminis skaičius“,

r – „12 dalijasi iš 5“,

q – „ $5 > 3$ “.

Konjunkcija $p \wedge q$ yra teisingas teiginys, nes $\tau(p) = \tau(q) = 1$. Kitos galimos konjunkcijos $p \wedge r$, $r \wedge q$, $p \wedge r \wedge q$ – neteisingi teiginiai, nes į bet kurią iš tų konjunkcijų įeina neteisingas teiginys.

Implikacija. Jeigu p ir q – teiginiai, tai teiginys „jeigu p , tai q “ vadinamas teiginių p ir q implikacija ir žymimas

$$p \Rightarrow q.$$

Implikacija $p \Rightarrow q$ yra neteisingas teiginys tada ir tik tada, kai p teisingas, o q neteisingas.

Implikacija $p \Rightarrow q$ gali būti skaitoma dar ir šitaip:

iš p išplaukia q ;

q tada, kai p ;

p yra teiginio q pakankamoji sąlyga;

q , jei p ;

q yra teiginio p būtinoji sąlyga.

Kai matematinis „ $p \Rightarrow q$ “ pavidalo teiginys yra teorema, p vadinamas teoremos sąlyga, o q – jos išvada.

Pavyzdys. Pažymėkime teiginius:

p – „35 yra sveikąjį skaičių kvadratas“,

q – „ $17 < 35$ “.

Implikacija $p \Rightarrow q$ (jeigu 35 yra sveikąjį skaičių kvadratas, tai $17 < 35$) yra teisingas teiginys, nes $\tau(p) = 0$, $\tau(q) = 1$. O implikacija $q \Rightarrow p$ – neteisingas teiginys, nes pirmoji jos komponentė yra teisingas teiginys, o antroji – neteisingas.

Ekvivalencija. Jeigu p ir q – teiginiai, tai teiginys „ p tada ir tik tada, kai q “ vadinamas teiginių p ir q ekvivalencija ir žymimas

$$p \Leftrightarrow q.$$

Ekvivalencija $p \Leftrightarrow q$ yra teisingas teiginys, kai p ir q teisingumo reikšmės sutampa, ir neteisingas, kai p ir q teisingumo reikšmės skiriasi.

Kartais vietoje sakinio „ p tada ir tik tada, kai q “ sakoma:

p būtina ir pakankama, kad būtų q ,

q būtina ir pakankama, kad būtų p .

Visi trys sakiniai reiškia tą patį teiginį.

Pavyzdys. Ekvivalencija „35 yra sveikąjį skaičių kvadratas tada ir tik tada, kai 10 dalijasi iš 7“ yra teisingas teiginys, nes abiejų ekvivalenciją sudarančių paprastųjų teiginių teisingumo reikšmės sutampa (abu teiginiai neteisingi).

Loginių operacijų teisingumo reikšmės pateiktos 1 lentelėje.

1 lentelė

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Uždaviniai

5. Sudarykite nurodytųjų teiginių neiginius:

1) Lygtis $3x^2 - 4x - 5 = 0$ turi šaknį;

2) Ne į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą;

3) Yra tokia α reikšmė, kad $\cos 2\alpha \neq \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

4) $4^2 \leq 2^4$;

5) Nėra tokios kvadratinės lygties, kurios šaknų suma būtų lygi jos laisvajam nariui.

Nustatykite tų teiginių ir jų neiginių teisingumo reikšmes.

6. Sudarykite teiginių p ir q disjunkciją, konjunkciją, abi implikacijas ir ekvivalenciją. Suformuluokite jas žodžiais. Raskite nurodytųjų ir sudarytųjų teiginių teisingumo reikšmes:

- 1) p – „ $3^2 - 4 \cdot 5 > 0$ “;
 q – „Lygtis $x^2 - 3x + 5 = 0$ turi šaknį“;
- 2) p – „I kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą“;
 q – „Ne apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą“;
- 3) p – „345 dalijasi iš 7“;
 q – „Nelygybė $5x^2 - 4x + 3 > 0$ turi sveikųjų sprendinių“;
- 4) p – „Nėra tokio trikampio, kurio kraštinių ilgių būtų lygūs 7, 8, 20“;
 q – „Kiekvieno stačiakampio įstrižainės yra statmenos“;
- 5) p – „ $5! < 100$ “;
 q – „Nelygybė $120x < 100$ turi sprendinį, didesnę už 1“.

§4. Loginės formos

Apibrėždami logines operacijas, jungiamiesiems teiginiams nekėlėme jokių reikalavimų. Todėl nustatinėdami gautųjų sudėtinių teiginių teisingumą, nekreipsime dėmesio į jų turinį. Mums svarbu tik tų teiginių teisingumo reikšmės. Vadinasi, galime teiginius žymėti raidėmis ir formaliai nagrinėti reiškinius

$$p, \quad p \vee q, \quad p \wedge q, \quad p \Rightarrow q, \quad p \Leftrightarrow q,$$

kuriuose raidės gali įgyti reikšmes – teiginius. Šiuos reiškinius, taip pat ir pačias raides, vadinsime *pagrindinėmis*, arba *paprastčiausiomis, loginėmis formomis*. Iš jų gausime teiginius, vietoje raidžių įrašę kokius nors teiginius, paprastus ar sudėtinius. Taigi *loginėmis formomis vadinami reiškiniai, gauti baigtinių skaičių kartų pavartojus loginių operacijų ženklus bei skliaustus raidžių jungimui*. Loginės formos dar vadinamos *teigininėmis*, arba *propozicinėmis*, formomis. Iš loginių formų loginėmis operacijomis galime gauti naujas logines formas.

Pavyzdžiui, reiškiniai $(p \vee q) \vee r$, $(p \wedge q) \vee r$, $(p \Rightarrow q) \vee r$, $\overline{p \vee q}$, $\overline{p} \wedge \overline{q}$ yra loginės formos.

Logines formas žymėsime panašiai kaip ir funkcijas. Pavyzdžiui, $p \vee q = \alpha(p, q)$, $(p \vee q) \wedge r = \beta(p, q, r)$. Remdamiesi pagrindinių loginių formų teisingumo reikšmių taisyklėmis (arba 1 lentele), galime nustatyti kiekvienos loginės formos teisingumo reikšmių lentelę.

Dvi loginės formos $\alpha(p_1, \dots, p_k)$ ir $\beta(p_1, \dots, p_k)$, kurių teisingumo reikšmių lentelės sutampa, vadinamos logiškai ekvivalentėmis, t. y.

$$\alpha(p_1, \dots, p_k) \equiv \beta(p_1, \dots, p_k).$$

Dviejų loginių formų ekvivalentumas reiškia štai ką: jeigu į abi formas vietoje raidžių $p_1, \dots, p_k$ įrašysime tuos pačius teiginius, tai gausime du sudėtinius teiginius, kurių teisingumo reikšmės sutampa.

Loginė forma, kurios teisingumo reikšmė lygi 1 imant bet kurias teiginių teisingumo reikšmes, vadinama *tautologija* ir žymima raide I .

Jeigu loginės formos $\alpha(p_1, \dots, p_k)$ ir $\beta(p_1, \dots, p_k)$ logiškai ekvivalenčios, tai loginė forma $\alpha \Leftrightarrow \beta$ yra tautologija, t. y.

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv I.$$

Loginė forma, kurios teisingumo reikšmė lygi 0 imant bet kurias į ją įeinančių teiginių teisingumo reikšmes, vadinama *tapčia neteisinga logine forma*, arba *loginiu nuliu*. Ji žymima raide O . Šios formos teisingumo reikšmių stulpelyje yra tik nuliai. Akivaizdu, kad $\bar{I} \equiv O$, $\bar{O} \equiv I$.

Tautologija, kaip vėliau matysime, logikos algebroje atlieka „vieneto“ vaidmenį, o tapčiai neteisinga loginė forma — „nulio“.

§5. Logikos algebra

Pačia bendriausia prasme *algebra vadinama matematikos šaka, nagrinėjanti veiksmų su įvairiais dydžiais bendrąsias savybes*.

Vidurinės mokyklos algebros kurse mokoma įvairių dėsnų, veiksmų taisyklių. Tačiau visi tie dėsniai ir taisyklės grindžiami keletu apibrėžimų ir formulų. Trumpai juos paminėsime.

Paprasčiausi veiksmai, atliekami su sveikaisiais, racionaliaisiais ir kitokiais skaičiais, yra *sudėtis* ir *daugyba*.

Skaičių sudėtį žymime ženklu $+$. Sudėję du skaičius a ir b , gauname vieną skaičių c , vadinamą jų *suma* ($a+b=c$). Sukeitus vietomis dėmenis a ir b , suma nepasikeičia (*sudėties komutatyvumo savybė*). Suma taip pat nepasikeis, jei, turėdami daugiau kaip du dėmenis, pakeisime jų sudėties tvarką (*sudėties asociatyvumo savybė*).

Daugyba žymima ženklais $\times$ arba $\cdot$ (tarp raidžių paprastai daugybos ženklo nerašome). Daugybos veiksmu randame nurodytųjų skaičių porą a, b atitinkantį vieną skaičių d , vadinamą jų *sandauga* ($ab=d$). Sandauga nepasikeičia, sukeitus dauginamuosius vietomis (*daugybos komutatyvumo savybė*). Sandauga nesikeičia ir tada, kai dauginamuosius (jei jų daugiau kaip du) dauginame kita tvarka (*daugybos asociatyvumo savybė*).

Tarp skaičių ypatingą vietą užima du skaičiai — *nulis* (0) ir *vienetas* (1). Nulio ir bet kurio skaičiaus a suma yra a , o nulio ir bet kurio skaičiaus sandauga — nulis; vieneto ir skaičiaus a sandauga yra a .

Skaičių sudėtis ir daugyba susietos *distributyvumo dėsniu*: dauginant skaičių iš sumos, jį galima padauginti iš kiekvieno dėmens ir gautąsias sandaugas sudėti.

Visos minėtosios taisyklės trumpai užrašomos formulėmis:

- 1) *skaičių a ir b suma yra skaičius, žymimas $a+b$;*
- 2) $a+b=b+a$;
- 3) $a+(b+c)=(a+b)+c$;
- 4) *skaičių a ir b sandauga yra skaičius, žymimas ab ;*
- 5) $ab=ba$;
- 6) $a(bc)=(ab)c$;
- 7) $(a+b)c=ac+bc$;
- 8) $a+0=a$;
- 9) $a \cdot 0=0$;
- 10) $a \cdot 1=a$.

Remiantis šiomis savybėmis, įrodomos įvairios algebros tapatybės, kai kurių tų savybių bendriniai, sutrumpintos daugybos, panašųjų narių sutraukimo taisyklės ir kt.

Pažymėsime, kad algebrinių veiksmų savybės yra tam tikrų algebrinių reiškinių lygybės. Matematinėje logikoje reiškinius vadiname *loginėmis formomis*. Algebrinių reiškinių lygybę čia atitinka loginis ekvivalentumas.

Aptarsime paprasčiausias pagrindinių loginių operacijų savybes.

Dvigubo neigimo dėsnis.

$$\bar{\bar{p}} \equiv p.$$

Tai pagrindinė neigimo savybė – teiginio p neiginio neiginys yra logiškai ekvivalentus teiginiui p . Šio dėsnio teisingumu galima įsitikinti iš lentelės (žr. 2 lentelę; jos pirmasis ir trečiasis stulpeliai sutampa).

2 lentelė

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$
1	0	1
0	1	0

Disjunkcijos savybės.

- 1) $p \vee p \equiv p$,
- 2) $p \vee \bar{p} \equiv I$ – *negalimo trečiojo dėsnis*,
- 3) $p \vee I \equiv I$,
- 4) $p \vee q \equiv q \vee p$ – *komutatyvumo dėsnis*,
- 5) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ – *asociatyvumo dėsnis*,
- 6) $p \vee O \equiv p$.

Pirmosios trys disjunkcijos savybės neturi analogų algebroje, trys pastarosios yra anksčiau išvardytų algebrinių veiksmų savybių (antrosios, trečiosios ir aštuntosios) analogai.

Disjunkcijos savybių teisingumą lengva patikrinti sudarius atitinkamą lentelę. Štai, pavyzdžiui, trečiąją ir ketvirtąją disjunkcijos savybes patikrinsime naudodamiesi šitokia lentele.

3 lentelė

p	I	q	$p \vee I$	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1		0		1	1
0		0		0	0

Iš disjunkcijos komutatyvumo ir asociatyvumo savybių išplaukia, kad loginėje formoje, sudarytoje iš raidžių, disjunkcijos ženklų ir skliaustų, ga-

lima raides sukeisti vietomis, bet kaip jas suskliausti arba ir visai neskliausti – visos taip gautos loginės formos bus ekvivalenčios. Pavyzdžiui,

$$(p \vee q) \vee r \equiv (q \vee p) \vee r \equiv q \vee (p \vee r) \equiv \dots \equiv p \vee q \vee r.$$

Apibendrinami galime apibrėžti ir daugiau raidžių jungiančias disjunkcijas, kurioms žymėti vartojamas kompaktiškesnis užrašas:

$$\bigvee_{n=1}^k p_n \equiv p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k.$$

Konjunkcijos savybės.

- 1) $p \wedge p \equiv p$,
- 2) $p \wedge \bar{p} \equiv O$ – prieštaravimo dėsnis,
- 3) $p \wedge I \equiv p$,
- 4) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ – komutatyvumo dėsnis,
- 5) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ – asociatyvumo dėsnis,
- 6) $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ – distributyvumo dėsnis,
- 7) $p \wedge O \equiv O$.

Šias savybes lengva įrodyti sudarius atitinkamas lenteles. Nesunku įsitikinti, kad ir konjunkcijos atveju skliaustų tvarka neturi reikšmės. Apibendrinami asociatyvumo savybę, panašiai galime apibrėžti k narių konjunkciją

$$\bigwedge_{n=1}^k p_n \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k.$$

Konjunkcijos distributyvumo savybę galime apibendrinti didesniam narių skaičiui. Pavyzdžiui,

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge q \equiv (p_1 \wedge q) \vee (p_2 \wedge q) \vee (p_3 \wedge q).$$

Paminėsime porą implikacijos savybių:

$$(p \Rightarrow q) \equiv \bar{p} \vee q, \quad (1.1)$$

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)). \quad (1.2)$$

Iš šių formulių išplaukia, kad implikacijos ir ekvivalencijos savybės (čia jų detalai nenagrinėsime) gali būti gautos iš pirmųjų trijų operacijų savybių.

Uždaviniai

7. Sudarykite šių formų teisingumo reikšmių lenteles:

- 1) $\overline{p \vee q}$,
- 2) $(p \vee q) \wedge (\overline{p \vee r})$,
- 3) $(\overline{p \Rightarrow q}) \vee (q \Rightarrow p)$,
- 4) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (\overline{p \Rightarrow (q \wedge r)}))$,
- 5) $(\overline{p \vee q}) \wedge r$,
- 6) $(\overline{p \vee q}) \wedge (p \vee r)$,
- 7) $(\overline{p \wedge q}) \wedge \bar{r}$,
- 8) $p \Rightarrow (\overline{q \wedge r})$,

$$9) p \Leftrightarrow (\bar{q} \wedge r),$$

$$10) (p \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{r}.$$

8. Patikrinkite, ar šios formų poros logiškai ekvivalenčios:

$$1) p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \text{ ir } (p \wedge q) \Rightarrow r,$$

$$2) (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \text{ ir } p \Rightarrow (q \wedge r),$$

$$3) (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \text{ ir } (p \wedge q) \Rightarrow r,$$

$$4) (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \text{ ir } (p \vee q) \Rightarrow r,$$

$$5) (q \wedge \bar{p}) \Rightarrow \bar{q} \text{ ir } q \Rightarrow p,$$

$$6) \bar{p} \vee q \vee \bar{r} \text{ ir } \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r},$$

$$7) (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \text{ ir } p \Rightarrow r,$$

$$8) p \wedge q \wedge \bar{q} \text{ ir } \bar{p} \wedge q \wedge p,$$

$$9) (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \text{ ir } (p \wedge r) \Rightarrow q,$$

$$10) (\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (r \wedge \bar{r}) \text{ ir } (p \wedge r) \Rightarrow q.$$

§6. Logikos dėsniai

Praeitame paragrafe kai kurias loginių operacijų savybes pavadiname *logikos dėsniais*. Tos savybės iš esmės niekuo nesiskiria nuo kitų, jau nagrinėtų savybių. Jos tik dažniau vartojamos samprotaujant.

Kiekvieną tautologiją vadiname logikos dėsniu.

Ne visi tie dėsniai vienodai reikšmingi. Paminėsime kai kuriuos iš jų. Trys dėsniai buvo minėti nagrinėjant loginių operacijų savybes, būtent: *dvigubo neigimo dėsnis*:

$$\bar{\bar{p}} \equiv p,$$

negalimo trečiojo dėsnis:

$$p \vee \bar{p} \equiv I,$$

prieštaravimo dėsnis:

$$p \wedge \bar{p} \equiv O.$$

Be šių, dar buvo užrašyti du dėsniai, kuriuos galima pavadinti *idempotencijos dėsniais* (iš lotynų kalbos žodžių *idem* – tas pats, *potens* – stiprus):

$$p \wedge p \equiv p \text{ ir } p \vee p \equiv p.$$

Visi tie dėsniai įrodyti praeitame paragrafe. Beje, matematikoje vartojami ir kai kurie kiti dėsniai.

Kontrapozicijos dėsnis:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}). \quad (1.3)$$

Šį dėsniį, kaip ir toliau pateiktus, lengvai galima įrodyti sudarius ir palyginus atitinkamų teiginių formų teisingumo reikšmių lenteles.

Silogizmo dėsnis:

$$\left(((p \Rightarrow p_1) \wedge (p_1 \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \right) \equiv I. \quad (1.4)$$

Ši dėsnį galime apibendrinti taip:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{k-1} (p_i \Rightarrow p_{i+1}) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_k) \right) \equiv I.$$

de Morgano dėsniai:

$$1. \quad \overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}, \quad (1.5)$$

$$2. \quad \overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}. \quad (1.6)$$

Šiuos dėsnius taip pat galima apibendrinti:

$$1a. \quad \overline{\bigvee_{i=1}^n p_i} \equiv \bigwedge_{i=1}^n \bar{p}_i,$$

$$2a. \quad \overline{\bigwedge_{i=1}^n p_i} \equiv \bigvee_{i=1}^n \bar{p}_i.$$

Prieštaros (suvedimo į prieštaravimą) dėsnis:

$$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r}) \equiv (p \Rightarrow q). \quad (1.7)$$

Užrašysime dar tris taip pat lengvai įrodomus dėsnius:

$$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p} \equiv (p \Rightarrow q), \quad (1.8)$$

$$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow q \equiv (p \Rightarrow q), \quad (1.9)$$

$$\bar{t} \Rightarrow (r \wedge \bar{r}) \equiv t. \quad (1.10)$$

Iš pastarojo dėsnio nesunku gauti (1.7) dėsnį. Iš tikrųjų, imant $t \equiv (p \Rightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q)$, gaunama:

$$\bar{t} \equiv (\bar{\bar{p} \vee q}) \equiv (\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}) \equiv (p \wedge \bar{q}).$$

Taigi

$$\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \bar{q}.$$

(1.10) dėsnio teisingumu nesunku įsitikinti sudarius atitinkamą teisingumo reikšmių lentelę.

4 lentelė

t	r	$\bar{t}$	$\bar{r}$	$r \wedge \bar{r}$	$\bar{t} \Rightarrow r \wedge \bar{r}$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0

Paminėsime ir paprasčiausias teisingo samprotavimo (išvedimo) taisykles, kartais taip pat vadinamas logikos dėsniais. Tos taisyklės remiasi ilgaamže mąstymo patirtimi ir išplaukia iš pagrindinių formų teisingumo reikšmių nustatymo dėsnų.

Negalimo trečiojo dėsnis: iš dviejų teiginių p ir $\bar{p}$ visuomet vienas yra teisingas. Ši dėsnį jau minėjome – tai antroji disjunkcijos savybė.

Teisingos išvados taisyklė (modus ponens): jeigu teiginiai p ir $p \Rightarrow q$ yra teisingi, tai teisingas ir teiginys q .

Šią taisyklę pavaizduosime schemiškai:

$$\begin{array}{l} p - \text{teisingas,} \\ p \Rightarrow q - \text{teisingas,} \\ \hline q - \text{teisingas.} \end{array}$$

Neteisingos išvados taisyklė (modus tollens): jeigu teiginys $p \Rightarrow q$ yra teisingas, o q – neteisingas, tai p – neteisingas teiginys.

Šio dėsnio schema šitokia:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q - \text{teisingas,} \\ q - \text{neteisingas,} \\ \hline p - \text{neteisingas.} \end{array}$$

Abi šios taisyklės išplaukia iš implikacijos $p \Rightarrow q$ teisingumo reikšmių lentelės (žr. 6 lentelę).

Įrodymai, kurie paremti neteisingos išvados taisykle, vadinami *netiesioginiais įrodymais*.

Uždaviniai

9. Įrodykite, kad šios formos yra tautologijos:

- 1) $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
- 2) $p \Rightarrow (p \vee q)$,
- 3) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$,
- 4) $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)) \Leftrightarrow ((p \vee r) \Rightarrow q)$,
- 5) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

§7. Aksiomos ir teoremos

Kiekvienoje matematikos srityje vartojamos tiek bendros visai matematikai, tiek ir specifinės, tik tai sričiai būdingos sąvokos. Naujos sąvokos turi būti apibrėžtos.

Matematinės sąvokos apibrėžimu (definavimu) atskleidžiami būdingiausi tos sąvokos bruožai, nusakomas jos turinys arba esmė.

Remiantis apibrėžimu, apibrėžtąjį objektą galima išskirti iš kitų jam artimų objektų.

Naują sąvoką galima įvairiai apibrėžti. Labiausiai paplitęs apibrėžimo būdas, kai nurodoma *giminė* ir *rūšinis skirtumas*. Pavyzdžiui, apibrėžime „Lygiagretainis yra keturkampis, kurio priešingos kraštinės lygiagrečios“ nurodyta giminė (keturkampis) ir rūšinis skirtumas (priešingų kraštinių lygiagretumas).

Apibrėždami kokią nors sąvoką, remiamės jau žinomomis sąvokomis. Pastarosios savo ruožtu apibrėžiamos remiantis vėl kitomis sąvokomis. Savaimė aišku, toks vieno sąvokų apibūdinimas vartojant kitas sąvokas negali būti begalinis. Bet kuri teorija pradedama kurti nuo sąvokų, kurios įvedamos be specialaus apibrėžimo. Jų prasmė yra daugiau ar mažiau visiems aiški arba aiškinama pavyzdžiais.

Neapibrėžiamos sąvokos vadinamos *pagrindinėmis*, arba *pirminėmis*. Pavydžiui, *aiškė*, *elementas*, *atitiktis* yra vienos iš pagrindinių matematikos sąvokų.

Kiekviena matematikos šaka turi ir savas pagrindines sąvokas. Pavydžiui, aritmetikos pagrindinė sąvoka yra natūrinis skaičius, geometrijos — taškas, tiesė ir t. t.

Pagrindinėms sąvokoms išskirti iš kitų formuluojami tam tikri teiginiai, vadinami *aksiomomis*. Aksiomos nusako esminius pagrindinių objektų bruožus.

Aksiomos yra pirminiai teiginiai, priimami be įrodymo. Aksiomos būtinos pradedant kurti bet kurią matematinę teoriją. Iš tikrųjų įrodyti kokią nors teiginį — reiškia išvesti jį iš kitų jau įrodytų, t. y. teisingų teiginių. Tačiau iš ko išvesti pačius pirmuosius teiginius? Suprantama, aksiomos nėra absoliučios — jas galima parinkti įvairiai. Kurie teiginiai bus paimti kaip aksiomos, o kurie iš pastarųjų išvesti — priklausys nuo teorijos autorių, jų patirties, tradicijų, patogumo ir kitų faktorių.

Kiekvienas teiginys, kuris nėra aksioma, turi būti įrodytas. *Teiginys, kurio teisingumas patvirtinamas įrodymu, vadinamas teorema.*

Teoremos dažnai formuluojamos sudėtiniais sakiniiais. Pirmąją teoremos dalį, dažnai prasidedančią žodžiu „jeigu“, vadiname *teoremos sąlyga*, antrąją dalį, prasidedančią žodžiu „tai“, vadiname *teoremos išvada*. Kartais teoremos sąlygas apima kalbamojo objekto pavadinimas. Pavydžiui, teoremą „rombo įstrižainės statmenos“ pagal bendrą schemą galėtume formuluoti šitaip: „Jeigu įstrižainės yra rombo, tai jos statmenos“.

Tokios teoremos pagal savo loginę schemą yra *implikacijos*.

Teorema turėtų vadinti kiekvieną įrodomą teiginį, bet praktiškai taip vadinami tik svarbesni iš jų. Pavydžiui, niekam neateis į galvą teiginį „Lyginių sveikųjų skaičių suma yra lyginis skaičius“ vadinti teorema. Tai jau labai akivaizdus tvirtinimas. *Pagalbiniai teiginiai, vartojami įrodinėjant teoremas, vadinami lemomis.* Tačiau, pavydžiui, teiginio, žinomo Pitagoro teoremos pavadinimu, niekas nepavadinys tiesiog tvirtinimu ar lema, nes tai vienas iš svarbesnių geometrijos dėsnių ir anaiptol neakivaizdus. Savaimė aišku, skirstymas į lemas, teoremas ar tiesiog tvirtinimus yra reliatyvus, t. y. priklauso nuo dėstymo formos, autoriaus nuomonės.

Šiame algebros ir skaičių teorijos kurse teoremomis vadinsime tik tuos teiginius, kurie autoriams atrodo svarbesni, lyginant su kai kuriais kitais, ir kurių įrodymas nėra akivaizdus.

Kurios nors matematikos srities aksiomų visuma vadinama aksiomų sistema.

Aksiomų sistemos sudarymas — sunkus uždavinys. Beje, jis gali būti išspręstas nevienareikšmiškai. Pavydžiui, vienoje aksiomų sistemoje teiginys p gali būti priimtas kaip aksioma, o teiginys q — kaip teorema, kitoje sistemoje gali būti atvirkščiai: q — aksioma, p — teorema.

Aksiomų sistemos keliama tam tikri reikalavimai, ir kuo geriau sistema juos tenkina, tuo ji laikoma optimalesnė. Pagrindiniai reikalavimai yra šie:

1. *Sistemos minimalumas*. Aksiomų sistemoje turi būti kuo mažiau aksiomų. Tai atitinka bendrą požiūrį matematikoje: kuo daugiau teiginių įrodyti, kuo mažiau jų priimti be įrodymo.

2. *Sistemos neprieštarinumas*. Aksiomų sistema laikoma neprieštariną, jeigu ja remiantis negalima įrodyti, kad kuris nors teiginys yra ir teisingas, ir (galbūt įrodinėjant kitu būdu) klaidingas. Šis reikalavimas kategoriškas.

3. *Sistemos pilnumas*. Yra įvairių aksiomų sistemos pilnumo apibrėžimų. Pilnumas paprastai reiškia reikalavimą, kad sistemą sudarytų tiek ir tokių aksiomų, jog būtų galima sukurti matematinę teoriją.

4. *Sistemos nepriklausomumas*. Aksiomų sistema vadinama nepriklausoma, jeigu nė viena iš jos aksiomų nėra kitų tos sistemos aksiomų išvada. Šis reikalavimas glaudžiai siejasi su pirmuoju.

Kiekviena objektų sistema, kuriai teisinga aksiomų sistema, vadinama tos aksiomų sistemos *interpretacija*.

Sakoma, kad matematikos teorija sukurta *aksiominiu metodu*, jeigu iš pradžių buvo nustatytos pagrindinės sąvokos ir sudaryta aksiomų sistema, po to remiantis ta sistema įrodyti kiti teiginiai.

Aksiominis metodas matematikoje vartojamas seniai. Pastaruoju metu jis ypač populiarus. Ir tai suprantama, nes matematikos teorijos, sukurtos aksiominiu metodu, patrauklios savo logine darna, nepriekaištinga vidine struktūra.

Aptarkime keletą matematikoje paplitusių terminų.

Teoremą $p \Rightarrow q$ vadinkime *tiesiogine*. Tada vadintume teoremą

$q \Rightarrow p$ *atvirkštine* teoremai $p \Rightarrow q$,

$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ *priešinga* teoremai $p \Rightarrow q$,

$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ *priešinga atvirkštinei* teoremai $q \Rightarrow p$.

Suprantama, imant konkrečią teoremą, toks skirstymas būtų sąlyginis: dažniausiai bet kurią iš tų keturių teoremų galima laikyti tiesiogine, o kitas tris sudaryti laikantis tos schemos.

Iš tiesioginės teoremos teisingumo, kaip matysime, ne visuomet išplaukia jai atvirkštinės ar priešingos teoremos teisingumas. Dabar suformuluosime pirmąją šio vadovėlio teoremą – teoremą apie teoremas.

1 teorema. *Tiesioginė ir priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalenčios, t. y.*

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p}).$$

Teoremos įrodymas pateiktas 5 paragrafe. Tai kontrapozicijos dėsnio įrodymas.

Suformuluosime panašią teoremą ir apie kitą teoremų porą.

2 teorema. *Atvirkštinė ir priešingoji teoremos yra ekvivalenčios, t. y.*

$$(q \Rightarrow p) \equiv (\bar{p} \Rightarrow \bar{q}).$$

Įrodymas išplaukia iš 1 teoremos, sukeitus vietomis p ir q .

Šios teoremos svarbios dėl to, kad vienos teoremos įrodymą galima pakeisti kitos teoremos įrodymu. Jeigu tiesioginės teoremos $p \Rightarrow q$ įrodymas sudėtingesnis negu priešingos atvirkštinei teoremai, tai įrodoma pastaroji, o tiesioginė

nės teoremos įrodymas išplaukia iš 1 teoremos. Toks teoremos įrodymas vadinamas *netiesioginiu*.

Remdamiesi pračiojo paragrafo teiginiais, suformuluosime ir kitas teoremas $p \Rightarrow q$ ekvivalenčias teoremas.

3 teorema. *Logiškai ekvivalenčios yra šios formos:*

$$p \Rightarrow q, \quad (1.11)$$

$$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}, \quad (1.12)$$

$$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow q, \quad (1.13)$$

$$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r}). \quad (1.14)$$

Įrodymas. (1.11)–(1.13) formų loginis ekvivalentumas išplaukia iš 5 lentelės. Skaitytojui paliekame įrodyti, kad ir (1.14) forma logiškai ekvivalenti trims pirmosioms formoms.

5 lentelė

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}$	$(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Bet kurioje teisingoje implikacijoje $p \Rightarrow q$ teiginys p vadinamas teiginio q *pakankamąja sąlyga*, nes p pakanka, kad būtų q . Teiginys q vadinamas teiginio p *būtinąja sąlyga* (jeigu q neteisingas, tai negali būti teisingas ir p).

Kai teiginys $p \Rightarrow q$ yra teorema, teiginį p vadiname teoremos pakankamąja sąlyga, o teiginį q – būtinąja sąlyga. Pavyzdžiui, Pitagoro teoremoje teiginys „Trikampis yra status“ – teoremos pakankamoji sąlyga, teiginys „Statinių kvadratų suma lygi įžambinės kvadratu“ – būtinoji sąlyga.

Iš anksčiau suformuluotų 4 teiginių $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$, $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$, kaip matėme 1 ir 2 teoremos, vidurinės bei kraštinės teiginių poros yra kartu teisingos arba neteisingos. Tačiau teiginiai $p \Rightarrow q$ ir $q \Rightarrow p$ nebūtinai yra vienodo teisingumo. Pavyzdžiui, tarę, kad p yra teiginys „ $a=b$ “, o q – „ $a^2=b^2$ “, matome, kad implikacija $p \Rightarrow q$ yra teisinga, o $q \Rightarrow p$ – ne.

Tuo atveju, kai teiginiai $p \Rightarrow q$ ir $q \Rightarrow p$ teisingi, iš (1.2) dėsnių išplaukia, kad teisingas ir teiginys $p \Leftrightarrow q$. Pastarasis teiginys vadinamas *teorema su būtinomis ir pakankamosiomis sąlygomis*. Tikrai teiginyje $p \Rightarrow q$ teiginys p yra pakankamoji sąlyga, o teiginyje $q \Rightarrow p$ tas pats p yra būtinoji sąlyga. Taigi p – pakankamoji ir būtinoji sąlyga. Tą patį galima pasakyti ir apie q .

Paprastai $p \Leftrightarrow q$ tipo teoremoje, skaitomoje „ p tada ir tik tada, kai q “, vienas iš teiginių vadinamas *teoremos išvada*, o kitas – *būtinąja ir pakankamąja sąlyga*. Kaip jau minėjome, toks skirstymas yra sąlyginis; jis priklauso nuo siekiamo tikslo, taip pat nuo to, kuris iš tų dviejų teiginių anksčiau įrodytas.

Jeigu teiginys p , pavyzdžiui, buvo žinomas anksčiau, tai jis ir bus teoremos $p \Rightarrow q$ būtinoji ir pakankamoji sąlyga.

Logikos dėsnis (1.2) nurodo, kaip reikia įrodyti teoremą su būtinąja ir pakankamąja sąlyga: teorema „ p tada ir tik tada, kai q “ bus įrodyta, kai įrodysime teoremas „Jeigu p , tai q “ ir „Jeigu q , tai p “. Įrodinėdami pirmąją iš jų, t. y. $p \Rightarrow q$, įrodome sąlygos p pakankamumą (ir sąlygos q būtinumą), o įrodinėdami $q \Rightarrow p$, įrodome sąlygos p būtinumą (ir q pakankamumą).

Ne visoms teorems galima suteikti formą „jeigu p , tai q “, arba „ p tada ir tik tada, kai q “. Tokios, pavyzdžiui, yra teoremos: „Jeigu x — realusis skaičius, tai $x^2 + 1 \neq 0$ “, „Nėra racionaliojo skaičiaus, kuris būtų lygus $\sqrt{2}$ “ ir pan.

Uždaviniai

10. Suformuluokite teoremą $p \Rightarrow q$, jai atvirkštinę, priešingą atvirkštinei, kai:

1) p — „Realųjų skaičių a ir b sandauga ab teigiama“,

q — „Skaičiai a ir b vienodų ženklų“;

2) p — „Kvadratinis trinaris $x^2 + ax + b$ nekeičia ženklo“,

q — „ $a^2 - 4b \leq 0$ “;

3) p — „Apskritimo stygos l ir t vienodo ilgio“,

q — „Apskritimo stygos l ir t vienodai nutolusios nuo centro“;

4) p — „Trupmena a/b lygi nuliui“,

q — „Trupmenos a/b skaitiklis a lygus nuliui“;

5) p — „Trupmenos a/b ir c/d lygios“,

q — „Teisinga lygybė $|ad| = |bc|$ “.

Nustatykite, kurios iš suformuluotųjų teoremų teisingos.

11. Naudodamiesi 10 uždavinio p ir q reikšmėmis, suformuluokite teoremą $p \Leftrightarrow q$. Nustatykite, ar ji teisinga.

§8. Teoremos įrodymas — kas tai!

Praeitame paragrafe teorema pavadinome teiginį, kurio teisingumas nustatomas įrodymu. Tai reiškia, kad teorema yra teiginys t , kurio teisingumo reikšmė $\tau(t) = 1$.

Mąstymo procesas, kurio metu nustatoma, kad teiginio t teisingumo reikšmė lygi 1, vadinamas teoremos t įrodymu.

Šis apibrėžimas nėra tikslus, nes lieka neapibrėžta žodžio „nustatoma“ („įsitikinama“, „parodoma“ ir pan.) reikšmė. Matematinėje logikoje pateikiamas įrodymo (išvedimo) sąvokos apibrėžimas pradedantiems matematikos studijas pernelyg abstraktus. Todėl tenka vadovautis „sveiku protu“, intuicija.

Nagrinėjant įrodymus, stengiantis visiškai suprasti įrodymo sąvoką, reikia išmokti gerai jausti skirtumą tarp pagrįsto ir nepagrįsto samprotavimo, išmokti skirti, kas yra įrodymo argumentai ir kas nėra. Kiekvienas teoremos įrodymas — tai įrodymo uždavinio sprendimas.

Reikia nepamiršti, kad teisingas mąstymas, nepriekaištingas teoremų įrodinėjimas paremtas logikos dėsniais ir taisyklėmis.

Gana dažni įrodymuose teisingos bei neteisingos išvados taisyklė, paprastas bei apibendrintas silogizmo dėsniai. Jeigu teorema t suformuluota pagal schemą „jeigu p , tai q “, t. y. $t \equiv (p \Rightarrow q)$, tai dažnai jos įrodymas vadinamas *tiesioginiu*.

Jeigu teorema t yra minėtos formos, o įrodinėjama viena iš jai ekvivalentių (1.12)–(1.14) formų remiantis 1 ar 3 teoremomis, tai toks teoremos įrodymo būdas vadinamas *netiesioginiu*. Tokius įrodymus dažnai pradedame žodžiais „Tarkime priešingai“. Tai reiškia, kad laikome teisingais teoremos sąlygą p ir teoremos išvados neiginį $\bar{q}$, t. y. laikome teisinga konjunkciją $p \wedge \bar{q}$. Įrodymas gali būti baigiamas įvairiai. Jei, pavyzdžiui, jį baigiame žodžiais „Gavome prieštaravimą teoremos sąlygai, todėl teiginys $p \Rightarrow q$ teisingas“, tai rėmėmės (1.3) dėsnio. Jeigu įrodymas baigiamas sakiniu „Tai ir reikėjo įrodyti“ – turime (1.9) dėsnį. Užbaigdami įrodymą fraze „Gautasis prieštaravimas ($p \wedge \bar{q}$) rodo, kad teorema $p \Rightarrow q$ yra teisinga“, remiamės (1.7) dėsnio.

Jeigu įrodinėjami teoremą netiesioginiu būdu rėmėmės (1.3) dėsnio, tai sakome, kad naudojomes kontrapozicijos dėsnio, o jei rėmėmės (1.7), tai sakome, kad taikėme prieštaros metodą (įrodymo eigoje gavome prieštaravimą).

Pavyzdžiai. 1. Tarkime, kad a ir b – sveikieji skaičiai. Jeigu sandauga ab yra lyginis skaičius, tai arba a , arba b yra lyginiai skaičiai.

S Įrodymas (netiesioginis, paremtas kontrapozicijos dėsnio). Sakykime, kad p yra teiginys „Sandauga ab yra lyginis skaičius“, o q – teiginys „Bent vienas iš skaičių a, b yra lyginis“. Taigi reikia įrodyti implikaciją $p \Rightarrow q$. Pagal de Morgano dėsnį $\bar{q}$ yra teiginys „ a ir b abu yra nelyginiai“ arba „ $a=2k+1$ ir $b=2r+1$ ($k, r \in \mathbb{Z}$)“. Iš čia išplaukia

$$ab = 2(2kr + k + r) + 1.$$

Pažymėję $2kr + k + r = m$, gauname $ab = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$). Bet tai ne kas kita kaip teiginys $\bar{p}$. Taigi įrodėme teiginį $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$. Pagal kontrapozicijos dėsnį $p \Rightarrow q$ yra teisingas teiginys.

(Čia vartojome jau iš mokyklinės matematikos žinomą užrašą $n \in \mathbb{Z}$, reiškiantį, kad n priklauso sveikųjų skaičių aibei $\mathbb{Z}$.)

2. Tarkime, kad a ir b – realieji skaičiai, $a \neq 0$. Lygtis $ax = b$ turi vienintelę šaknį.

Įrodymas (netiesioginis, paremtas (1.9) dėsnio). Įrodomąjį teiginį suformuluokime šitaip: jei k yra lygties $ax = b$ šaknis, tai $k = b/a$. Pažymėkime p teiginį „ c yra lygties $ax = b$ šaknis“, o $\bar{q}$ – teiginį „ c nelygus b/a “. Tada

$$ac = b \quad \text{ir} \quad c \neq b/a.$$

Lygybės $ac = b$ abi puses padauginę iš $1/a$ (tai galima, nes $a \neq 0$), gauname $c = b/a$. Taigi išvedėme teiginį $p \wedge \bar{q} \Rightarrow q$. Bėlieka remtis (1.9) dėsnio.

3. Lygtis $x^2 + 1 = 0$ neturi realiųjų šaknų.

Įrodysime šį teiginį prieštaros būdu. Žinome, kad $k^2 \geq 0$, kai k – bet koks realusis skaičius. Pažymėkime šį teiginį r . Teiginys $\bar{r} \Rightarrow r$ teisingas, nes teisingas teiginys (šiuo atveju r) išplaukia iš kiekvieno teiginio, taigi ir iš $\bar{r}$. Jeigu $\bar{r}$ yra tvirtinimas „ $k^2 + 1 = 0$ “, tai $k^2 = -1 < 0$ yra teiginys $\bar{r}$. Taigi teisinga implikacija $\bar{r} \Rightarrow r$. Vadinasi, $\bar{r} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$ yra teisingas teiginys. Taikome (1.7) dėsnį ir gauname teisingą teiginį r : „Lygtis $x^2 + 1 = 0$ neturi realiųjų šaknų“.

Uždavinys

12. Suformuluotas teoremas įrodykite naudodamiesi netiesioginio įrodymo schemomis. Nurodykite logikos dėsnius, kuriais remiatės įrodinėjami šias teoremas:

- 1) Jeigu $k_1 + k_2 = a$ ir $k_1 k_2 = b$, tai k_1 ir k_2 yra lygties $x^2 - ax + b = 0$ šaknys;
- 2) Jeigu tiesė l liečia apskritimą taške A , tai ji statmena apskritimo skersmeniui, einančiam per tašką A ;
- 3) Jeigu sveikųjų skaičių x ir y sandauga yra nelyginis skaičius, tai sveikieji skaičiai x ir y – nelyginiai;
- 4) Jeigu p yra natūrinio skaičiaus n mažiausias netrivialus daliklis, tai p – pirminis skaičius;
- 5) Trikampyje gali būti tik vienas kampas, ne mažesnis už 90° .

§9. Predikatinės formos

Priminsime, kad *predikatais vadinami teiginio formos sakiniai, kurių teisingumo reikšmių negalima nustatyti dėl juose esančių kintamųjų*. Tokie, pavyzdžiui, yra sakiniai:

$$P(x) - „3x + 2 > 0“,$$

$$Q(x) - „\lg x < 2“,$$

$$R(x) - „3x^2 + 4x - 3 = 0“,$$

$$T(x, y) - „x^2 + y^2 = 1“.$$

Loginėmis jungtimis „ne“, „arba“, „ir“, „jeigu ...“, „tada ir tik tada, kai“ jungiami ir sakiniai, kuriuose yra kintamųjų. Tokiu būdu gaunami nauji sakiniai su kintamaisiais. Pavyzdžiui, galime gauti sakinį „Ne $P(x)$ “, kurį skaitysime „Netiesa, kad $3x + 2 > 0$ “ arba „ $3x + 2 \leq 0$ “. Kitas toks sakiny su kintamaisiais būtų „ $Q(x) \vee R(x)$ “; jį skaitysime: „ $\lg x < 2$ arba $3x^2 + 4x - 3 = 0$ “. Pastarąjį sakinį vadiname *nelygybės ir lygybės visuma* ir rašome

$$\begin{cases} \lg x < 2, \\ 3x^2 + 4x - 3 = 0. \end{cases}$$

Sakiny $R(x) \wedge T(x)$ skaitomas: $3x^2 + 4x - 3 = 0$ ir $x^2 + y^2 = 1$. Šį sakinį vadiname *lygčių sistema* ir rašome:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ skaitome: jeigu $3x + 2 > 0$, tai $\lg x < 2$.

Pažymėję predikatus $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ ir pan., pagrindines predikatinės formas galime gauti vartodami loginių operacijų ženklus:

$$\overline{P(x)},$$

$$P(x) \vee Q(x),$$

$$P(x) \wedge Q(x),$$

$$P(x) \Rightarrow Q(x),$$

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x).$$

Kitas predikatinės formas galime gauti iš pagrindinių formų, pavartoję baigtinį skaičių simbolių, reiškiančių predikatus, logines operacijas bei skliaustus. Pavyzdžiui,

$$(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow R(x),$$

$$(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\overline{R(x)} \wedge T(x)) \quad (1.15)$$

yra predikatinės formos. Jeigu į tokias predikatinės formas vietoje simbolių $P(x)$, $Q(x)$ ir pan. įrašysime konkrečius predikatus, tai vėl gausime predika-

tus. Pavyzdžiui, jeigu $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ yra paragrafo pradžioje pažymėti predikatai, tai (1.15) predikatinė forma yra predikatas „Jeigu $3x+2>0$ ir $\lg x < 2$, tai $3x^2+4x-3=0$ “.

Pažymėsime, kad simboliais išreikšta forma yra tikslesnė, nes rašydami sakinį žodžiais nerašome skliaustų. Todėl parašytieji sakiniai gali būti nevienodai suprausti.

Pavyzdžiui, predikatai

$$\overline{P(x)} \Rightarrow (Q(x) \vee T(x)), \quad (1.16)$$

$$(\overline{P(x)} \Rightarrow Q(x)) \vee T(x) \quad (1.17)$$

žodžiais užrašomi vienodai –

$$„jeigu $3x+2 \leq 0$, tai $\lg x < 2$ “, arba „ $x^2+y^2=1$ “,$$

tuo tarpu jie skirtingi. Tikslus užrašas būtų toks:

$$(1.16): (3x+2 \leq 0) \Rightarrow \begin{cases} \lg x < 2, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

$$(1.17): ((3x+2 \leq 0) \Rightarrow (\lg x < 2)) \vee (x^2+y^2=1).$$

Įprasta predikatinę formą $P(x) \wedge Q(x)$ vadinti *predikatų* $P(x)$ ir $Q(x)$ *sistema* ir žymėti

$$\begin{cases} P(x), \\ Q(x). \end{cases}$$

Predikatinę formą $P(x) \vee Q(x)$ įprasta vadinti *predikatų* $P(x)$ ir $Q(x)$ *visuma* ir žymėti

$$\begin{cases} P(x), \\ Q(x). \end{cases}$$

Kai predikatai yra lygtys, jų konjunkcija vadinama lygčių sistema, o disjunkcija – lygčių visuma, kai predikatai – nelygybės, atitinkamai nelygybių sistema arba visuma.

Jau minėjome, kad kiekvienas predikatas apibrėžia aibę tų kintamojo (arba kelių kintamųjų) reikšmių, su kuriomis jis yra teisingas teiginys. Jeigu $P(x)$ – predikatas, tai aibę $A_P = \{x \mid P(x)\}$ galime vadinti predikato $P(x)$ *teisingumo reikšmių aibe*.

Jeigu $A_P = A_Q$, tai predikatai $P(x)$ ir $Q(x)$ vadinami *ekvivalenčiais* ir rašoma

$$P(x) \sim Q(x).$$

Pavyzdžiai. 1. Tarkime, kad $P(x)$ yra predikatas $3x+2>0$. Ieškodami jo teisingumo reikšmių aibės, sprendžiame šią nelygybę ir randame:

$$A_P = (-2/3, \infty).$$

2. Tarkime, kad $S(x, y)$ ir $V(x, y)$ yra šitokie predikatai:

$$S(x, y) \equiv \begin{cases} 3x+4y=5, \\ -x+y=6, \end{cases} \quad V(x, y) \equiv \begin{cases} 2x+5y=11, \\ 4x+3y=-1. \end{cases}$$

$$A_S = A_V = \left\{ -\frac{19}{7}, \frac{23}{7} \right\},$$

tai predikatai $S(x)$ ir $V(x)$ yra ekvivalentūs, kitaip sakant, tos lygčių sistemos yra ekvivalentišios.

Sprendžiant įvairias lygtis, nelygybes ar jų sistemas, ieškoma aibės, apibrėžiamos atitinkamu predikatu. Todėl svarbu mokėti nustatyti predikatų ekvivalentumą nežinant ieškomosios aibės. Tai leistų iš visų ekvivalentinių predikatų klasės išrinkti paprasčiausią, t. y. tokį, kurio apibrėžiamą aibę lengviausia rasti. Kadangi ekvivalentinių predikatų aibės sutampa, tai rastoji paprasčiausio predikato aibė ir bus ieškomojo pradinio predikato aibė (lygties, sistemos ir pan. sprendinių aibė).

Uždaviniai

13. Raskite aibes, apibrėžtas šiais predikatais:

1) $3x - 5 \leq 0$;

2) $4x^2 - 6x + 7 < 0$;

3) $3 + \lg x \geq 0$.

14. Nustatykite, ar ekvivalentišios predikatinės formos:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ x - y = 3 \end{cases}$ ir $\begin{cases} 3x + 2y = 4, \\ x + 4y = -2; \end{cases}$

2) $|2x + 1| = 3$ ir $x^2 + x - 2 = 0$;

3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$ ir $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + 3y = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \lg x = 1 \end{cases}$ ir $\begin{cases} x + y = 3, \\ \sin x = 0; \end{cases}$

5) $|3x - 5| > 4$ ir $3x^2 - 10x + 3 > 0$.

§10. Aibių algebra

Kaip žinome, aibę galima nusakyti nurodant jos elementų *požymį* arba išvardijant jos elementus. Abiem šiais būdais nustatytos aibės užrašomos šitaip:

$$A = \{ x_i^* | P(x) \},$$

$$B = \{ b_1, b_2, \dots, b_n \}.$$

Aibė gali būti apibrėžta nurodant jos pirmąjį elementą ir pateikiant taisyklę kitiems elementams rasti. Pavyzdžiui, taisyklė aibės

$$N_3 = \{ 0, 3, 6, 9, \dots \}$$

elementams rasti yra

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 3.$$

Paprastai šitaip apibrėžiamos aibės, kurių elementus galima sunumeruoti.

Aibės sąvoka yra viena iš pagrindinių matematikos sąvokų. Nesigilindami į jos apibrėžimą ir laikydami aibę visumą elementų, turinčių juos jungiančių požymių, pastebėsime, kad aibės sąvoka vartojama kiekvienoje matematinėje teorijoje. Kartais nevartojamas žodis „aibė“, tačiau be šios sąvokos išsiversti neįmanoma. Tad labai svarbu gerai mokėti iš turimų aibių konstruoti naujas aibes, t. y. mokėti aibių veiksmus ir pagrindines tų veiksmų savybes.

Aibės žymėsime didžiosiomis raidėmis, jų elementus – mažosiomis. Sakinį „ a priklauso aibei A (a yra aibės A elementas)“ užrašysime

$$a \in A.$$

Kai a nepriklauso aibei A (a nėra aibės A elementas), rašome

$$a \notin A, \text{ arba } a \notin A.$$

Aibės elementų skaičius gali būti labai įvairus. Aibę vadinsime *baigtine*, jei jos elementų skaičius baigtinis, ir *begaline*, jei jos elementų skaičius nėra baigtinis.

Pateiktuose pavyzdžiuose aibė B buvo baigtinė, o N_3 – begalinė.

Jeigu aibė yra apibrėžta ne išvardijant elementus, o kokia nors taisykle ar požymiu, tai galimas ir toks atvejis, kai ji neturės nė vieno elemento. Pavyzdžiui, tokia bus aibė D , kurios elementai – natūriniai skaičiai n , su kuriais $2^n - 1$ dalijasi iš 2. Aibė apibrėžta, bet akivaizdu, kad ji neturi nė vieno elemento. Tai – *tuščioji aibė*. Šiai aibei žymėti vartojamas ženklas $\emptyset$.

Jeigu kiekvienas aibės A elementas yra kartu ir aibės B elementas, tai sakoma, kad aibė A yra aibės B poaibis, o aibė B – aibės A viršaišis, ir rašoma

$$A \subset B, \text{ arba } B \supset A.$$

Pavyzdžiui, $\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$.

Remiantis poaibio apibrėžimu, kiekviena aibė A yra savo pačios poaibis, t. y. $A \subset A$. Tuščiąją aibę sutarta laikyti bet kurios kitos aibės poaibiu: $\emptyset \subset A$. Šie du aibės A poaibiai – pati aibė ir tuščioji aibė $\emptyset$ – vadinami *tiesioginiais*, o visi kiti aibės A poaibiai (jei jų yra) – *tiesioginiais poaibiais*. Akivaizdu, kad aibė, kurioje yra tik vienas elementas, neturi tiesioginių poaibių. Kartais matematinėje literatūroje simbolis $\subset$ vartojamas žymėti tik tiems poaibiems, kurie nesutampa su pačia aibe, o bendruoju atveju vartojamas ženklas $\subseteq$.

Nesunku patikrinti, kad sąryšis „yra poaibis“ turi šitokią savybę:

$$\text{jeigu } A \subset B \text{ ir } B \subset C, \text{ tai } A \subset C.$$

Taigi teisinga implikacija

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Sakysime, kad visi vienos aibės elementai skirtingi. Jeigu dvi aibės A ir B turi tuos pačius elementus, jas laikysime lygiomis ir rašysime $A=B$.

Pavyzdžiui, aibės $\{a, b, c\}$ ir $\{b, a, c\}$ yra lygios, o aibės $\{a, b\}$ ir $\{a, b, c\}$ nėra lygios (nesutampa).

Patogu ir taip apibrėžti aibių lygumą.

Jeigu aibė A yra aibės B poaibis, o aibė B yra aibės A poaibis, tai $A=B$.

Kadangi $A \subset B$, tai aibėje A nėra nė vieno elemento, nepriklausančio aibei B . Tą patį galima pasakyti ir apie aibę B . Vadinas, abiejų aibių elementai yra tie patys, t. y. $A=B$. Jeigu $A=B$, tai ir $A \subset B$, ir $B \subset A$. Todėl

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \equiv (A=B).$$

Norint įrodyti, kad aibės A ir B lygios, užtenka įrodyti teiginį: „Jeigu $a \in A$, tai $a \in B$, ir jeigu $a \in B$, tai $a \in A$ “.

Gvildendami konkretų tam tikros teorijos klausimą, niekada nesusiduriame su visomis galimomis aibėmis, o tik su tomis, kurios siejasi su nagrinėjamu dalyku. Todėl kiekvienu konkrečiu atveju, turėdami tam tikrą aibių rinkinį, galime kalbėti apie *universaliją aibę* I , kuri yra visų nagrinėjamų toje teorijoje aibių viršaišis.

Pavyzdžiui, nagrinėjant aibes, kurių elementai yra natūriniai skaičiai, universalioji aibė būtų visų natūrinių skaičių aibė $\mathbb{N}$; aibių, kurių elementai — geometrinės figūros, universalioji aibė būtų visų galimų geometrinių figūrų aibė.

Iš universaliosios aibės I sąvokos išplaukia, kad bet kuri kita aibė A (priklausanti nagrinėjamai aibių visumai) yra I poaibis.

Aibių sudėtis. Aibių A ir B suma, arba junginiu, vadiname aibę, sudarytą iš visų elementų, priklausančių bent vienai iš aibių A ir B . Aibių A ir B sumą žymime

$$A \cup B, \text{ arba } A+B.$$

Iš apibrėžimo išplaukia, kad aibių A ir B sumai priklauso visi tie elementai, kurie sudaro aibes A ir B , bet bendrieji tų aibių elementai į sumą įeina tik vieną kartą (pagal susitarimą visi aibės elementai turi būti skirtingi).

Štai keletas aibių sudėties pavyzdžių:

$$\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}.$$

$$\{a, b\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}.$$

$$\{x, y\} \cup \{u, v\} = \{x, y, u, v\}.$$

Aibių sudėtis atitinka teiginių disjunkciją. Disjunkcija $p \vee q$ skaitoma „ p arba q “. Aibių suma $A \cup B$ reiškia aibę, kurios elementai priklauso aibei A arba aibei B . Vartojant logikos simboliką, aibių sudėtį galima apibrėžti šitaip:

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}, \text{ arba } a \in A \cup B \equiv ((a \in A) \vee (a \in B)).$$

Toks patikslintas formalus apibrėžimas patogus įrodinėjant veiksmų savybes. Jis ypač praverčia, kai aibės apibrėžtos požymiais. Tada:

$$\text{kai } A = \{x | P(x)\} \text{ ir } B = \{x | Q(x)\},$$

$$A \cup B = \{x | P(x) \vee Q(x)\}. \quad (1.18)$$

Aibių sudėties savybės:

1. Jeigu $A \subseteq B$, tai $A \cup B = B$;
2. $A \cup B = B \cup A$ – komutatyvumo;
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – asociatyvumo;
4. $A \cup A = A$;
5. $A \cup \emptyset = A$;
6. $A \cup I = I$.

Paskutinės trys savybės yra pirmosios savybės išvados; jos gaunamos pastebėjus, kad $A \subseteq A$, $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq I$. Pirmosios trys aibių sudėties savybės akivaizdžios. Formaliai jas galima įrodyti naudojantis (1.18) apibrėžimu.

Aibių sudėties komutatyvumo ir asociatyvumo savybes nesunku apibendrinti bet kuriam dėmenų skaičiui. Todėl reiškiniuose, sudarytuose iš raidžių vartojant tik aibių sumos ženklą ir skliaustus, galima keisti skliaustų ir raidžių tvarką ir netgi visai praleisti skliaustus.

Aibių sumos apibrėžimą galima praplėsti bet kuriai aibių sistemai: n aibių $A_1, A_2, \dots, A_n$ suma vadiname aibę, sudarytą iš elementų, kurie įeina bent į vieną iš aibių A_k ; ją žymime

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

arba

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i.$$

Kelių aibių sumą taip pat galima užrašyti formule, analogiška (1.18).

Aibių daugyba. Aibių A ir B sankirta, arba sandauga, vadiname aibę, sudarytą iš aibių A ir B bendrųjų elementų; žymime

$$A \cap B, \text{ arba } AB.$$

Rasime tų pačių aibių, kurioms rašėme sumas, sankirtas.

$$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}.$$

$$\{a, b\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}.$$

$$\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset.$$

Aibių sankirta atitinka teiginių konjunkciją. Konjunkciją $p \wedge q$ skaitome „ p ir q “. Aibių sankirta $A \cap B$ reiškia aibę, kurios elementai priklauso ir aibei A , ir aibei B .

$$\text{Kai } A = \{x | P(x)\} \text{ ir } B = \{x | Q(x)\},$$

$$A \cap B = \{x | P(x) \wedge Q(x)\}.$$

Aibių daugybos savybės:

1. Jeigu $A \subseteq B$, tai $A \cap B = A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
5. $A \cap A = A$;
6. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
7. $A \cap I = A$.

Pirmosios dvi savybės išplaukia iš apibrėžimo, paskutinės trys – iš pirmosios savybės. Nesunkiai pagrindžiamos ir likusios dvi savybės. Įrodysime, pavyzdžiui, 4-ąją (daugybės distributyvumo sudėties atžvilgiu) savybę vartodami antruosius aibių operacijų ženklus.

$$\begin{aligned}
 (A + B)C &= \{a \mid (a \in A + B) \wedge (a \in C)\} = \\
 &= \{a \mid ((a \in A) \vee (a \in B)) \wedge (a \in C)\} = \\
 &= \{a \mid ((a \in A) \wedge (a \in C)) \vee ((a \in B) \wedge (a \in C))\} = \\
 &= \{a \mid (a \in AC) \vee (a \in BC)\} = \\
 &= AC + BC.
 \end{aligned}$$

Kaip ir aibių sudėties, aibių daugybos komutatyvumo ir asociatyvumo savybės galima apibendrinti bet kuriam aibių skaičiui. Aibių sankirtos apibrėžimą galima praplėsti bet kokiam aibių rinkiniui: n aibių $A_1, A_2, \dots, A_n$ sankirta vadiname aibę, sudarytą iš visų tų aibių bendrųjų elementų; ją žymime

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

arba

$$A_1 A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^n A_i.$$

Aibių atimtis. Aibių A ir B skirtumu vadiname aibę tų aibės A elementų, kurie nepriklauso aibei B ; žymime

$$A \setminus B.$$

Rasime jau nagrinėtų aibių skirtumus:

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3, 5, 7\} = \{2\}.$$

$$\{a, b\} \setminus \{a, b\} = \emptyset.$$

$$\{x, y\} \setminus \{u, v\} = \{x, y\}.$$

Iš skirtumo apibrėžimo išplaukia

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B). \quad (1.19)$$

Skirtumas $I \setminus A$ (raide I , kaip ir anksčiau, žymime universaliąją aibę) vadinamas *aibės A papildiniu* ir žymimas

$$\bar{A} = I \setminus A.$$

Pavyzdžiui, kai $I = (-\infty, \infty)$, o $A = [10, \infty)$, tai $\bar{A} = (-\infty, 10)$.

Kartais, kai $A \subset B$, aibė $B \setminus A$ vadinama *aibės A papildiniu iki aibės B* ir žymima $\bar{A}_B$. Akivaizdu, kad

$$\bar{A} = \bar{A}_I$$

ir

$$A \cup \bar{A}_B = B.$$

Pasinaudoję logikos simbolika, aibių atimtį galime užrašyti ir šitaip:

$$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}.$$

Kadangi

$$\begin{aligned}\bar{B} &= \{a \mid a \in I, a \notin B\} = \\ &= \{a \mid a \in \bar{B}\},\end{aligned}$$

tai teisinga tokia aibių atimties savybė:

$$1. A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$

Kitos aibių atimties savybės yra šitokios:

$$2. \text{Jeigu } A \subseteq B, \text{ tai } A \setminus B = \emptyset;$$

$$3. A \setminus \emptyset = A;$$

$$4. A \setminus A = \emptyset;$$

$$5. A \setminus I = \emptyset;$$

$$6. \text{Jeigu } A \cap B = \emptyset, \text{ tai } A \setminus B = A;$$

$$7. (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C);$$

$$8. (A \setminus B) \cup B = A \cup B.$$

Aibės papildinio radimo operacija turi šitokias savybes:

$$1. A \cup \bar{A} = I;$$

$$2. A \cap \bar{A} = \emptyset;$$

$$3. \bar{I} = \emptyset;$$

$$4. \bar{\emptyset} = I;$$

$$5. \bar{\bar{A}} = A.$$

Paskutinioji savybė rodo, kad aibės papildinio papildinys yra pati aibė. Aibių atimties 4–5 savybės yra 2-osios atimties savybės išvados. 2-oji ir 3-oji savybės išplaukia iš apibrėžimo. Įrodysime 7-ąją savybę.

Iš aibių daugybos komutatyvumo bei daugybos pirmosios savybės išplaukia

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap \bar{B}) \cap C = (A \cap C) \cap \bar{B} = (A \cap C) \setminus B.$$

Iš čia, pasinaudoję (1.19) išvada, gauname

$$\begin{aligned}(A \cap C) \setminus B &= (A \cap C) \setminus (B \cap (A \cap C)) = \\ &= (A \cap C) \setminus (B \cap C).\end{aligned}$$

Paminėsime dar dvi išvadas, išplaukiančias iš aibių sudėties apibrėžimo:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \bar{A}),$$

$$A \cup B = B \cup (A \setminus B) = B \cup (A \cap \bar{B}).$$

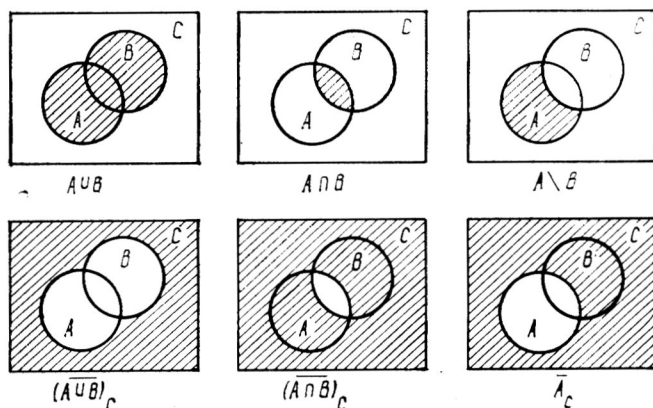
Vartodami logikos simboliką, aibės papildinio apibrėžimą galime užrašyti taip:

$$\bar{A} = \{a \mid a \notin A\}.$$

Tuo atveju, kai aibės A ir B apibrėžtos predikatais (kaip (1.18) formulėje), aibių skirtumas gali būti užrašytas šitaip:

$$A \setminus B = \{x \mid P(x) \wedge \bar{Q}(x)\}.$$

Dažnai patogų aibes vaizduoti grafiškai. Pavyzdžiui, 1 paveiksle skrituliais atvaizduotos aibės A ir B , o kvadratu — aibė C . Aibių A ir B suma, sankirta, skirtumas ir papildinys iki aibės C grafiškai atvaizduoti užbrūkšniuotais plotais.



1 pav.

Geometrinės figūros, vaizduojančios aibių operacijų rezultatus, vadinamos *Oilerio ir Veno diagramomis*. Remiantis šiomis diagramomis, lengvai galima patikrinti dvi lygybes, vadinamas *de Morgano dėsniais* (*de Morgano teoremais*):

$$1. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

$$2. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Šie aibių operacijų dėsniai visiškai analogiški aptartiesiems logikos de Morgano dėsniais, užrašytiems (1.5)–(1.6) formulėmis.

Uždaviniai

15. Apibrėždami aibę nurodytais trimis būdais, pateikite pavyzdžių:

- tuščiosios aibės,
- baigtinės aibės,
- begalinės aibės.

16. Parašykite visus aibės $A = \{1, 2, 3\}$ poaibius.

17. Raskite visus aibės $\{a, b, c, d\}$ poaibius.

18. Raškite 4 elementus turinčios aibės poaibių skaičių.
 19. Nustatykite, ar gali aibė turėti tik 3 tiesioginius poaibius.
 20. A, B, C, D – aibės. Kokia išvada išplaukia iš sąlygų

$$A \subset B, B \subset C, C \subset D, D \subset A?$$

21. Raskite:

- 1) aibių $\{2\}, \{3\}, \{4\}$ sumą,
- 2) aibių $\{13\}$ ir $\{31\}$ skirtumą, sankirtą,
- 3) aibių $\{2\}$ ir $\{1\}$ sumą, skirtumą, sankirtą.

22. Atlikite sudėties, daugybos ir atimties operacijas su aibėmis

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ ir } B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

23. Raskite aibes, apibrėžtas predikatais:

- 1) $\{x \mid (x-1)^2 = x^2 + 2x + 1\}$,
- 2) $\{x \mid 2 < x^2\}$,
- 3) $\{x \mid |x| > x - 2\}$,
- 4) $\{(x, y) \mid 2x + 4y = 1, 3x - 2y = 3\}$,
- 5) $\{(x, y) \mid |x| \leq 2, x + y = 3\}$.

24. Universalioji aibė $I = [-10, 10]$. Raskite šių aibių papildinius:

- 1) $A = [-3, 5]$, 2) $B = [-10, 1]$, 3) $C = (-1, 10]$, 4) $D = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, 5) $E = \{x \mid |x| \leq 3\}$.

25. Kokios išvados išplaukia iš sąlygų:

- 1) $A \cup B = \emptyset$, 2) $A \cap A = \emptyset$, 3) $A \setminus A = \emptyset$, 4) $\emptyset \setminus A = A?$

26. $A = \{1, 2, 3\}$. Raskite tokias aibes X ir Y , kad būtų

$$(A \cap X) \cup Y = \emptyset.$$

27. Ar teisingi teiginiai:

- 1) jeigu $A \setminus B = \emptyset$, tai $A \subset B$,
- 2) jeigu $A \setminus B = A$, tai $A \cap B = \emptyset$,
- 3) jeigu $A \setminus B = B \setminus A$, tai $A = B = \emptyset?$

28. Įrodykite de Morganio dėsnius trimis ir keturioms aibėms.

29. Raskite natūrinių skaičių aibės N papildinį iki sveikųjų skaičių aibės.

30–33 uždavinuose nenurodyta konkreti universalioji aibė I , bet kiekviename uždavinyje ji fiksuota.

30. A ir B yra aibės. Įrodykite, kad teiginiai

$$A \subset B, \bar{A} \supset \bar{B}, A \cup B = B, A \cap \bar{B} = \emptyset, A \cap B = A$$

ekvivalentūs.

31. A, B, C – aibės. Kada teisingos šios lygybės:

- 1) $A \cap B \cap C = A$,
- 2) $A \cup B \cup C = A?$

32. A, B, C – aibės. Supaprastinkite reiškinius:

- 1) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$,
- 2) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$,
- 3) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$.

33. Įrodykite (raidės reiškia aibes):

- 1) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$,
- 2) $A \cap B = A \setminus \bar{B} = B \setminus \bar{A}$,
- 3) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$,
- 4) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
- 5) $A \cup (B \setminus A) = B \cup (A \setminus B)$,
- 6) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
- 7) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
- 8) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
- 9) $A \setminus \bar{B} = A \cup (A \cap B)$,
- 10) $(A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = I$.

§11. Kvantoriai

Antrame paragrafe įvedę predikato sąvoką, nustatėme, kad iš predikato $P(x)$ teiginį $P(a)$ gausime įrašę vietoje x kokią nors konkrečią reikšmę $x=a$. Teiginius iš predikatų galima sudaryti ir kitu būdu – vartojant *kvantorius*. Pavyzdžiui, užrašykime teiginį:

aibėje A yra (egzistuoja) toks elementas x , su kuriuo $P(x)$ – teisingas teiginys.

Šį teiginį sutrumpintai galime užrašyti taip:

$$(\exists x \in A) P(x).$$

Tuo atveju, kai A yra universalioji aibė I , jos nerašome. Sutrumpintas užrašas bus šitoks:

$$(\exists x) P(x).$$

Ženklas $\exists$ vadinamas *egzistavimo kvantoriumi*.

Sakinys

su visais x iš aibės A teiginys $P(x)$ teisingas

sutrumpintai užrašomas taip:

$$(\forall x \in A) P(x).$$

Kaip ir pirmuoju atveju, jei aibė A yra universalioji, jos nerašome, taigi sutrumpintas užrašas yra

$$(\forall x) P(x).$$

Ženklas $\forall$ vadinamas *visuotinio kvantoriumi*.

Sakykime, $P(x)$ yra predikatas $x^2+2x-3=0$, o A – aibė $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$. Tada teiginiai

$$(\exists x \in A) x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (1.20)$$

$$(\forall x \in A) x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (1.21)$$

skaitomi šitaip:

atkarpoje $[-1, 1]$ yra tokia x reikšmė, su kuria $x^2+2x-3=0$ – teisingas teiginys;

su visomis x reikšmėmis iš atkarpos $[-1, 1]$ teiginys $x^2+2x-3=0$ yra teisingas.

Pakanka vidurinės mokyklos žinių norint nustatyti, kad (1.20) teiginys teisingas, o (1.21) – ne.

Kaip bet kuriam teiginiui, taip ir vartojant kvantorius sudarytiems teiginiams galima taikyti neigimo operaciją. Štai teiginį

$$(\exists x \in A) P(x)$$

skaitome: „Netiesa, kad aibėje A yra toks x , su kuriuo $P(x)$ būtų teisingas“. Taigi tokio x nėra, jis neegzistuoja. Simboliškai tą patį užrašysime vartodami egzistavimo kvantoriaus $\exists$ neiginį $\bar{\exists}$ (jį toliau vadinsime *neegzistavimo kvantoriumi*):

$$(\bar{\exists} x \in A) P(x)$$

Tą pačią mintį galima išreikšti ir kitaip. Iš tiesų, jeigu aibėje A nėra to-
kio elemento, su kuriuo teiginys $P(x)$ būtų teisingas, tai tuomet su visais ai-
bės A elementais teiginys $P(x)$ neteisingas. Pastarąją mintį galime išreikšti
taip:

$$(\forall x \in A) \overline{P(x)}.$$

Gavome tokį teiginį su egzistavimo kvantoriumi paneigimo dėsnį:

$$\overline{(\exists x \in A) P(x)} \equiv \begin{cases} (\bar{\exists} x \in A) P(x) \\ arba \\ (\forall x \in A) \overline{P(x)}. \end{cases}$$

Panašiai samprotaudami gauname ir šitokius teisingus teiginius:

$$\overline{(\forall x \in A) P(x)} \equiv \begin{cases} (\bar{\forall} x \in A) P(x) \\ arba \\ (\exists x \in A) \overline{P(x)}; \end{cases}$$

čia $\bar{\forall}$ – visuotinio kvantoriaus $\forall$ neiginys, skaitomas „ne su visais“.

Trumpai aptarsime kai kuriuos matematinės kalbos aspektus. Naudojan-
tis logikos dėsniais, galima gauti ir kitų sudėtinių teiginių neiginius. Pavyz-
džiui, paneigsime teiginį $p \Rightarrow q$. Pasinaudoję (1.1) formule, gauname

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \equiv (\bar{p} \vee q) \equiv (\bar{p} \wedge \bar{p}) \equiv (p \wedge \bar{q}). \quad (1.22)$$

Taigi „Netiesa, kad jeigu p , tai q “ reiškia „ p ir ne q “. Sugretinkime gautąjį
faktą su žinomu logikos dėsniu:

$$((p \wedge \bar{q}) \Rightarrow p) \equiv (p \Rightarrow q).$$

Remdamiesi (1.22) ekvivalencija, pastarąją formulę galime perrašyti taip:

$$(\overline{(p \Rightarrow q)} \Rightarrow \bar{p}) \equiv (p \Rightarrow q).$$

Todėl teoremos $p \Rightarrow q$ įrodymas, paremtas pastaruoju dėsniu ir pradėtas
žodžiais „Tarkime priešingai“, iš tikrųjų pradedamas teiginiui „Jeigu p , tai
 q “ priešinga prielaida. Panašiai pradedami ir tie įrodymai, kurie pagrįsti
(1.7)–(1.9) logikos dėsniais.

Kai įrodymas paremtas kontrapozicijos dėsniu $(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$, žodžiai
„Tarkime priešingai“ įrodymo pradžioje reiškia „Tarkime, kad ne q “. Todėl
norint visiškai suvokti netiesioginius įrodymus, reikia gerai žinoti, ką reiškia
žodžiai „Tarkime priešingai“ – ar „Tarkime, kad p ir ne q “, ar „Tarkime,
kad ne q “.

Matematinėje kalboje visuotinio kvantorius dažnai praleidžiamas, vie-
toje sakinio „su visais x $P(x)$ “ tiesiog sakoma $P(x)$. Pavyzdžiui, vietoje teigi-
nio „Su visais realiaisiais skaičiais a ir b teisinga $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ “ sa-
kome: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Panašiai trumpinamos ir teoremų formuluotės.

Pavyzdžiui, vietoje

$$(\forall x) P(x) \Rightarrow Q(x),$$

skaitomo „Jeigu $P(x)$, tai $Q(x)$ su visais x “, rašoma

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

ir skaitoma „Jeigu $P(x)$, tai $Q(x)$ “. Pastarasis sakinyss gali būti ir taip užrašytas: „Jeigu $a \in \{x \mid P(x)\}$, tai $a \in \{x \mid Q(x)\}$ “. Simbolinis šio sakinio užrašas būtų toks:

$$\{x \mid P(x)\} \subseteq \{x \mid Q(x)\}.$$

Panašiai vietoje

$$(\forall x) P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

($P(x)$ tada ir tik tada, kai $Q(x)$, imant visus x) rašome

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

ir atitinkamai trumpiau skaitome „ $P(x)$ tada ir tik tada, kai $Q(x)$ “. Šis sakinyss reiškia: „ $a \in \{x \mid P(x)\}$ tada ir tik tada, kai $a \in \{x \mid Q(x)\}$ “, arba

$$\{x \mid P(x)\} = \{x \mid Q(x)\}.$$

Matome, kad matematinėje kalboje galima tam tikra posakių įvairovė. Čia kartais slypi klaidų priežastys. Tad reikia gerai jausti tos įvairovės ribas, žinoti, kurie iš tų posakių logiškai ekvivalentūs, o kurie – ne.

Uždaviniai

34. Užrašykite žodžiais šiuos teiginius:

- 1) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) x + y = z$,
- 2) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) x - y = z$,
- 3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) xy = 0 \Rightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$,
- 4) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{Z}) 2^k = -n$.

Čia $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ – atitinkamai natūrinių, sveikųjų ir realiųjų skaičių aibės.

35. Vartodami kvantorius, užrašykite šiuos teiginius:

- 1) kad ir kokie būtų x , y , z , iš $x \cdot y = z$ išplaukia $y \cdot x = z$,
- 2) kiekvieno trikampio kampų suma lygi π ,
- 3) kad ir koks būtų natūrinis rodiklis $n > 1$, nėra tokio sveikąjo skaičiaus s , kad būtų $s^n = 3$.

36. Naudodamiesi kvantoriais $\exists$ ir $\forall$, iš predikatų $P(x)$ sudarykite teiginius ir tų teiginių neiginius, suformuluokite juos žodžiais ir nustatykite visų gautųjų teiginių teisingumo reikšmes, kai $P(x)$ yra:

- 1) $\lg xy = \lg x + \lg y$,
- 2) $|\sin x| \leq 1$,
- 3) $5x^2 - 4x + 3 \leq 0$,
- 4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

§12. Aibių Dekarto daugyba

Vienodiems objektams atskirti paprastai vartojame numerius. Pavyzdžiui, skirtingi numeriai priskirti vieno miesto troleibusų linijoms ir telefono abonentams, knygos puslapiams ir įstaigos kabinetams. Tačiau kartais objektui žymėti vieno numerio nepakanka ir tenka jam priskirti du numerius, du skaičius arba kokių kitokių ženklų porą. Pavyzdžiui, tiražo lentelėje kiek-

vienas bilietas žymimas dvejetu skaičių, kurių vienas rodo serijos numerį, kitas – bilieto numerį serijoje. Toks porų sudarymas atitinka aibių Dekarto daugybos operaciją, kurią ir apibrėšime.

Dviejų aibių A ir B Dekarto sandauga vadiname aibę dvejetų (arba porų) (a, b) , kuriuose a yra bet kuris aibės A elementas, b yra bet kuris aibės B elementas, ir žymime $A \times B$.

Pasinaudoję apibrėžimu, galime užrašyti:

$$(a, b) \in A \times B \equiv a \in A \wedge b \in B.$$

Dekarto sandauga pavadinta prancūzų matematiko *Renė Dekarto* (1596–1650), įvedusio koordinačių sistemą plokštumoje, vardu. Kartais Dekarto sandauga vadinama ir kitaip: *sandauga, tiesioginė sandauga, kombinatorinė sandauga*.

Pavyzdžiai. 1. Jeigu $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$, tai

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}.$$

2. Jeigu $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ – natūrinių skaičių aibė, tai $N \times N = \{(a, b)\}$ – aibė dvejetų (a, b) , a ir b – natūriniai skaičiai.

Dekarto sandauga $A \times A$ vadinama aibės A Dekarto kvadratu, ji kartais žymima A^2 .

Dekarto daugyba nėra nei komutatyvi, nei asociatyvi, bet ji turi šias distributyvumo savybes:

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2. $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
4. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;
5. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Įrodysime pirmąją iš jų, kitos savybės įrodomos analogiškai. $(a, b) \in (A + B) \times C \equiv a \in A + B \wedge b \in C \equiv (a \in A \vee a \in B) \wedge b \in C \equiv (a \in A \wedge b \in C) \vee (a \in B \wedge b \in C) \equiv (a, b) \in A \times C \vee (a, b) \in B \times C \equiv (a, b) \in (A \times C) + (B \times C)$.

Dekarto sandaugą galima apibendrinti didesniai aibių skaičiui.

Jeigu $A_1, A_2, \dots, A_n$ – bet kokios aibės, tai jų Dekarto sandauga vadiname aibę, sudarytą iš $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pavidalo (sutvarkytų) rinkinių, kur x_i nepriklausomai vienas nuo kito „perbėga“ visus aibės A_i elementus ($i = 1, 2, \dots, n$). Tokią sandaugą žymime

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n.$$

Pavyzdžiui, $\mathbf{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$ – trimatė vektorių-eilučių su realiomis komponentėmis erdvė.

Nesunku įsitikinti štai kuo: jeigu visos aibės A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) baigtinės ir kiekvienoje iš jų yra atitinkamai m_i elementų, tai Dekarto sandaugoje $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ yra $m_1 m_2 \dots m_n$ elementų. Kai bent viena iš aibių A_i begalinė, Dekarto sandauga taip pat turi neapibrėžtai daug elementų.

Pavyzdžiui, jeigu $A = \{1\}$, $B = \mathbf{R}$, tai aibė $A \times B = \{(1, y) \mid y \in \mathbf{R}\}$ yra begalinė. Geometrinis šios aibės vaizdas – tiesė, statmena ašiai x ir einanti per tašką su koordinatėmis $(1, 0)$.

Kadangi aibių Dekarto sandaugos elementai yra sutvarkyti aibių elementų rinkiniai, tai iš to išplaukia, kad du Dekarto sandaugos $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ elementai $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ir $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ lygūs tada ir tik tada, kai tų rinkinių atitinkami elementai lygūs: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Uždaviniai

37. Parašykite aibių A ir B Dekarto sandaugas, kai:

- 1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$,
- 2) $A = \{1\}$, $B = \{x, y, u, v\}$,
- 3) $A = B = \{x, y\}$,
- 4) $A = B = \mathbf{N}$,
- 5) $A = (0, 1)$, $B = (-1, 1]$.

38. Įrodykite aibių Dekarto daugybos 2–5 savybes.

39. Parašykite:

- 1) A^n , jei $A = \{\alpha\}$,
- 2) A^8 , jei $A = \{\alpha, \beta\}$,
- 3) $\mathbf{N}^8$.

§13. Binariai sąryšiai

Mokantis matematikos, tenka nagrinėti įvairių tos pačios aibės elementų arba skirtingų aibių elementų atitikties, priklausomybės, funkcijas. Geometrijoje nagrinėjama figūrų (pavyzdžiui, trikampių) panašumas, tiesių ir plokštumų lygiagretumas, tiesių (atkarpų) statmenumas. Visiems gerai žinomi skaičių sąryšiai: „mažiau“, „daugiau“, „dalijasi“ ir kt. Nagrinėjami ir įvairūs funkciniai sąryšiai (funkcijos). Pavyzdžiui, jeigu $y = x^2$, tai skaičiai -2 ir 4 susieti šiuo sąryšiu, o skaičiai 1 ir 3 nesusieti ($3 \neq 1^2$ ir $1 \neq 3^2$).

Sąryšis (atitikties, ryšis, priklausomybė) gali sieti du arba kelis tos pačios aibės ar skirtingų aibių elementus.

Sąryšis, siejantis du elementus, vadinamas binariu.

Jeigu sąryšis sieja tos pačios aibės elementus, tai jis vadinamas aibės elementų sąryšiu. Jeigu sąryšis sieja aibių A ir B elementus, jis vadinamas tų aibių elementų sąryšiu. Pirmuoju atveju dar sakoma – sąryšis aibėje A , antruoju – sąryšis tarp aibių A ir B . Šiek tiek plačiau aptarsime tik binarius sąryšius.

Dviejų elementų sąryšis – tai tam tikras bendras požymis, jungiantis tuos elementus.

Pavyzdžiai. 1. Natūrinių skaičių dalumas – dalumo sąryšis. Natūrinis skaičius m dalijasi iš natūrinio skaičiaus n , kai galima rasti tokį natūrinį skaičių k , su kuriuo teisinga lygybė $m = n \cdot k$. Tuo atveju rašoma $n \mid m$; simbolis $\mid$ yra dalumo sąryšio ženklas. Taigi šiuo sąryšiu susietos skaičių poros (nk, n) .

2. Sąryšis „mažiau“ natūrinių skaičių aibėje. Natūrinis skaičius n mažesnis už natūrinį skaičių m , kai yra toks natūrinis skaičius k , su kuriuo teisinga lygybė $m = n + k$. Tuo atveju rašome $n < m$; simbolis $<$ – sąryšio „mažiau“ ženklas.

3. Tiesių statmenumo sąryšis. Tiesė a statmena tiesei b , jei jų susikirtimo kampas yra status; žymima $a \perp b$.

Visuose nagrinėtuose pavyzdžiuose, apibrėžiant binarį sąryšį, iš visų nagrinėjamų elementų buvo išskirti tie dvejetainiai, kurie sudaryti iš elementų, susietų atitinkamu sąryšiu. Štai antrajame pavyzdyje iš aibės $N \times N$ išskirtas poaibis

$$B = \{ (n, n+k) \mid n \in N, k \in N \}.$$

Ir kituose pavyzdžiuose panašiai galima išskirti sąryšiais susietų elementų poaibius. Ir atvirkščiai, koks nors aibės A Dekarto kvadrato poaibis nusako binarį sąryšį toje aibėje.

Pavyzdžiai rodo, kad tiksliai dar neapibrėžtą, tik intuityviai suvokiamą binarį sąryšį aibėje, pasitelkus Dekarto sandaugą, galima nagrinėti kaip konkretų matematinį objektą.

Aibių A ir B Dekarto sandaugos $A \times B$ poaibis yra binaris sąryšis tarp aibių A ir B elementų.

Atskiru atveju, kai $A=B$, apibrėžiamas aibės A elementų sąryšis.

Aibės A Dekarto sandaugos su savimi (Dekarto kvadrato) A^2 poaibis yra aibės A elementų binaris sąryšis.

Jeigu nurodytas koks nors aibių A ir B (atskiru atveju gali būti $A=B$) elementus siejantis binaris sąryšis σ , tai nurodytas ir požymis, kuriuo remiantis galima nustatyti, ar kokie nors konkretūs elementai a ($a \in A$) ir b ($b \in B$) susieti šiuo sąryšiu. Jeigu susieti, tai rašoma $a\sigma b$, arba $(a, b) \in \sigma$. Jeigu tie elementai sąryšiu σ nesusieti, rašoma $a \bar{\sigma} b$, arba $(a, b) \notin \sigma$. Pavyzdžiui, jeigu

$$(a, b) \in \{ (n, n+k) \mid n \in N, k \in N \},$$

tai $a < b$.

Du binariai sąryšiai σ_1 ir σ_2 , siejantys aibių A ir B elementus, vadinami vienodais (sutampančiais, lygiais), jei aibės $\sigma_1 \subset A \times B$ ir $\sigma_2 \subset A \times B$, apibrėžiančios tuos sąryšius, sutampa: $\sigma_1 = \sigma_2$.

Apibrėžiant binarį sąryšį tarp aibių A ir B elementų, nekeliami jokių reikalavimų pačioms aibėms.

Uždavinys

40. Raskite visus aibių $A = \{1, 2\}$ ir $B = \{x, y\}$ elementų sąryšius (naudokitės Dekarto sandauga).

§14. Funkciniai sąryšiai. Ekvivalenčios aibės

Aptarsime tuos aibių A ir B elementų sąryšius, kurie vadinami *funkcijomis* – *funkcinius sąryšius*.

Sąryšis $f \subset A \times B$ tarp aibių A ir B elementų vadinamas funkcija (funkciniu sąryšiu), jei

$$((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

Taigi funkciniam sąryšyje, esant lygiems pirmiesiems porų elementams, lygūs ir antrieji.

Pavyzdžiui, jeigu $A=B=\mathbb{N}$ ir $f=\{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$, tai sąryšis f yra funkcija, nes antroji susietų skaičių poros komponentė vienareikšmiškai apibrėžiama pirmąja.

Funkcijos $f \subset A \times B$ apibrėžimo sritimi vadinama aibė

$$D_f = \{x \mid x \in A \wedge (\exists y \in B)(x, y) \in f\}.$$

Funkcijos $f \subset A \times B$ reikšmių sritimi vadinama aibė

$$E_f = \{y \mid y \in B \wedge (\exists x \in A)(x, y) \in f\}.$$

D_f yra sąryšio f elementų porų pirmųjų elementų, o E_f – antrųjų elementų aibės.

Nagrinėtame pavyzdyje $A=B=\mathbb{N}$, $f=\{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$, D_f yra natūrinių skaičių aibė $\mathbb{N}$, o E_f – natūrinių skaičių kvadratų aibė. Sąryšyje $g=\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ atitinkamai gauname $D_g=\mathbb{R}$, $E_g=[-1, 1]$.

Pateiktasis funkcijos apibrėžimas kiek neįprastas, tačiau labai konkretus. Pagal jį – funkcija yra tam tikru būdu sudaryta aibė, t. y. tam tikras aibių A ir B Dekarto sandaugos poaibis. Taigi funkcijos lygios, kai jų aibės sutampa.

Reiktų atkreipti dėmesį, kad pateiktoje terminologijoje, kai $f \subset A \times B$ yra funkcija, užrašai

$$x f y, (x, y) \in f, y = f(x), f(x) = y$$

reiškia vieną ir tą patį – x ir y susieti funkcija f , x yra funkcijos f argumento reikšmė, y – funkcijos f reikšmė. Taip pat sakoma, kad y yra funkcijos f reikšmė taške x .

Funkcijos įvairiais aspektais nagrinėjamos matematinėje analizėje, funkcijų teorijoje, kitose matematinėse teorijose. Pateiksime tam tikrą funkcijų klasifikaciją, kuria toliau remsimės.

Funkcija $f \subset A \times B$ vadinama injekcija, jei:

- 1) $D_f = A$,
- 2) $E_f \subset B$,
- 3) $((x, y) \in f \wedge (z, y) \in f) \Rightarrow x = z$.

Funkcija $f \subset A \times B$ vadinama surjekcija, jei:

- 1) $D_f = A$,
- 2) $E_f = B$.

Funkcija $f \subset A \times B$ vadinama bijekcija, jei:

- 1) $D_f = A$,
- 2) $E_f = B$,
- 3) $((x, y) \in f \wedge (z, y) \in f) \Rightarrow x = z$.

Įsidėmėtina, kad į funkcijos apibrėžimą įeina trys faktoriai: aibė A , aibė B ir požymis (savybė, taisyklė, formulė ir pan.), kuris apibrėžia sąryšį tarp aibių A ir B elementų. Gana įprasta funkciją tapatinti su taisykle, kuri apibrėžia tą sąryšį. Tačiau toks funkcijos apibrėžimas neišsamus.

Pateiktieji funkcijų tipai – injekcija, surjekcija, bijekcija – neapima visų galimų funkcijų.

Pavyzdžiai. 1. Sakyme, $f_1 = \{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ir $D_{f_1} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $E_{f_1} = [-1, 1]$ $E_{f_1} \neq \mathbb{R}$, taigi f_1 nėra surjekcija. Kadangi $(0, 0) \in f_1$ ir $(\pi, 0) \in f_1$, o pirmieji šių porų elementai nelygūs esant lygiems antriesiems, tai f_1 nėra ir injekcija.

2. Funkcija $f_2 = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in \mathbb{R}, y \in [-1, 1]\}$ yra surjekcija, bet nėra injekcija.

3. Funkcija $f_3 = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [0, \pi/2], y \in [-1, 1]\}$ yra injekcija, bet nėra surjekcija, nes $D_{f_3} = [0, \pi/2] \neq [-1, 1]$.

4. Funkcija $f_4 = \{(x, y) \mid y = \sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2], y \in [-1, 1]\}$ yra aibių $[-\pi/2, \pi/2]$ ir $[-1, 1]$ bijekcija.

Dažnai tuo atveju, kai $D_f = A$ ir $E_f \subset B$, funkcija $f \subset A \times B$ žymima

$$f: A \rightarrow B \quad \text{arba} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Jeigu tarp aibių A ir B galima apibrėžti bent vieną bijekciją, tai tos aibės vadinamos ekvivalenčiomis ir rašoma

$$A \sim B.$$

Jeigu dvi baigtinės aibės yra ekvivalenčios, tai jų elementų skaičius vienodas. Iš tikrųjų tarp tokių aibių galima nustatyti bijekciją – kiek viena aibė turi elementų, tiek turi turėti ir antroji.

Pavyzdžiai. 1. Tarkime, kad A ir B yra aibės:

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{ir} \quad B = \{2, 3, 4, 5\}.$$

Nustatysime tarp šių aibių elementų sąryšį f šia priskyrimo taisykle (priskyrimo, arba sąryšio, ženklu laikysime $\leftrightarrow$):

$$a \leftrightarrow 5, b \leftrightarrow 3, c \leftrightarrow 2, d \leftrightarrow 4.$$

Žymėdami šią taisyklę kaip funkciją, galime rašyti $f(a) = 5$, $f(b) = 3$ ir t. t. Matome, kad sąryšio f apibrėžimo sritis D_f sutampa su aibe A , o funkcijos f reikšmių sritis R_f – su aibe B . Taigi šis sąryšis yra surjekcija. Kadangi priskyrimo taisykle sudarytos poros

$$(a, 5), (b, 3), (c, 2), (d, 4) \tag{1.23}$$

ir tarp jų nėra porų, turinčių lygius antruosius elementus, tai teisinga 3-oji injekcijos (taip pat bijekcijos) sąlyga.

Taip apibrėžta funkcija yra kartu ir injekcija, ir surjekcija, taigi ir bijekcija. Taip pat akivaizdu, kokių aibių A ir B Dekarto sandaugos poaibių apibrėžiama ši funkcija. Tai poaibis, kurį taip pat galima žymėti raide f ir kurio elementai sutampa su (1.23). Aibių A ir B Dekarto sandauga šiuo atveju turės 16 elementų; be išvardytųjų, dar poras $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(a, 4)$, $(b, 2)$ ir kt.

Akivaizdu, kad ši atsitiktinai parinkta priskyrimo taisyklė nėra vienintelis galimas bijekcijos nustatymo būdas.

2. Paprastą injekcijos, kuri nebūtų surjekcija, pavyzdį gautume paėmę vietoje aibės A jos poaibį $A_1 = \{b, c, d\}$, vietoje poaibio, sudaryto iš (1.23) porų, — aibių A_1 ir B Dekarto sandaugos $A_1 \times B$ poaibį

$$\{(b, 3), (c, 2), (d, 4)\}.$$

Kadangi taip nusakytos funkcijos reikšmių sritis nesutaps su aibe B (E_f neturi elemento 5), tai f nebus surjekcija, tačiau ji bus injekcija.

3. Pažymėję B_1 aibę $\{2, 3\}$, pateiksime surjekcijos, kuri nėra injekcija, pavyzdį, apibrėždami aibių A ir B_1 elementų atitiktį šitaip:

$$a \leftrightarrow 2, b \leftrightarrow 2, c \leftrightarrow 2, d \leftrightarrow 3.$$

Čia negalioja 3-oji injekcijos sąlyga — keliems aibės A elementams priskirtas vienas ir tas pats aibės B_1 elementas.

4. Aibių A ir B Dekarto sandaugos poaibis, kurį sudaro elementai

$$(a, 2), (a, 3), (b, 2), (c, 4), (d, 5),$$

apibrėžia tam tikrą šių aibių elementų sąryšį, bet šis sąryšis nėra funkcija, nes čia negalioja pagrindinės funkcijos apibrėžimo sąlygos (neturi būti porų su vienodomis pirmosiomis porų komponentėmis ir skirtingomis antrosiomis).

Kalbėti apie begalinių aibių elementų skaičių nėra prasmės. Tuo atveju ekvivalenčioms aibėms apibūdinti įvedama *aibių galios* sąvoka.

Sakoma, kad *ekvivalenčios aibės yra vienodos galios*.

Vadinasi, aibės galia suprantama tai, kas yra *bendra* visoms tarp savęs ekvivalenčioms aibėms. Aibės galiai žymėti vartojamas simbolis Card .

Nesunku suvokti, kad visoms tarp savęs ekvivalenčioms baigtinėms aibėms bendra — jų elementų skaičius. Tad baigtinių aibių galia laikomas jų elementų skaičius, taigi tuščiosios aibės galia lygi 0. Pavyzdžiui,

$$\text{Card } \{1, 3\} = \text{Card } \{a, b\} = 2,$$

$$\text{Card } \{x\} = \text{Card } \{0\} = 1,$$

$$\text{Card } \emptyset = 0.$$

Jeigu aibė A yra aibės B poaibis, tai aibės A galią laikome ne didesne už aibės B galią.

Iš visų begalinių aibių savo paprastumu išsiskiria natūrinių skaičių aibė N . Aibės, ekvivalenčios natūrinių skaičių aibe, pasižymi tuo, kad jų elementus galima tam tikru būdu numeruoti, skaičiuoti. Tokios aibės vadinamos *suskaičiuojamomis (skaičiosiomis)*.

Suskaičiuojamos aibės galia laikoma mažiausia iš visų begalinių aibių galių. Tokį pasirinkimą pateisina nesunkiai įrodomas faktas, kad bet kuri begalinė aibė turi poaibį, ekvivalentų natūrinių skaičių aibe.

Nesunku įrodyti, kad sveikųjų skaičių aibė Z ir racionaliųjų skaičių aibė Q yra ekvivalenčios natūrinių skaičių aibe. Pavyzdžiui, aibių Z ir N bijekciją galima nustatyti tokiu būdu: priskirkime teigiamam sveikajam skaičiui a natūrinį skaičių $2a$, neigiamam sveikajam skaičiui $-a$ — natūrinį skaičių $2a+1$, sveikajam skaičiui 0 — natūrinį skaičių 1 .

Bijekcijos nustatymas tarp bet kurios aibės A ir natūrinių skaičių aibės N yra ne kas kita, kaip aibės A elementų numeravimas. Taigi suskaičiuojamą aibę galime apibrėžti kaip tokią begalinę aibę, kurios elementus galima sunumeruoti (t. y. nustatyti taisyklę, kuria remdamiesi galėtume rasti bet kurio aibės A elemento numerį).

Begalinės aibės, neekvivalenčios natūrinių skaičių aibe, vadinamos *nesuskaičiuojamomis (neskaičiosiomis)*. Tokia yra (kaip vėliau matysime) rea-

lijų skaičių aibė R . Jos galia vadinama *kontinuumu*. Viena iš matematikos problemų yra vadinamoji *kontinuumo hipotezė* – aibė, kurios galia didesnė už suskaičiuojamos aibės galią ir mažesnė už kontinuumo galią, neegzistuoja.

Iš pačios kontinuumo hipotezės formuluotės aišku, kad iki šiol nerasta tokios aibės, kurios galia būtų didesnė už aibės N galią, bet mažesnė už aibės R galią. Tačiau žinoma, kaip sukonstruoti aibę, kurios galia būtų didesnė už bet kokios pasirinktos aibės galią. Galima įrodyti, kad aibės A poaibių aibės galia yra didesnė už aibės A galią.

Šis teiginys gana akivaizdus imant baigtines aibes. Jeigu aibė A turi n elementų, tai tiek pat ji turi ir poaibių po vieną elementą. Jeigu $n > 1$, tai aibė A turi poaibių ir su 2, 3, ..., n elementų. Jeigu aibė A netuščia, tai skirtingi poaibiai yra tuščioji aibė ir visa aibė A , tad aibės A poaibių yra daugiau negu jos elementų. Vadinasi, didžiausios galios aibė neegzistuoja – kad ir kokią imtume aibę A , galėsime sudaryti dar didesnės galios aibę (pavyzdžiui, aibės A poaibių aibę).

Begalinės aibės *ekvivalenčios kuriam nors savo tiesioginiam poaibiui*. Aibių teorijoje ši savybė laikoma begalinės aibės apibrėžimu, t. y. aibė vadinama begaline, jei ji ekvivalenti savo tiesioginiam poaibiui.

Uždaviniai

41. Parinkite aibes A ir B taip, kad funkcija

$$f = \{(x, y) | y = \cos x, x \in A, y \in B\}$$

būtų šių aibių: 1) surjekcija, 2) injekcija, 3) bijekcija.

42. Nustatykite, kurios iš funkcijų $f: A \rightarrow B$, aprašytų formulėmis:

- 1) $y = \sin x, y \in B = [-2, 2], x \in A = [0, \pi],$
- 2) $y = x^3, y \in B = S, x \in A = N,$
- 3) $y = x^2, y \in B = [0, 9], x \in A = [0, 3],$
- 4) $y = 0, y \in B = \emptyset, x \in A = N,$

yra surjekcijos, injekcijos, bijekcijos?

43. Raskite, keliais būdais galima nustatyti aibės $A = \{a, b, c\}$ surjekciją ir injekciją aibėje $B = \{1, 2, 3\}$.

44. Nustatykite aibių N ir Z bijekciją kitu būdu negu šio paragrafo pavyzdyje.

45. Raskite šių aibių galią:

- 1) $A = \{n | n \in N, n^2 < 1000\},$
- 2) $B = \{n | n \in N, 2^n = n\},$
- 3) $C = \emptyset + \emptyset + \emptyset + \emptyset,$
- 4) $D = \{n | n \in N, n = 2^k\},$
- 5) E – aibė trupmenų, kurių skaitiklis 1,
- 6) $F = \{10, 11, 12, 13, 14, \dots\},$
- 7) $G = N \setminus (A \cup B \cup C);$

čia A, B, C – šiame uždavinyje apibrėžtos aibės, N – natūrinių skaičių aibė.

46. Parinkite baigtines aibes A ir B taip, kad būtų:

- 1) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A,$
- 2) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B,$
- 3) $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card } A,$
- 4) $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card } B,$
- 5) $\text{Card}(A \setminus B) = 0,$
- 6) $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card } A \cdot \text{Card } B,$
- 7) $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card } A.$

§15. Ekvivalentumo ir tvarkos sąryšiai

Šiame paragrafe trumpai apžvelgsime du aibės sąryšių tipus, labai svarbius matematikai: *ekvivalentumo* ir *tvarkos* sąryšius. Be šių sąvokų būtų neįmanoma matematinė analizė ir daugelis kitų matematikos teorijų.

Pirmiausia aptarsime keletą sąryšių aibėje savybių.

Aibės A elementų sąryšis $\sigma \subset A \times A$ vadinamas refleksyviu, jei kiekvienas aibės A elementas a šiuo sąryšiu susietas su savimi:

$$(\forall a \in A) (a, a) \in \sigma.$$

Yra refleksyvių ir nerefleksyvių sąryšių. Pavyzdžiui, trikampių panašumas, natūrinių skaičių dalumas – refleksyvieji sąryšiai. Tačiau tiesių statmenumas, sąryšis „mažiau“ natūrinių skaičių aibėje nėra refleksyvūs sąryšiai.

Aibės A elementų sąryšis $\sigma \subset A \times A$ vadinamas simetriniu, jei kiekvieną aibės A elementų porą a, b , susietą sąryšiu σ , atitinka pora b, a , taip pat susieta tuo pačiu sąryšiu:

$$(\forall (a, b) \in \sigma) (b, a) \in \sigma.$$

Tiesių lygiagretumas, jų statmenumas, trikampių panašumas, skaičių lygumas – tai vis simetriniai sąryšiai. Natūrinių skaičių dalumas, sąryšis „mažiau“ nėra simetriniai.

Aibės A elementų sąryšis $\sigma \subset A \times A$ vadinamas tranzityviu, jei elementams a ir b bei b ir c esant susietiems tuo sąryšiu, susieti ir elementai a ir c :

$$(\forall (a, b) \in \sigma, (b, c) \in \sigma) (a, c) \in \sigma.$$

Tranzityviųjų sąryšių pavyzdžiai: tiesių lygiagretumas, trikampių panašumas, sąryšis „mažiau“ aibėje N . Tiesių statmenumas jau nėra tranzityvus: jeigu plokštumoje yra tokios trys tiesės a, b ir c , kad a statmena b , o b statmena c , tai tiesės a ir c bus ne statmenos, o lygiagrečios.

Sakoma, kad aibės A elementų sąryšis $\tau \subset A \times A$ turi trichotomijos savybę, jei su kiekviena aibės A elementų pora (a, b) teisingas vienas ir tikrai vienas iš šių teiginių:

- 1) $(a, b) \in \tau$,
- 2) $(b, a) \in \tau$,
- 3) $a = b$.

Skaičių aibėse žinomi sąryšiai „mažiau“, „daugiau“ pasižymi trichotomijos savybe. Dalumo sąryšis natūrinių skaičių aibėje šios savybės neturi nes, pavyzdžiui, nei 5 dalijasi iš 2, nei 2 iš 5, nei 2 lygu 5.

Aibės A elementų sąryšis, kuris yra refleksyvus, simetrinis ir tranzityvus, vadinamas ekvivalentumo sąryšiu.

Ekvivalentumo sąryšiai yra trikampių panašumas, natūrinių skaičių lygumas. Tiesių statmenumas, sąryšis „mažiau“ skaičių aibėse nėra ekvivalentumo sąryšiai.

Jeigu aibėje A apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis ir a yra kuris nors aibės A elementas, tai visumą tų aibės A elementų, kurie susieti su a tuo sąryšiu vadiname *ekvivalentumo klase* ir žymime K_a .

4 teorema. *Bet kurios dvi ekvivalentumo klasės arba sutampa, arba neturi bendrų elementų.*

Įrodymas. Tarkime, kad aibėje A apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis σ . Jeigu ekvivalentumo klasės K_a ir K_b turi bendrą elementą g , tai iš priklausomybių $(a, g) \in \sigma$ ir $(g, b) \in \sigma$ bei tranzityvumo savybės išplaukia $(a, b) \in \sigma$. Taigi $a \in K_b$ ir kartu $b \in K_a$. Gauname $K_a \subset K_b$ ir $K_b \subset K_a$. Taigi $K_a = K_b$.

Kadangi kiekvienas aibės A elementas a priklauso klasei K_a , tai aibė, kurioje apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis, suskirstoma į nesikertančias ekvivalentumo klases; jų skaičius gali būti baigtinis arba begalinis.

Pavyzdžiui, trupmenų lygumo sąryšis $(a/b \text{ ir } c/d \text{ laikome lygiomis, jei } ad=bc, \text{ trupmenų vardikliai } b \text{ ir } d \text{ nelygūs } 0)$ yra ekvivalentumo sąryšis aibėje Q . Tuo nesunku įsitikinti patikrinus visas ekvivalentumo sąryšio sąlygas. Šis sąryšis suskirsto aibę Q į be galo daug ekvivalentumo klasių, kurių kiekvienoje – be galo daug lygių trupmenų, užrašomų skirtingais būdais. Pavyzdžiui,

$$K_{1/2} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-1}{-2}, \frac{2}{4}, \frac{-2}{-4}, \frac{3}{6}, \dots \right\},$$

$$K_3 = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{-3}{-1}, \frac{6}{2}, \frac{-6}{-2}, \frac{9}{3}, \dots \right\}.$$

Aibė klasių, į kurias suskirstoma aibė A pagal ekvivalentumo sąryšį σ , vadinama faktoraibe ir žymima A/σ .

Toliau nagrinėsime *tiesinės tvarkos sąryšį*.

Aibės elementų sąryšis vadinamas tiesinės tvarkos sąryšiu, jei jis yra tranzityvus ir turi trichotomijos savybę.

Aibė, kurioje apibrėžtas tiesinės tvarkos sąryšis $\tau \subset A \times A$, vadinama *tiesiškai sutvarkyta aibe*. Baigtinę tiesiškai sutvarkytą aibę kartais vadinsime trumpiau — *sutvarkytąja aibe*.

Tiesinės tvarkos sąryšiai — sąryšis „mažiau“ realiųjų skaičių aibėje, sąryšis „taškas B yra į dešinę nuo taško A “ horizontaliosios tiesės taškų aibėje.

Jeigu aibės elementai a, b susieti tvarkos sąryšiu τ :

$$a \tau b,$$

tai sakoma, kad elementas a eina prieš elementą b arba elementas b eina po elemento a .

Tiesiškai sutvarkytos aibės elementus rašome taip, kad tie elementai, kurie eina po elemento a , būtų parašyti į dešinę nuo a . Išraišką $\{a, b, c\}$ galima laikyti sutvarkyta trijų elementų a, b, c aibe, kurioje elementas b eina po elemento a , o elementas c — po b . Tą pačią aibę galima sutvarkyti dar penkiais būdais:

$$\{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Sutvarkytos aibės elementas, prieš kurį nėra jokių elementų, vadinamas *pirmuoju* elementu, elementas, po kurio nėra nė vienas elementas, vadinamas *paskutiniu*. Bet kuri tiesiškai sutvarkyta baigtinė aibė turi pirmąjį ir paskutinį elementą. Begalinėje sutvarkytoje aibėje pirmasis ar paskutinis elementas gali būti, bet gali ir nebūti. Pavyzdžiui, neigiamų sveikųjų skaičių aibė, sutvarkyta sąryšio „mažiau“ atžvilgiu, turi paskutinį elementą, bet neturi pirmojo:

$$\{\dots -4, -3, -1\}.$$

Sutvarkytosios aibės (A, τ) elementas b , kuris eina po elemento a , bet prieš elementą c , vadinamas *esančiu tarp elementų a, c* . Šiuo atveju žymime

$$a \tau b \tau c.$$

Visuma elementų, esančių tarp elementų a ir b , vadinama *atviroju intervalu* ir žymima (a, b) . Vadovėliuose galima rasti ir anksčiau vartotą atvirojo intervalo žymėjimą $]a; b[$.

Aibė, kuri gaunama prie atvirojo intervalo (a, b) prijungus jo galus — elementus a ir b , vadinama *uždaruju intervalu*, arba atkarpa, ir žymima $[a, b]$ (ankstesnis žymėjimas $[a; b]$).

Elementai a, b vadinami *gretimais*, jeigu tarp jų nėra jokio kito elemento.

Sutvarkytoji aibė vadinama *tirštąja*, jeigu imant kiekvieną jos elementų porą a, b galima rasti trečią elementą, esantį tarp a ir b .

Nesunku įsitikinti, kad natūrinių ir sveikųjų skaičių aibės nėra tirštos, o racionalųjų ir realiųjų skaičių aibės tirštos.

Sutvarkytoji aibė, kurioje visiems jos elementams, išskyrus pirmąjį ir paskutinį, galima nurodyti du gretimus elementus, vadinama *diskrečiąja*. Pirmasis ir paskutinis diskrečiosios aibės elementas turi tik po vieną gretimą elementą.

Akiivaizdu, kad natūrinių ir sveikųjų skaičių aibės yra diskrečios.

Baigtinę aibę galima taip sutvarkyti, kad ji būtų diskreti, turėtų pirmąjį ir paskutinį elementus.

Aibė vadinama *visiškai sutvarkyta*, jeigu bet kuris jos poaibis turi pirmąjį elementą.

Natūrinių skaičių aibė yra visiškai sutvarkyta sąryšio „mažiau“ atžvilgiu, t. y. pagal skaičių didumą. Racionaliųjų skaičių aibė nėra visiškai sutvarkyta. Pavyzdžiui, nežinome, koks pirmasis šios aibės intervalo $(0, 1)$ elementas.

Aptarėme binarius sąryšius. Galima apibrėžti ir bendresnius sąryšius.

Sakykime, $A_1, A_2, \dots, A_n$ yra aibės (tarp jų gali būti ir sutampančių). Šių aibių n -narės Dekarto sandaugos

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

poaibis vadinamas *n-nariu aibių* $A_1, A_2, \dots, A_n$ elementų sąryšiu.

Uždaviniai

47. Nustatykite, kurie iš šių sąryšių yra simetriniai, tranzityvūs, refleksyvūs:

1) x lygus y kvadratu, y

2) x mažesnis už y ,

3) x yra i kairę nuo y ,

4) x lengvesnis už y ,

5) x ilgesnis už y .

48. Patikrinkite, ar sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ elementų sąryšis σ „skaičių m ir n skirtumas dalus iš 5“ yra ekvivalentumo sąryšis. Raskite faktoriaibę $\mathbb{Z}/\sigma$.

49. Sutvarkykite visais galimais būdais aibę $\{x, y, u, v\}$.

§16. Baigtinės aibės. Kombinatorika

Nustatėme, kad (tiesiškai) sutvarkyti baigtinę aibę — reiškia išdėstyti jos elementus tam tikra tvarka. Tai galima atlikti keičiant vietomis aibės elementus. Keliais skirtingais būdais galima sutvarkyti baigtinės aibės elementus? Intuityviai aišku tik tiek, kad tų būdų yra baigtinis skaičius.

Nagrinėjant baigtines aibes, dažnai tenka tirti jų poaibius, tenkinančius tam tikras sąlygas, grupuoti tų poaibių elementus atsižvelgiant į įvairius požymius, nustatinėti sutvarkytų ir nesutvarkytų poaibių skaičių, įvairiais būdais atrinkinėti, jungti, perstatinėti, tvarkyti elementus. Atlikdami tuos veiksmus su baigtinės aibės elementais, gauname tam tikrus elementų rinkinius, kuriuos vadiname tos aibės elementų *junginiais*, arba *kombinacijomis*.

Pavyzdžiui, iš aibės $\{a, b, c, d\}$ elementų galime sudaryti elementų rinkinius

$a, b, c,$

$b, c, a,$

c, c, c, c

ir kt.

Pirmąjį rinkinį sudaro visi tos aibės elementai, išskyrus vieną — d . Antrąjį rinkinį sudaro tie patys pirmojo rinkinio elementai, tačiau išdėstyti kita tvarka. Trečiąjį rinkinį sudaro keturi vienodi aibės elementai.

Matematikos šaka, nagrinėjanti junginių sudarymo dėsningumus ir įvairių tipų junginių skaičius, vadinama kombinatorika.

Susipažinsime su kai kuriais elementariais kombinatorikos dėsniais.

Tarkime, kad baigtinėje aibėje A yra n skirtingų elementų. Šios aibės elementus vartosime junginiams sudaryti.

Visus junginius galime skirstyti į du pagrindinius tipus: *paprastuosius* ir *kartotinius*. Paprastuosiuose junginiuose visi elementai *skirtingi*. Tokie junginiai yra ir aibės A *poaibiai*. Kartotiniuose junginiuose gali būti sutampančių elementų. Tokiais atvejais jie nėra aibės A poaibiai.

Ir vieni, ir kiti junginiai dar skirstomi į *gretinius*, *kėlinius*, *derinius*. Junginius, kuriuose yra k elementų, vadinsime *k-nariais junginiais*.

Iš pradžių nagrinėsime paprastuosius junginius. Juos dažniausiai vadiname tiesiog „junginiais“, o kalbėdami apie antrojo tipo junginius, visuomet pridėsime žodį „kartotiniai“.

Junginiai kartais gali būti sudaromi parenkant elementus ne iš vienos, o iš dviejų arba ir daugiau baigtinių aibių.

Nagrinėsime ne tiek pačius junginius, kiek jų skaičių. Pagrindinis kombinatorikos uždavinys – nustatyti, kiek yra tam tikro tipo junginių. Čia ir praverčia vadinamosios *kombinatorinės taisyklės*.

Pažymėkime $\mu(A)$ baigtinės aibės A elementų skaičių. Jeigu aibės $A_1, A_2, \dots, A_n$ yra baigtinės ir poromis neturi bendrų elementų, tai akivaizdu, kad

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n).$$

Remdamiesi šia lygybe, formuluojuame taisyklę.

Kombinatorinė sudėties taisyklė. *Jeigu elementą galima parinkti iš aibės A_1 , turinčios m_1 elementų, arba iš aibės A_2 , turinčios m_2 elementų, ..., arba iš aibės A_n , turinčios m_n elementų, ir aibės $A_1, A_2, \dots, A_n$ poromis neturi bendrų elementų, tai tą elementą galima parinkti*

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

skirtingų būdų.

Iš tikrųjų, jeigu elementas parenkamas arba iš aibės A_1 , arba iš aibės A_2 , ..., arba iš aibės A_n , tai jis parenkamas iš tų aibių sumos, kurios elementų skaičius ir yra $m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Pavyzdys. Dviejų klasių mokiniai, susirinkę drauge, renka vieną delegatą į moksleivių sąskrydį. Keliais būdais jį galima išrinkti, jei vienoje klasėje yra 30 mokinių, kitoje – 32?

Kadangi abiejose klasėse nėra bendrų elementų (mokinių), tai pasinaudoję kombinatorine sudėties taisykle, delegatą mokiniai gali išrinkti 62 būdais (bet kuris iš tų 62 mokinių gali tapti delegatu).

Rasime dviejų baigtinių aibių A ir B , turinčių atitinkamai m ir n elementų, Dekarto sandaugos $A \times B$ elementų skaičių.

Dekarto sandaugos $A \times B$ elementai, kaip žinome, yra poros, kuriose pirmasis poros elementas paimtas iš aibės A , antrasis iš aibės B . Pažymėję aibės A elementus raidėmis $a_1, a_2, \dots, a_m$, matome, kad yra n (a_1, b) pavidalo porų, b – bet kuris aibės B elementas, tiek pat (a_2, b) pavidalo porų, b – vėl bet

kuris aibės B elementas, ir t.t., pagaliau yra $n(a_m, b)$ pavidalo porų. Iš viso tokių porų yra mn .

Taigi

$$\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Ši formulė nesunkiai apibendrinama ir didesnio baigtinių aibių skaičiaus Dekarto sandaugai:

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \dots \cdot \mu(A_n).$$

Pasinaudoję šia formule, formuluojame kitą kombinatorinę taisyklę.

Kombinatorinė daugybos taisyklė. Jeigu elementą a_1 galima parinkti iš aibės A_1 , turinčios m_1 elementų, elementą a_2 – iš aibės A_2 , turinčios m_2 elementų, ..., elementą a_n galima parinkti iš aibės A_n , turinčios m_n elementų, tai rinkinį $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ galima sudaryti

$$m_1 m_2 \dots m_n$$

skirtingų būdų.

Pavyzdys. Keliais būdais galima sudaryti tarybą iš 3 mokinių, jei į ją išrenkama po 1 mokinį iš trijų lygiagrečių klasių, kuriose yra atitinkamai 29, 32 ir 35 mokiniai.

Į tarybą, kurią sudaro trys skirtingų klasių mokiniai X, Y, Z , galima žiūrėti kaip į trijų mokyklos klasių „Dekarto sandaugos“ elementą (X, Y, Z) . Remdamiesi kombinatorine daugybos taisykle, randame galimų skirtingų mokinių tarybų skaičių:

$$29 \cdot 32 \cdot 35 = 32\,480.$$

Įsidėmėkite, kad kombinatorinė sudėties taisyklė taikytina tuomet, kai aprašant junginius vartojama jungtis „arba“. Vartojant jungtį „ir“, reikia taikyti kombinatorinę daugybos taisyklę.

§17. Gretiniai, kėliniai, deriniai

Sudarydami kurį nors baigtinės aibės A elementų junginį, vienu atveju į elementų išdėstymo junginyje tvarką nekreipiame dėmesio, kitu atveju būna svarbi ir elementų tvarka. Pavyzdžiui, mums nesvarbu, kokia tvarka supakuos išrinktas knygas, bet labai svarbu, kaip užrašys pašto indeksą, juk visai ne tas pats, kurį skaitmenį rašyti pirma, kurį – po jo.

Nagrinėsime junginius, kuriuose elementų eilės tvarka svarbi.

Gretiniai. Gretiniu iš n elementų po k vadinamas bet kuris sutvarkytas n elementų aibės poaibis, turintis k elementų.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad $0 \leq k \leq n$.

Gretinius iš n elementų po k trumpiau vadinsime *k-nariais gretiniais*, nenurodydami aibės elementų skaičiaus (sutarėme šį skaičių visada žymėti n).

Du *k-nariai gretiniai* laikomi skirtingais, jeigu jie skiriasi bent vienu elementu arba elementų tvarka.

Du aibės poaibiai yra skirtingi, jeigu jie skiriasi bent vienu elementu, o bet kurį poaibį, turintį daugiau kaip vieną elementą, dar galima įvairiais būdais sutvarkyti ir gauti skirtingus gretinius. Vadinasi, gretinių iš n elementų po k galima sudaryti (jei $k > 1$) daug daugiau negu k elementų turinčių aibių.

Pavyzdys. Sudarykime visus aibės $\{a, b, c, d\}$ gretinius po 3 elementus. Iš pradžių surašykime visus šios aibės poaibius, turinčius 3 elementus (kad būtų paprasčiau, šiuo atveju elementų neskirsime kableliais):

$$abc, abd, acd, bcd.$$

Visaip keisdami vietomis elementus, kiekvieną šių poaibių galime sutvarkyti 6 būdais. Pirmąjį poaibį $\{a, b, c\}$ sutvarkome šitaip:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Panašiai sutvarkome visais galimais būdais ir kitus tris poaibius:

$$abd, adb, bad, bda, dba, dab;$$

$$acd, adc, cad, cda, dca, dac;$$

$$bcd, bdc, cbd, cdb, dc b, dbc.$$

Gavome 24 skirtingus gretinius iš 4 elementų po 3.

Skirtingų gretinių iš n elementų po k skaičius žymimas A_n^k (A – pirmoji raidė prancūzų kalbos žodžio *arrangement* – gretinys). Šis žymėjimas turi prasmę, kai n ir k – natūriniai skaičiai, be to, $k \leq n$.

Pateiksime formulę gretinių skaičiui A_n^k rasti.

5 teorema. Kai $1 \leq k \leq n$,

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1). \quad (1.24)$$

Irodymas. Tarkime, kad $k > 2$. Gretinį $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ iš aibės, turinčios n elementų, sudarome šitaip: elementą a_1 imame iš aibės, turinčios n elementų (visos A), elementą a_2 imame iš aibės, turinčios $n-1$ elementą, elementą a_3 imame iš aibės, turinčios $n-2$ elementus (nes du elementai jau paimti iš aibės A), ..., elementą a_k imame iš aibės, turinčios $n-(k-1)$ elementų.

Kadangi junginys sudaromas vartojant jungtį „ir“, tai pagal kombinatorinę daugybos taisyklę gauname (1.24) formulę tuo atveju, kai $3 \leq k \leq n$. Skaitytojui paliekame įsitikinti, kad ši formulė teisinga ir kai $k=1$ bei $k=2$.

Prisiminę, kad $m! = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1$, kai $m \in \mathbb{N}$, o $0! = 1$, ir pastebėję, kad gretinys iš n elementų po 0 elementų yra tuščioji aibė, gretinių skaičiaus formulę galime pakeisti šitokia:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad \text{kai } 0 \leq k \leq n. \quad (1.25)$$

Pavyzdžiai. 1. Keliais būdais galima sudaryti 5 pamokų tvarkaraštį pirmadieniui, jeigu dėstoma 10 dalykų?

Kadangi tvarkaraščiai skiriasi ir kai tie patys dalykai surašyti skirtinga tvarka, tai ieškomasis skaičius yra skaičius gretinių iš 10 elementų po 5:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$$

2. Kiek galima parašyti triženklį skaičių su skirtingais skaitmenimis?

Rašydami skaičius, vartojame skaitmenis 0, 1, 2, ..., 9. Iš šių 10 skaitmenų galime sudaryti A_{10}^3 gretinių po 3 skaitmenis, kurie visi būtų skirtingi. Tačiau pirmasis skaitmuo negali

būti ulis, todėl iš bendro skaičiaus A_{10}^2 reikia atimti skaičių gretinių, kurių pirmasis skaitmuo 0. Jų bus A_9^2 . Taigi ieškomasis skaičius yra

$$A_{10}^2 - A_9^2 = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648.$$

Kėliniai. Kėliniu iš n elementų vadiname gretinį iš n elementų po n .

Visų galimų kėlinių iš n elementų skaičius žymimas P_n (P – pirmoji raidė prancūzų kalbos žodžio *permutation* – perstatymas). Iš kėlinio apibrėžimo

$$P_n = A_n^n = n!. \quad (1.26)$$

Prisiminkime, kad gretinį apibrėžėme kaip n elementų aibės sutvarkytą poaibį, turintį k elementų. Kadangi kėlinių atveju $k=n$, tai kiekvienas kėlinys turi tuos pačius elementus kaip ir nurodytoji aibė. Vadinasi, visi n elementų kėliniai skiriasi tik elementų tvarka. Keliais skirtingais būdais galima sutvarkyti n elementų aibę, tiek yra skirtingų n elementų kėlinių.

Pavyzdys. Keliais skirtingais būdais galima surašyti tuos pačius 5 dalykus vienos dienos tvarkaraštyje?

Ieškomasis skaičius bus 5 pamokų aibės galimų sutvarkymų skaičius $P_5 = 5! = 120$.

Deriniai. Deriniu iš n elementų po k vadiname bet kurį n elementų aibės poaibį, turintį k elementų.

Šis apibrėžimas nuo gretinio apibrėžimo skiriasi tik tuo, kad nenurodyta poaibio elementų tvarka. Iš apibrėžimo taip pat išplaukia, kad $0 \leq k \leq n$.

Du poaibiai, kaip žinome, yra skirtingi, jeigu jie skiriasi bent vienu elementu. Panašiai du deriniai laikomi skirtingais, jeigu vienas iš jų turi elementą, kurio nėra antrajame.

Pavyzdžiui, deriniai acb ir bca nesiskiria, o deriniai ab, abc, abd – skirtingi.

Pavyzdys. Rasime visus galimus derinius iš 4 elementų $\{a, b, c, d\}$.

Galimi 4 deriniai po vieną elementą: a, b, c, d . Derinių po du elementus yra daugiau: ab, ac, ad, bc, bd, cd (kaip ir ankstesniame pavyzdyje, porų komponentų neskiriame kableliais). Po 3 elementus – keturi deriniai: abc, abd, acd, bcd . Pagaliau derinių po 4 elementus tėra vienas – $abcd$.

Visų derinių iš n elementų po k skaičius žymimas C_n^k (C – pirmoji raidė prancūzų kalbos žodžio *combinaison* – derinys).

Pateiksime derinių skaičiaus C_n^k formulę.

6 teorema.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.27)$$

Irodymas. Iš derinių ir gretinių apibrėžimų išplaukia, kad ir vieni, ir kiti yra n elementų aibės poaibiai. Surašę tam tikra tvarka poaibio k elementų,

gauname derinį iš n elementų po k , kuris kartu yra ir gretinys. Išdėstę tuos pačius elementus kita tvarka, gauname tą patį derinį, bet jau kitą gretinį. Vadinasi, skirtingų gretinių iš vieno k -nario derinio galima gauti tiek, kiek yra būdų skirtingai sutvarkyti tuos k elementų, taigi P_k . Visi gretiniai, sudaryti iš dviejų skirtingų k -narių derinių, bus skirtingi, nes bet kurie du k -nariai deriniai skiriasi bent vienu elementu.

Iš šių samprotavimų išplaukia, kad

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

Iš šios lygybės, prisiminę (1.24) ir (1.26) formules, ir gauname įrodomąją lygybę. Iš jos išplaukia, kad

$$C_n^n = 1,$$

– yra tik vienas derinys iš n elementų po n . Sutarta simbolį

$$C_n^0$$

laikyti lygiu 1. Teisinga lygybė

$$C_n^{n-k} = C_n^k. \quad (1.28)$$

Tuo galima įsitikinti pakeitus (1.27) lygybėje k skaičiumi $n-k$.

Iš (1.28) formulės išplaukia, kad sekoje

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-2}, C_n^{n-1}, C_n^n$$

vienodai nuo galų nutolę elementai yra lygūs.

Derinių skaičių C_n^k taip pat galime apskaičiuoti pagal formulę

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}, \quad (1.29)$$

kurią gauname (1.27) lygybės dešinėsios pusės skaitiklį ir vardiklį padaliję iš $(n-k)!$. Ši formulė patogi skaičiuoti ir paprasta atsiminti – skaitiklyje rašoma sandauga k iš eilės einančių mažėjančių skaičių pradedant n , vardiklyje – sandauga k iš eilės einančių didėjančių skaičių pradedant 1.

Matematinėje literatūroje gali pasitaikyti ir šitoks derinių skaičiaus žymėjimas:

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Pavyzdžiai. 1. Keliais būdais galima paruošti puokštę iš 4 rūšių gėlių, jei darželyje auga 10 rūšių gėlės?

Suprantama, dvi puokštės skirsis tik tada, jeigu jose bus bent po vieną skirtingą gėlę, o kaip tos gėlės sudėstytos, šiuo atveju nesvarbu. Taigi ieškomasis skaičius lygus skaičiui derinių iš 10 elementų po 4:

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

2. Keliais būdais galima sudaryti 5 talkininkų brigadą iš 20 studentų? Ieškomasis skaičius yra

$$C_{20}^5 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15\,504.$$

Kombinatorinės tapatybės ir Paskalio trikampis. Kadangi baigtinių aibių elementų junginius nagrinėja matematikos šaka, vadinama *kombinatorika*, todėl ir įvairios formulės, siejančios junginių skaičius, dažnai vadinamos *kombinatorinėmis tapatybėmis*. Tokios, pavyzdžiui, (1.24)–(1.29) tapatybės. Panagrinėsime dar keletą jų.

Teisinga tapatybė

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k.$$

Jos įrodymas nesudėtingas:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \\ &= (n-1)! \left(\frac{1}{k(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} \right) = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{(n-1)!n}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k. \end{aligned}$$

Pateiksime dar vieną, sudėtingesnę kombinatorinę tapatybę

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1}.$$

Įrodymas išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned} C_k^k &= C_{k+1}^{k+1}, \\ C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} &= C_{k+2}^{k+1}, \\ C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} &= C_{k+3}^{k+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} &= C_{k+m}^{k+1}, \end{aligned}$$

kurias panariui sudėję ir gauname minėtąją tapatybę.

Paskalio trikampiu vadinama trikampė skaičių lentelė

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\ & \dots\dots\dots & & & & & & & \end{array}$$

Kadangi, kaip minėjome, teisinga tapatybė

$$C_n^s + C_n^{s-1} = C_{n+1}^s, \quad (1.30)$$

tai Paskalio trikampyje kiekvienas nekraštinis skaičius yra lygus virš jo esančių dviejų artimiausių skaičių sumai. Tą trikampį sudarė prancūzų matematikas *Blezas Paskalis* (B. Pascal, 1623–1662) „Traktate apie aritmetinį trikampį“, todėl ir prigijo *Paskalio*, arba *aritmetinio trikampio*, pavadinimas, nors tas trikampis buvo žinomas ir anksčiau.

§18. Kartotiniai junginiai

Nagrinėjome junginius, kurie buvo baigtinės aibės A poaibiai. Kiekvieno tokio junginio visi elementai buvo skirtingi. Tačiau kombinatorikoje tenka tirti ir tokias elementų kombinacijas, kuriose yra vienodų – pasikartojančių – elementų, t. y. kartotinius junginius. Jie nėra kurios nors aibės poaibiai, todėl juos reikia apibrėžti kitaip.

Kartotiniai gretiniai. Tarkime, kad A – aibė, turinti n elementų.

Dekarto sandaugos $A^m = A \times A \times \dots \times A$ kiekvieną elementą ($a_1, a_2, \dots, a_m$) vadiname kartotiniu gretiniu iš n elementų po m (m -nare aibės A elementų seka, m -mačiu vektoriumi-eilute).

Pažymėję visų kartotinių gretinių iš n elementų po m skaičių simboliu $\bar{A}_n^m$ ir prisiminę, kad

$$\mu(A^m) = (\mu(A))^m,$$

gauname formulę skaičiui $\bar{A}_n^m$ rasti:

$$\bar{A}_n^m = n^m;$$

čia m ir n – natūriniai skaičiai.

Pavyzdžiai. 1. Rasime, kiek galima parašyti šešiaženklį skaičių su nelyginiais skaitmenimis.

Iš viso yra 5 nelyginiai skaitmenys. Kiekvienas mus dominantis šešiaženklis skaičius yra tam tikra nelyginių skaitmenų aibės seka. Todėl iš viso tokių skaičių bus tiek, kiek yra kartotinių gretinių iš 5 elementų po 6:

$$\bar{A}_5^6 = 5^6 = 15\,625.$$

2. Morzės abėcėlėje vartojami dvejoji ženklai – taškai ir brūkšneliai. Kiek raidžių galima „užrašyti“ ta abėcėle, sudarant ne ilgesnes kaip 4 ženklų kombinacijas?

Kiekviena raidė yra dviejų ženklų seka, taigi kartotinis gretinys. Kadangi raidės galima sudaryti iš vieno, dviejų, trijų ir keturių ženklų, tai galimų raidžių skaičius lygus sumai

$$\bar{A}_2^1 + \bar{A}_2^2 + \bar{A}_2^3 + \bar{A}_2^4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30.$$

Kartotiniai kėliniai. Surašykime visus kartotinius gretinius iš 2 elementų a, b po 3. Gausime šitokius junginius:

$aaa, aab, aba, baa, bba, bab, abb, bbb$.

Išrinkime iš šių 8 junginių tuos, kuriuose, pavyzdžiui, elementas a kartojasi 2 kartus, o b – vieną kartą. Tai bus šie kartotiniai gretiniai:

aab, aba, baa .

Kartotiniai gretiniai, kuriuose elementai kartojasi nurodytą skaičių kartų, vadinami kartotiniais kėliniais.

Tarkime, kad $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — baigtinė aibė. Simboliu $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ žymėsime skaičių visų galimų tos aibės kartotinių kėlinių, kuriuose elementas a_k kartojasi n_k kartų ($k=1, 2, \dots, m$). Suma $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ vadinama *kėlinio eile*.

Pateiksime formulę kartotinių kėlinių skaičiui rasti.

7 teorema.

$$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} \quad (1.31)$$

Įrodymas. Turėdami n skirtingų elementų, galime iš jų sudaryti $n!$ skirtingų kėlinių (žr. (1.26) formulę). Apskaičiuokime, kiek kartų sumažės skirtingų kėlinių skaičius, jeigu keli to junginio elementai bus vienodi. Tarkime, kad nagrinėjamojo kėlinio n_1 elementų sutampa. Jeigu visi tie elementai būtų skirtingi, tai neliesdami kitų elementų ir tik tarpusavyje keisdami nurodytuosius n_1 elementų gautume vis skirtingus kėlinius. Jų būtų $n_1!$ — tiek, kiek yra būdų sutvarkyti n_1 elementų. Tačiau, jeigu n_1 vietų užimantys elementai sutampa, tai visi $n_1!$ jų sukeitimai junginio nekeičia. Taigi kai sutampa n_1 elementų, skirtingų kėlinių skaičius sumažėja $n_1!$ kartų. Analogiškai, jeigu sutampa kuri kita n_2 elementų grupė, tai bendras skirtingų kėlinių skaičius vėl sumažėja $n_2!$ kartų ir t. t. Atsižvelgę į visas sutampančių elementų grupes ir gauname (1.31) formulę.

Pavyzdžiai. 1. Kiek galima sudaryti šešiaženklų skaičių iš skaitmenų 1, 1, 1, 2, 2, 5? Šiuo atveju ieškosime skaičiaus kartotinių kėlinių, kuriuose 1 kartojasi 3 kartus, 2 — du kartus, o 5 — vieną kartą. Pagal (1.31) formulę

$$P(3, 2, 1) = \frac{6!}{3! 2! 1!} = 60.$$

2. Keliais būdais galima išdėstyti n skirtingų objektų į k skirtingų dėžių, jei atsižvelgiama ir į objektų išdėstymo dėžėse tvarką?

Pažymėkime dėstomus objektus $a_1, a_2, \dots, a_n$ ir suskirstykime juos į k grupių. Grupės vieną nuo kitos atskirkime kokiais nors ženklais, pavyzdžiui, nuliais, kurių reikės $k-1$. Schema

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1s}, 0, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}, 0, \dots, 0, a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kt}$$

interpretuosime kaip suskirstymo būdą, kai į pirmąją dėžę patenka objektai, esantys į kairę nuo pirmojo nulio, į paskutinę dėžę — objektai, esantys į dešinę nuo paskutinio $(k-1)$ -ojo nulio, į m -ąją dėžę ($1 < m < k-1$) — objektai, esantys tarp $(m-1)$ -ojo ir m -ojo nulių. Jeigu $(s-1)$ -asis ir s -asis nuliai yra greta, tai reiškia, kad į s -ąją dėžę nieko nepakliuvo; jeigu eilutė prasideda 0 — į pirmąją dėžę nieko nepakliuvo. Kiekvieną elementų a_i ir nulių tarpusavio padėtį atitinka vienas objektų paskirstymo į dėžes būdas, ir atvirkščiai. Apskaičiavę, kiek yra skirtingų kėlinių, kuriuose 1 elementas (nulis) kartojasi $(k-1)$ kartą, kiti elementai a_i ($i=1, 2, \dots, n$) — nesikartoja, gausime tokį kartotinių kėlinių skaičių:

$$P(k-1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ kartų}}) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! 1! 1! \dots 1!} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = A_{n+k-1}^n.$$

Vadinasi, n skirtingų objektų į k skirtingų dėžių galima išdėstyti A_{n+k-1}^n būdu, jei atsižvelgiama ir į objektų tvarką dėžėse.

3. Keliais būdais galima padalyti n vienodų objektų k asmenims?

Spręsdami šį uždavinį taip, kaip ir praeitąjį, ir atsižvelgdami į tai, kad $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, gausime ieškomąjį skaičių:

$$P(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n! (k-1)!} = C_{n+k-1}^n.$$

4. Keliais būdais galima padalyti n_1 pirmosios rūšies objektų, n_2 antrosios rūšies objektų ir t. t., n_k k -osios rūšies objektų 2 asmenims?

Pirmiausia padalysime pirmosios rūšies objektus. Tai galima atlikti, kaip matėme, $C_{n_1+1}^1 = n_1 + 1$ būdu. Analogiškai antrosios rūšies objektus galime padalyti $n_2 + 1$ skirtingu būdu. Dviejų rūšių objektus galime padalyti $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ skirtingų būdų. Taip tęsdami toliau, gausime

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1)$$

skirtingų tų objektų padalijimo būdų.

5. Rasime skaičiaus

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

(α_i – sveikieji neneigiami, p_i – skirtingi pirminiai skaičiai, $i = 1, 2, \dots, k$) skirtingų daliklių skaičių $\tau(n)$.

Skaičių n sudaro α_1 daugiklių, lygių p_1 , α_2 daugiklių, lygių p_2 , ir t. t. Į bet kurį skaičiaus n daliklį d įeina dalis tų daugiklių, o kita dalis sudaro dalikliui d papildomą daliklį n/d . Visus galimus daliklius gausime radę, keliais būdais skaičiaus n pirminius daugiklius galima „išdalyti“ skaičiams d ir n/d . Remdamiesi praeito uždavinio atsakymu, tai galime padaryti

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

būdų.

Kartotiniai deriniai. Tarkime, kad turime pakankamai daug n rūšių objektų. Sudarykime rinkinius iš k objektų. Skirtingais laikysime tokius rinkinius, kurie skiriasi bent vienu elementu. Tokius junginius vadinsime *kartotiniais deriniais iš n elementų po k* .

Du kartotiniai deriniai iš n elementų po k yra vienodi, jeigu jie sudaryti iš vienodų elementų, paimtų po tiek pat kartų. Elementų išdėstymo tvarka nesvarbi.

Pavyzdžiui, turime pakankamai daug raidžių a, b, c . Paėmę 8 raidžių rinkinį a, a, a, b, c, c, c, c , gauname (jei nesvarbi raidžių išdėstymo tvarka) kartotinį derinį iš 3 elementų po 8.

Kiekvienam kartotiniam deriniui iš n elementų po k galima abipus viena-reikšmiškai priskirti elementų kartotinumų – kartotinumų rinkinį $k_1, k_2, \dots, k_n$; čia k_i – elemento a_i kartotinumų derinyje, t. y. skaičius, rodantis, kiek kartų tas elementas įrašytas junginyje. Aišku, kad $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$.

Nagrinėkime, pavyzdžiui, trijų elementų a, b, c aibę. Kartotinio derinio $aaab$ kartotinumai yra 3, 1, 0 (3 – elemento a kartotinumai, 1 – elemento b ir 0 – elemento c), derinio $abbc$ kartotinumai yra 1, 2, 1 ir t. t. Deriniai $abbc$ ir $cbba$ lygūs, nes jų atitinkami kartotinumai lygūs. Iš elementų a, b sudarysime visus galimus derinius, turinčius po 4 elementus. Tai bus junginiai $aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb$.

Visų kartotinių derinių iš n elementų po k skaičius žymimas $\bar{C}_n^k$. Jis randamas pagal šitokią formulę.

8 teorema.

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k.$$

Įrodymas. Sunumeruokime aibės A elementus, iš kurių sudarysime kartotinius derinius. Kiekvienam tokiame deriniui priskirkime vienetų ir nulių seką

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1, 0}_{\alpha}, \underbrace{1, 1, \dots, 1, 0}_{\beta}, \dots, \underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_{\lambda},$$

iš kurios matysime, kiek kartų pasikartoja kiekvienas elementas. Atskirų elementų kartotinumus žyminčius vienetus atskirkime nuliais. Pavyzdžiui, parašytoji seka atitinka derinį, kuriame pirmasis aibės elementas kartojasi α kartų, antrasis — β kartų ir t. t. ..., paskutinis — λ kartų. Jeigu tarp $(s-1)$ -ojo ir s -ojo nulių nėra vienetų, tai s -asis aibės A elementas neįeina į derinį. Nulis sekos pradžioje rodo, kad pirmasis elementas neįeina į derinį. Jeigu nulis yra sekos gale, paskutinis aibės A elementas neįeina į derinį. Kiekvienam deriniui priskirta seka turi n vienetų (visų kartotinumų suma) ir $k-1$ nulį. Aišku, kad kiekvienas n vienetų ir $k-1$ nulio tarpusavio išsidėstymas atitinka vieną kartotinį derinį, ir atvirkščiai. Lieka apskaičiuoti, keliais būdais galima išdėstyti eilute n vienetų ir $k-1$ nulį, t. y. rasti skaičių kėlinių iš 2 elementų, kurių kartotinumai atitinkamai lygūs n ir $k-1$. Šis skaičius pagal (1.31) formulę lygus

$$P(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Sodelyje turi būti pasodinta 15 obelaičių. Medelyne parduodami 4 rūšių sodinukai. Keliais skirtingais būdais gali būti parinktas sodinukų asortimentas?

Aišku, perkant sodinukus, svarbu ne jų eilės tvarka, bet jų rūšys. Tagi reikia taikyti kartotinių derinių formulę. Gausime

$$\overline{C}_4^{15} = C_{15}^4 = C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816.$$

Uždaviniai

Apskaičiuokite:

50. a) C_8^2 , b) C_{10}^5 , c) C_{12}^{10} , d) C_{25}^{24} .

51. a) A_8^2 , b) A_9^4 , c) A_{10}^5 , d) A_4^4 .

52. a) P_3 , b) P_5 , c) P_8 , d) P_{10} .

53. Raskite n -kampio įstrižainių aibę.

54. Plokštumoje yra n taškų, m taškų yra vienoje tiesėje, o iš likusiųjų jokie trys nėra vienoje tiesėje. Keliomis tiesėmis galima sujungti tuos taškus?

55. Kiek skirtingų keturženklų skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 3, 4, 5, 6?

56. Keliais būdais šachmatų lentoje galima išdėstyti 8 bokštus, kad jie nekirstų vienas kito?

57. Keliais būdais 6 vaikai gali sudaryti ratelį?

58. Keliais būdais iš 15 žmonių galima išrinkti 3 asmenų valdybą: pirmininką, sekretorių ir kasininką?

59. Keliais galima parašyti triženklų skaičių, kuriuose nebūtų skaitmenų 5 ir 7?

60. Kiek žodžių galima sudaryti iš raidžių a, b, u, d, e, k , jei žodžiu laikomas bet kuris ne daugiau kaip 8 raidžių junginys?

61. Urnoje yra 100 kortelių, sunumeruotų nuo 1 iki 100. Keliais būdais galima ištraukti dvi korteles su skirtingo lyginumo numeriais?

Apskaičiuokite:

62. a) A_8^2 , b) A_2^5 , c) A_4^3 , d) A_{10}^5 .

63. a) $P(2, 1, 4)$, b) $P(3, 1, 1, 3)$, c) $P(2, 2, 2)$, d) $P(1, 1, 1, 1)$.

64. a) $\overline{C}_2^5$, b) $\overline{C}_6^2$, c) $\overline{C}_7^3$, d) $\overline{C}_{10}^4$.

65. Kiek galima parašyti dvylikaženklių skaičių?

66. Kiek galima sudaryti šešiaženklių skaičių iš skaitmenų 2 ir 5?

67. Kiek galima sudaryti, naudojantis Morzės abėcėle, ne ilgesnių kaip šešiaženklių žodžių?

68. Keliais būdais galima sudaryti 10 knygų siuntinėlių, turint 3 rūšių knygų?

69. Kiek yra šešiaženklių skaičių, sudarytų iš 2 vienetų ir 4 penketų?

70. Kiek yra skaičių, ne didesnių už 300 ir nedalių nei iš 11, nei iš 13, nei iš 17?

Algebrinės struktūros

Algebra nagrinėja ne pačias aibes, o objektus, sudarytus iš aibės (arba kelių aibių), kurioje apibrėžtos viena arba kelios operacijos (veiksmai). Tokie objektai vadinami *algebrinėmis struktūromis*, kartais tiesiog *algebromis*. Šiame skyriuje aiškinama sąvoka „algebrinė struktūra“, nagrinėjami algebrinių struktūrų tipai – *grupė*, *žiedas*, *laukas* ir natūrinių skaičių struktūra.

§19. Algebrinė binarė operacija

Išsiaiškinsime, kas yra *aritmetinis* arba *algebrinis* veiksmas. *Aritmetiniais veiksmais* paprastai vadinami gerai žinomi *sudėtis*, *atimties*, *daugybos*, *dalybos* veiksmas, atliekami jau vidurinėje mokykloje nagrinėjamose natūrinių, sveikųjų ir kitų skaičių aibėse.

Kas yra sudėtis natūrinių skaičių aibėje?

Sudėję bet kokius natūrinius skaičius m ir n , randame trečią (taip pat natūrinį) skaičių, vadinamą jų suma. Šį skaičių žymime $m+n$. Kitaip sakant, sudėdami natūrinių skaičių m ir n dvejetaini (m, n) priskiriame jų sumą:

$$(m, n) \xrightarrow{+} m+n.$$

Taip pat galime sakyti, kad *natūrinių skaičių sudėtis yra taisyklė (dviejų argumentų funkcija), žymima +, pagal kurią kiekvienai natūrinių skaičių porai (m, n) priskiriame trečiąją natūrinį skaičių $m+n$ – jų sumą*. Šios funkcijos apibrėžimo sritis yra aibė $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, o reikšmių sritis – aibė $\mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Panašiai aptartume sudėtį sveikųjų skaičių aibėje, daugybą racionaliųjų skaičių aibėje ir kt.

Apibendrinami galime pasakyti:

1) *aritmetinis veiksmas yra dviejų argumentų funkcija skaičių aibėje, jos reikšmės – tos pačios aibės skaičiai*;

2) *negalima kalbėti apie aritmetinį veiksmą (sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą) apskritai: visada reikia nurodyti arba turėti omenyje, kokioje aibėje šis veiksmas atliekamas (apibrėžtas)*;

3) *tas pats pavadinimas gali reikšti skirtingus veiksmus (pavyzdžiui, sveikųjų skaičių sudėtį, racionaliųjų skaičių sudėtį ir pan.)*.

Be veiksmų skaičių aibėse, vidurinėje mokykloje nagrinėjami ir veiksmams su kitokiais objektais. Pavyzdžiui, geometrijoje nagrinėjama plokštumos poslinkių kompozicija – dviejų nuosekliai atliktų poslinkių rezultatas.

Išnagrinėkime šitoki pavyzdį. Pažymėkime

$$V = \mathbf{N} \times \mathbf{N} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{N} \}.$$

Apibrėžkime veiksmą $+$ šitaip: jeigu $\alpha = (a, b) \in V$, $\beta = (c, d) \in V$, tai

$$(\alpha, \beta) \xrightarrow{+} \alpha + \beta = (a + c, b + d).$$

Šis veiksmas irgi yra dviejų kintamųjų funkcija, įgyjanti reikšmes iš aibės V :

$$V \times V \xrightarrow{+} V.$$

Aibė V yra natūrinių skaičių aibės Dekarto kvadratas, $V \times V$ – aibės V Dekarto kvadratas. Pastarosios aibės elementai yra natūrinių skaičių sutvarkytų dvejetų sutvarkytų porų aibė, kurios elementai yra

$$(\alpha, \beta) = ((a, b), (c, d)), \quad a, b, c, d \in \mathbf{N}.$$

Apibrėžtasis veiksmas vadinamas dvimačių vektorių eilučių, apibrėžtų aibėje $\mathbf{N}$, sudėtimi. Šį veiksmą vadinsime *algebriniu*, nes $V \times V$ yra ne skaičių, o kito tipo aibė.

Visiems žinomiems aritmetiniams ar algebriniams veiksmams bendra tai, kad jie yra dviejų argumentų funkcijos, apibrėžtos tam tikroje aibėje ir įgyjančios reikšmes toje pačioje aibėje. Algebroje tokios funkcijos vadinamos *vidinėmis binarėmis operacijomis* (trumpiau – *algebrinėmis operacijomis*).

Algebrinė operacija aibėje A vadinama dviejų argumentų funkcija, apibrėžta aibėje A ir įgyjanti reikšmes iš tos pačios aibės.

Abstrakčią algebrinę operaciją žymėsime įprastais operacijų ženklais, kartais vartosime ir kitus ženklus, pavyzdžiui, $*$, $\oplus$. Vartojant bendresnį ženklą $*$, abstraktų algebrinės operacijos apibrėžimą galima užrašyti šitaip:

$$A \times A \xrightarrow{*} A.$$

Aibėje galima apibrėžti ne vieną algebrinę operaciją. Baigtinėse aibėse operacijos apibrėžiamos ir stačiakampe lentelė, kurioje b -ojo stulpelio ir a -osios eilutės sankirtoje rašomas operacijos $*$ rezultatas $a * b$. Pavyzdžiui, lentelė

$+$	a_0	a_1	a_2
a_0	a_0	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	a_0
a_2	a_2	a_0	a_1

apibrėžiama „sudėtis“ aibėje $A = \{a_0, a_1, a_2\}$. Lentelėje randame, pavyzdžiui, $a_1 + a_2 = a_0$ ir t. t. Naudodamiesi šia lentele, galime ne tik „sudėti“, bet ir „atimti“, t. y. išspręsti lygtį $a + x = b$, kai a ir b – aibės A elementai.

Konkreči algebrinė operacija konkrečioje aibėje neretai apibrėžiama žodžiais, nurodant, kaip rasti operacijos rezultatą. Žodinį apibrėžimą gali pakeisti viena ar kelios formulės. Pavyzdžiui, racionaliųjų skaičių aibėje $\mathbb{Q}$ sudėtis apibrėžiama formule

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Kai jau žinoma natūrinių skaičių sudėtis bei atimtis ir skaičiaus modulio sąvoka, sudėtis sveikųjų skaičių aibėje $\mathbb{Z}$ apibrėžiama šitokiomis formulėmis:

$m+n$ apibrėžta, kai m ir n – natūriniai skaičiai,

$m+0=0+m=m$, kai m – bet kuris sveikasis skaičius,

$m+n=n+m=n-|m|$, kai $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, $|m| < n$,

$m+n=n+m=-(|m|-n)$, kai $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, $|m| > n$,

$m+n=n+m=0$, kai $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, $|m| = n$,

$m+n=n+m=-(|m|+|n|)$, kai m ir n – neigiami sveikieji skaičiai.

Jeigu aibėje A apibrėžta binarė algebrinė operacija $*$ (funkcija)

$$A \times A \xrightarrow{*} A,$$

o B yra aibės A poaibis, tai galimi du atvejai:

1) $B \times B \xrightarrow{*} B$. Tai reiškia, kad ta pati operacija apibrėžta ir aibėje B . Tokiu atveju sakoma, kad aibės A poaibis B yra uždaras operacijos $*$ atžvilgiu;

2) aibės $B \times B$ atvaizdis, gaunamas operacija $*$, nėra aibės B poaibis. Sakoma, kad poaibis B nėra uždaras operacijos $*$ atžvilgiu.

Pavyzdžiai. 1. Nelyginių natūrinių skaičių aibė nėra uždara natūrinių skaičių sudėties atžvilgiu, bet uždara natūrinių skaičių daugybos atžvilgiu.

2. Sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ poaibis

$$m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$$

uždaras sveikųjų skaičių sudėties, atimties ir daugybos operacijų atžvilgiu. Tikrai, jeigu turime du skaičius ma ir mb iš aibės $m\mathbb{Z}$, tai

$$ma + mb = m(a+b) \in m\mathbb{Z}$$

ir t. t.

3. Aibė $\{1\}$ uždara natūrinių skaičių daugybos atžvilgiu, o aibė $\{0\}$ uždara sveikųjų skaičių sudėties atžvilgiu.

§20. Algebrinių binarių operacijų galimos savybės

Jau vidurinėje mokykloje susipažistame su kai kuriomis sveikųjų skaičių veiksmų savybėmis – sudėties ir daugybos komutatyvumo (perstatymo) dėsniais

$$a + b = b + a,$$

$$ab = ba$$

(raidės čia visur reiškia sveikuosius skaičius), sudėties ir daugybos *asociatyvumo* (*jungimo*) dėsniais

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

$$(ab)c = a(bc),$$

distributyvumo (*skirstymo*) dėsniu

$$(a + b)c = ac + bc$$

ir kt. Panašios savybės būdingos ir daugeliui algebrinių operacijų.

Sakykime, aibėje A apibrėžta algebrinė operacija $*$.

Komutatyvumo savybė. Jeigu su kiekvienu aibės A elementu pora a, b teisinga lygybė

$$a * b = b * a,$$

tai operacija $$ vadinama komutatyvia.*

Jeigu bent vienai aibės A elementų porai nurodytoji lygybė nebus teisinga, tai operacijos $*$ negalima vadinti komutatyvia.

Pavyzdžiui, nekomutatyvios yra sveikųjų, racionalųjų, realiųjų skaičių atimties, nelygių nuliui racionalųjų ir realiųjų skaičių dalybos operacijos. O 19 paragrafe lentelė apibrėžta aibės A operacija, lengva įsitikinti, yra komutatyvi. Nekomutatyvi ir šitaip apibrėžiama dviejų elementų aibės $B = \{a, b\}$ operacija:

$$(a, a) \rightarrow a, \quad (a, b) \rightarrow a, \quad (b, a) \rightarrow b, \quad (b, b) \rightarrow b.$$

Asociatyvumo savybė. Jeigu su kiekvienu aibės A elementu trejetu a, b, c teisinga lygybė

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

tai operacija $$ vadinama asociatyvia.*

Neasociatyvios yra sveikųjų skaičių atimties, teigiamo realiojo skaičiaus kėlimo teigiamu laipsniu ir kitos operacijos. Neasociatyvi, pavyzdžiui, nelygių nuliui racionalųjų skaičių dalyba:

$$(5 : 3) : 4 = 5/12 \neq 20/3 = 5 : (3 : 4).$$

Kaip žinome, natūrinių, sveikųjų, racionalųjų ir realiųjų skaičių sudėtis ir daugyba yra asociatyvios operacijos.

Neutralusis operacijos elementas. Jeigu aibėje A yra toks elementas e , kad su kiekvienu aibės elementu a teisingos lygybės

$$e * a = a * e = a,$$

tai sakoma, kad operacija $$ turi neutralųjį elementą e .*

Jeigu operacija nėra komutatyvi, t. y. nebūtinai $e * a = a * e$, tai kalbame apie *nekomutatyvius* neutraliuosius elementus. *Kairiuoju neutraliu elementu* vadinamas toks aibės A elementas (jį žymėsime e), kad su kiekvienu $a \in A$

$$e * a = a.$$

Analogiškai galima apibrėžti *dešinįjį neutralų operacijos $*$ elementą e'* . Su juo $\forall a \in A$ teisinga

$$a * e' = a.$$

Pavyzdžiui, 0 yra natūrinių, sveikųjų ir kitų skaičių sudėties neutralusis elementas, o sveikųjų skaičių ar nelygių nuliui racionaliujų skaičių dalyba tokio elemento neturi. Minėtoji dalyba turi dešinįjį neutralų elementą 1, nes $a : 1 = a$ su kiekvienu racionaliuoju skaičiumi a .

Akivaizdu, kad operacijos neutralusis elementas yra kartu ir tos operacijos kairysis bei dešinysis neutralus elementas. Taigi operacija turi neutralųjį elementą tada ir tik tada, kai ji turi kairinį ir dešinįjį neutralius elementus.

Jeigu algebrinė operacija aibėje A vadinama *sudėtimi* (tuo atveju ji dažnai žymima įprastu ženklu $+$), tai jos neutralusis elementas (kai jis egzistuoja) vadinamas *nuliniu elementu* (arba *nuliu*) ir žymimas O_A arba ir tiesiog 0. Analogiškai, kai operacija vadinama *daugyba* (ir žymima $\times$ arba tašku $\cdot$, kuris gali būti ir praleidžiamas), jos neutralusis elementas vadinamas *vienetiniu* (arba *vienetu*), žymimas 1_A arba tiesiog 1.

Simetriški operacijos atžvilgiu elementai. Tais atvejais, kai operacija $*$ turi neutralųjį elementą $e \in A$, galima įvesti aibės A elementui a *simetriško elemento* sąvoką.

Jeigu aibės A elementai a ir a' tenkina lygybes

$$a' * a = a * a' = e,$$

tai a' vadinamas elementui a simetrišku elementu.

Pavyzdžiui, kiekvienas sveikasis skaičius m turi simetrišką sudėties atžvilgiu elementą $-m$, o sveikųjų skaičių aibėje tik skaičiai -1 ir 1 yra simetriški daugybos atžvilgiu $(-1)(-1)=1$ ir $1 \cdot 1=1$.

Tais atvejais, kai operacija vadinama sudėtimi ir žymima $+$, elementui a simetriškas elementas vadinamas jam *priešingu elementu* ir žymimas $-a$ (taigi $a' = -a$). Kai operacija vadinama daugyba, elementui a simetriškas elementas vadinamas jam *atvirkštiniu* ir žymimas a^{-1} , t. y. $a' = a^{-1}$.

Įrodysime vieną svarbią operacijų savybę.

9 teorema. *Sakykime, kad aibėje A apibrėžta asociatyvi operacija $*$, turinti neutralųjį elementą e . Jeigu aibės A elementui a egzistuoja du tokie aibės A elementai b ir c , kad yra teisingos lygybės*

$$b * a = e \quad \text{ir} \quad a * c = e,$$

tai $b = c$.

Įrodymas. Kad būtų sklandesnė kalba, operaciją $*$ pavadinkime daugyba. Lygybę $b * a = e$ padauginę panariui iš elemento c , gauname lygybę $(b * a) * c = e * c$. Kadangi operacija $*$ asociatyvi, o e — jos neutralusis elementas, tai

$$(b * a) * c = b * (a * c) = b * e = b,$$

$$(b * a) * c = e * c = c.$$

Todėl $b = c$.

Operacijai atvirkštinė operacija. Kai kurios algebrinės operacijos toje pačioje aibėje viena su kita taip glaudžiai susijusios, kad žinant vieną operaciją ir jos savybes, galima nusakyti ir kitą. Tokios, pavyzdžiui, yra sveikųjų skaičių sudėtis ir atimtis, nelygių nuliui racionalųjų skaičių daugyba ir dalyba. Sveikųjų skaičių atimtis vienareikšmiškai apibrėžiama jų sudėtimi: norėdami rasti skaičių m ir n skirtumą, prie skaičiaus m pridedame skaičių, priešingą skaičiui n .

Atimtis vadinama sudėčiai atvirkštiniu veiksmu.

Analogiškai dalyba yra daugybai atvirkštinis veiksmas. Atlikdami šią operaciją, nelygių nuliui racionalųjų skaičių aibėje sprendžiame lygtį

$$b \cdot x = a,$$

arba lygtį

$$x \cdot b = a$$

(a ir b — nelygūs nuliui racionalieji skaičiai), nes daugybos operacija aibėje $\mathbb{Q}$ komutatyvi.

Bendruoju atveju lygčių $b * x = a$ ir $x * b = a$ sprendiniai gali būti skirtingi

Aibėje A apibrėžta operacija $$ turi atvirkštinę operaciją, jei bet kuriems dviem tos aibės elementams a ir b egzistuoja aibėje A elementas x , su kuriuo teisingos lygybės*

$$b * x = x * b = a.$$

10 teorema. Jeigu aibėje A apibrėžta operacija $*$ asociatyvi ir komutatyvi, aibėje A yra operacijos $*$ neutralusis elementas bei kiekvienam aibės elementui simetriškas tos operacijos atžvilgiu elementas, tai operacija $*$ turi atvirkštinę operaciją.

Įrodymas. Tarkime, kad $a, b \in A$ ir $(\exists x \in A) b * x = a$. Jeigu elementui b simetriškas operacijos $*$ atžvilgiu elementas yra b' , tai iš lygybės $a = b * x$ išplaukia:

$$b' * (b * x) = (b' * b) * x = e * x = x,$$

$$b' * a = a * b'.$$

Taigi $x = a * b'$. Panašiai gauname lygties $y * b = a$ sprendinį $y = a * b'$. Lygčių $b * x = a$ ir $y * b = a$ sprendiniai sutampa, taigi operacija $*$ turi atvirkštinę operaciją.

Iš įrodymo akivaizdu, kad atvirkštinė operacija randama vienareikšmiškai.

Distributyvumo savybė. Tarkime, kad aibėje A apibrėžtos dvi algebrinės operacijos $\oplus$ ir $\odot$.

Jeigu $(\forall a, b, c \in A) (a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$, tai sakoma, kad operacija $\odot$ distributyvi operacijos $\oplus$ atžvilgiu iš dešinės.

Jeigu $(\forall a, b, c \in A) c \odot (a \oplus b) = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$, tai sakoma, kad $\odot$ distributyvi operacijos $\oplus$ atžvilgiu iš kairės.

Jeigu viena operacija distributyvi kitos operacijos atžvilgiu ir iš kairės, ir iš dešinės, tai ji vadinama *distributyvia* tos operacijos atžvilgiu.

Jeigu operacija komutatyvi, tai iš jos distributyvumo iš kairės išplaukia jos distributyvumas iš dešinės, ir atvirkščiai.

Pavyzdžiui, sveikųjų skaičių daugyba distributyvi sudėties atžvilgiu.

Uždaviniai

1. Patikrinkite, ar galima atlikti sudėtį ir daugybą šiuose sveikųjų skaičių aibės poaibiuose:

- 1) $A = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
- 2) $B = \{-6m \mid m \in \mathbb{Z}\}$,
- 3) $C = \{5x + 7y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$,
- 4) $D = \{-5x + 4y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$,
- 5) $G = \{-3x - 7y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$,
- 6) $H = \{-100, -99, -98, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 98, 99, 100\}$.

2. Patikrinkite, ar galima atlikti sudėtį ir daugybą šiuose racionaliųjų skaičių aibės poaibiuose:

- 1) $A = \{a/(2k) \mid k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, a - \text{nelyginis}\}$,
- 2) $B = \{2^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$,
- 3) $C = \{\dots, -m, -(m-1), -(m-2), \dots, -2, -1\}$,
- 4) $D = \left\{ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$,
- 5) $G = \{a \mid |a| \leq 1, a \in \mathbb{Q}\}$,
- 6) $H = \{a2^k \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. $\mathbb{R}$ – realiųjų skaičių aibė, $\mathbb{R}^2$ – jos Dekarto kvadratas, kuriame sudėtis apibrėžta lygybe

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Patikrinkite, ar uždari to veiksmo atžvilgiu šie aibės $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ poaibiai:

- 1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 2) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 3) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, 4) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, 5) $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$,
- 6) aibė vektorių (ka, kb) , $a, b \in \mathbb{Q}$, k – fiksuotas sveikasis skaičius.

4. Plokštumos posūkiu apie tašką aibėje F įvesta posūkių kompozicijos operacija. Posūkių kampų n° žymime R_n . Nustatykite, ar uždaros posūkių kompozicijos $R_n \cdot R_m = R_{n+m}$ atžvilgiu šios aibės:

- 1) $A = \{R_0, R_{180}\}$,
- 2) $B = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$,
- 3) $C = \{R_0, R_{60}, R_{120}, R_{180}, R_{240}, R_{300}\}$,

$$4) D = \{R_{300k/n} \mid k=0, 1, 2, \dots, n-1\},$$

$$5) G = \{R_0, R_{90}, R_{60}, R_{30}\},$$

$$6) H = \{R_{60k} \mid k=0, -1, -2, -3, -4, -5\}.$$

5. Sudarykite operacijos lenteles 4 uždavinio 1, 3 ir 6 dalims.

6. Pažymėkime simboliu $Z[\sqrt{2}]$ aibę realiųjų skaičių, kurie išreiškiami suma $m + n\sqrt{2}$, $m, n \in Z$. Apibrėšime šioje aibėje sudėtį ir daugybą taisyklėmis

$$(m+n\sqrt{2}) + (k+s\sqrt{2}) = (m+k) + (n+s)\sqrt{2},$$

$$(m+n\sqrt{2})(k+s\sqrt{2}) = (mk+2ns) + (ms+nk)\sqrt{2}.$$

Nustatykite šių veiksmų savybes.

7. Pažymėkime $Q(\sqrt{2})$ realiųjų skaičių aibę, kurioje veiksmai apibrėžiami pagal tas pačias taisykles, kaip ir 6 uždavinyje. Nustatykite, kokias savybes turi šie veiksmai aibėje $Q(\sqrt{2})$, ar esama jiems atvirkštinių veiksmų?

8. Aibėje $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ lentelė apibrėžkite „sudėtį“, kuri būtų komutatyvi, turėtų neutralųjį elementą ir atvirkštinę operaciją; sudarykite pastarosios lentelę.

9. Išsiaiškinkite vektorių sudėties savybes.

10. Aibėje $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ „daugybos“ operacija apibrėžta lentelė

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Išsiaiškinkite šios operacijos savybes. Raskite visus duotosios aibės poaibius, uždarus operacijos atžvilgiu.

11. Natūrinių skaičių aibėje apibrėžta algebrinė operacija $*(m, n) = D(m, n)$; čia $D(m, n)$ – skaičių m ir n bendrasis didžiausias daliklis. Išsiaiškinkite šios operacijos savybes.

12. Natūrinių skaičių aibėje apibrėžta algebrinė operacija $*(m, n) = M(m, n)$; čia $M(m, n)$ – skaičių m ir n bendrasis mažiausias kartotinis. Išsiaiškinkite šios operacijos savybes.

13. Aibėje $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sudėtis apibrėžta lentele

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Nustatykite šios „sudėties“ savybes. Jeigu ji turi atvirkštinę operaciją, tai sudarykite jos lentelę. Apskaičiuokite $(3 \oplus 5) \oplus (4 \oplus 6) \oplus 2$, $5 \oplus (5 \oplus 4 \oplus 2) \oplus 6$ ir išspręskite lygtis

$$5 \oplus x = 3 \oplus 4, \quad 6 \oplus x = 5, \quad x \oplus 3 = 4, \quad x \oplus 6 = 3.$$

14. Aibėje $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ „daugyba“ apibrėžta lentele

$\odot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Nustatykite, kokias savybes turi ši „daugyba“. Apskaičiuokite $3^2 \odot (4 \odot 6)$, $(3 \odot 5) \odot 4$, $(2 \odot 4^3) \odot (3 \odot 5)$. Išspręskite lygtis

$$5 \odot x = 4, \quad 4 \odot x = 6, \quad x \odot 3 = 2.$$

Jeigu ši operacija turi atvirkštinę, tai sudarykite jos lentelę.

15. Naudodamiesi 13 ir 14 uždavinių lentelėmis, 14 uždavinyje apibrėžtoje aibėje išspręskite lygtis:

$$(3 \oplus 6) \odot x = 4 \odot (4 \oplus 5),$$

$$3 \odot x \oplus (4 \oplus 1) \odot x = 5,$$

$$x \odot ((5 \odot 2) \oplus (3 \oplus 4)) = (3 \odot (2 \oplus 4)).$$

§21. Algebrinės struktūros

Algebrinė struktūra, arba tiesiog algebra, vadiname aibę su joje apibrėžta viena ar daugiau algebrinių operacijų.

Pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ su sudėtimi yra algebrinė struktūra, kurią žymėsime $(\mathbb{Z}, +)$. Sveikųjų skaičių aibė su daugyba – jau kita struktūra $(\mathbb{Z}, \cdot)$. Sveikųjų skaičių aibė su dviem operacijomis – sudėtimi ir daugyba – dar kita struktūra $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Algebrinės struktūras galima klasifikuoti pagal aibėje apibrėžtų operacijų skaičių, bet tokia klasifikacija nėra racionali. Naudingiau klasifikuoti atsižvelgiant į operacijų savybes.

Jau buvo minėta, kad baigtinėje aibėje, turinčioje n elementų, galima apibrėžti

$$n^n$$

skirtingų binarių operacijų. Tiek ir bus struktūrų $(A, *)$ su viena operacija, sudarytų iš aibės A . Struktūrų su dviem operacijomis bus dar daugiau. Kai aibė begalinė, joje galima apibrėžti be galo daug įvairių algebrinių operacijų.

Čia nagrinėsime tik kai kurias struktūras, taikytinas sprendžiant realius uždavinius. Viena iš tokių struktūrų yra *pusgrupis*.

*Algebrinė struktūra $(A, *)$ – aibė su viena operacija $*$ – vadinama pusgrupu, jei operacija $*$ yra asociatyvi:*

$$(\forall a, b, c \in A) \quad (a * b) * c = a * (b * c).$$

Jeigu ši operacija dar ir komutatyvi:

$$(\forall a, b \in A) \quad a * b = b * a,$$

tai pusgrupis vadinamas komutatyviuoju.

Pažymėsime, kad struktūros $(\mathbb{N}, +)$ ir $(\mathbb{N}, \cdot)$ yra pusgrupiai.

§22. Natūriniai skaičiai

Iki šiol naudojamos vidurinėje mokykloje suformuota *natūrinio skaičiaus* sąvoka. Čia tą sąvoką kiek pagilinsime.

Skaičiaus sąvoka – tai viena iš pagrindinių ir viena iš seniausių matematikos sąvokų. Nedaug tėra duomenų apie jos kilmę ir raidą. Sunku nustatyti, pavyzdžiui, kada atsirado sąvoka „penki“. Matyt, tada, kai žmonės suvokė, kad ir dešinėsios, ir kairiosios rankų pirštų aibės, ir bet kokios aibės, turinčios tiek elementų, kiek viena ranka pirštų, turi vieną bendrą savybę, bendrą charakteristiką, kuri nusakoma žodžiu „penki“. Visos minėtosios aibės yra ekvivalenčios, joms visoms bendra – elementų skaičius. Galime sakyti, kad *natūriniai skaičiai yra ekvivalenčių aibių charakteristikos, tų (baigtinių) aibių galios*.

Žinių, kurias apie natūrinius skaičius įgyjame mokykloje, pakanka daugeliui teorijos ir praktikos poreikių. Tačiau jų nepakanka kurti darniai aksiominei aritmetikos sistemai, kurioje kiekvienas teiginys būtų įrodomas remiantis aksiomomis ir iš jų gautomis išvadomis. Ar įmanoma taip aksiomatizuoti natūrinių skaičių teoriją? Taip.

Šiuo metu žinoma nemaža aksiomų sistemų. Populiariausia yra italų matematiko *Džiuzepės Peano* (Giuseppe Peano, 1859–1932) 1891 m. pasiūlytoji aksiomų sistema, kuri ir vadinama jo vardu.

Toliau pateikiame nežymiai pakeistą Peano aksiomų sistemą.

Natūriniais skaičiais vadiname elementus kiekvienos netuščios aibės N , kurioje apibrėžtas elementų sąryšis „eina po“, turintis šias savybes:

P.1. Yra toks skaičius (vadinsime jį vienetu ir žymėsime 1), kuris neina po jokio kito skaičiaus,

P.2. Po kiekvieno skaičiaus eina vienas ir tik vienas skaičius,

P.3. Kiekvienas skaičius eina ne daugiau kaip po vieno skaičiaus,

P.4. Bet kuris aibės N poaibis M , turintis savybes:

a) $1 \in M$,

b) jeigu skaičius a priklauso aibei M , tai ir po jo einantis skaičius priklauso aibei M ,

sutampa su aibe N .

Atkreipsime dėmesį, kad analogišką aksiomų sistemą žymus vokiečių matematikas *Richardas Dedekindas* (R. Dedekind, 1831–1916) suformulavo trimis metais anksčiau negu Peanas, tačiau literatūroje ji paprastai vadinama Peano vardu.

Iš pirmo žvilgsnio Peano aksiomų sistema atrodo pernelyg sudėtinga, tačiau iš tikrųjų ji darni ir paprasta, tiksliai atspindi esmines natūrinių skaičių savybes.

Apžvelkime Peano aksiomas. Pirmoji aksioma tvirtina, kad egzistuoja pirmasis natūrinis skaičius. Pažymėkime jį, kaip įprasta, „1“ (nors galime jį žymėti ir kitaip – tai nėra esminis dalykas). Antroji Peano aksioma teigia, kad po 1 eina vienas ir tik vienas natūrinis skaičius, kurį galima žymėti ženklu „2“. Trečiojoje aksiomoje pabrėžiama, kad tas skaičius 2 eina tik po 1 ir neina po jokio kito skaičiaus. Toliau iš antrosios aksiomos išplaukia, kad po

2 yra vienas ir tik vienas skaičius -3 , ir t. t. Gaunama įprasta natūrinių skaičių eilė

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...

Ketvirtoji Peano aksioma formaliai reiškia štai ką: jeigu, pradėję nuo 1, vis sakysime skaičių, einantį jau po vardinto skaičiaus, tai gausime ne ką kita, o natūrinių skaičių aibę. Sąryšis „eina po“ sutvarko aibę N tiesiškai. Be to, nesunku suvokti, kad *aibė N yra begalinė*. Jeigu tartume, kad koks nors natūrinių skaičių eilės skaičius n yra paskutinis, tai aibėje N nebūtų po n einančio skaičiaus, o tai prieštarautų antrajai aksiomai.

Prieš apibrėždami natūrinių skaičių sudėtį ir daugybą, pateiksime matematinės indukcijos teoremą ir iš jos išplaukiantį įrodymo metodą.

Matematinė indukcija yra seniai žinomas, bet nesenstantis įvairių teiginių įrodymo būdas. Pirmasis ją gerai suprato ir pritaikė italas abatas *T. Maurolikas* (D. T. Maurolyci), gyvenęs XVI a. Daugiau ar mažiau sąmoningai šis įrodymo būdas buvo vartojamas ir antikos laikais. Pirmą kartą matematinės indukcijos aksiomą kartu su kitomis aritmetikos aksiomomis tiksliai suformulavo R. Dedekindas 1888 m.

Indukcija vadinamas perėjimas nuo dalinių teiginių prie bendrųjų (priešingai dedukcijai – perėjimui nuo bendrųjų teiginių prie dalinių). Atliekant tyrimus indukcijos metodu, iš pavienių faktų daromos bendros išvados. Jei-gu bendra išvada daroma ištyrus visus galimus faktus, tai kalbama apie *pilnąją indukciją*. Kitu atveju indukcija bus *nepilnoji*, arba *empirinė*.

Pavyzdžiai. 1. Nubrėžkime lygčių $2x - y - 1 = 0$, $3x + 10y - 4 = 0$, $x + y = 0$ grafikus. Visi grafikai yra tiesės. Iš čia darome išvadą, kad bet kurios lygties $ax + by + c = 0$ grafikas yra tiesė.

2. Skaičius 71 baigiasi vienetu ir yra pirminis (t. y. nesidalija iš jokių natūrinių skaičių, išskyrus vienetą ir patį save). Tą patį galime pasakyti apie skaičius 41, 11. Darome išvadą – bet kuris natūrinis skaičius, kuris baigiasi 1, yra pirminis (?).

Gali atrodyti, kad antrajame pavyzdyje padarėme klaidingą išvadą todėl, kad atlikome per mažai eksperimentų. Tad išnagrinėkime dar vieną pavyzdį.

3. Dvinaryje $991n^2 + 1$ pakeiskime n paeiliui einančiais natūriniais skaičiais: 1, 2, 3, 4, ... Patikrinkime, imdami visas n reikšmes iki šimto, iki tūkstančio, iki milijono, iki milijardo, iki milijardo milijardų (jei tik įmanoma praktiškai tiek patikrinti) – dvinaris $991n^2 + 1$ nė vienu atveju nėra pilnasis kvadratas. Peršasi išvada, kad tas dvinaris nėra pilnasis kvadratas, kad ir koks būtų natūrinis skaičius n . Tačiau taip nėra. Šis dvinaris begalinį skaičių kartų tampa pilnuoju kvadratu. Mažiausias natūrinis skaičius n , su kuriuo gaunamas pilnasis kvadratas, yra

$$n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767.$$

Nepilnoji indukcija ne kartą yra suklaidinusi ir žymius matematikus. Prancūzų matematikas *Pjeras Ferma* (Pierre de Fermat, 1601–1665), patikrinęs, kad suma $2^{2^n} + 1$ yra pirminis skaičius, kai $n = 0, 1, 2, 3, 4$, išreiškė hipotezę, kad su visais natūriniais n ši suma yra pirminis skaičius. Deja, jau kai $n = 5$, tas teiginys klaidingas:

$$2^{2^5} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297 = 641 \cdot 6700417.$$

Nors iš nepilnosios indukcijos gali išplaukti ir klaidingos išvados, tačiau ji plačiai taikoma įvairiose mokslo srityse. Mokslininkai, remdamiesi nepilnąja indukcija, atrado daug dėsnių, kurie vėliau buvo įrodyti.

Pilnosios indukcijos būdu, skirtingai nuo nepilnosios, gaunamos teisingos išvados, bet tuo būdu galime tirti tik baigtines aibes.

11 teorema (matematinės indukcijos principas). *Teiginys* $(\forall n \in \mathbb{N}) T(n)$ teisingas, jeigu:

1) $T(1)$ – teisingas teiginys,

2) $(\forall m \in \mathbb{N}) T(m) \Rightarrow T(m')$ – teisingas teiginys.

Ženklų a' čia ir toliau žymėsime po a einantį natūrinį skaičių.

Įrodymas. Pažymėkime M aibę tų natūrinių skaičių n , su kuriais $T(n)$ teisingas: $M = \{n \mid T(n)\}$. Reikia įrodyti, kad $M = \mathbb{N}$.

Remdamiesi teoremos 1 sąlyga, turime $1 \in M$. Jeigu koks nors $m \in M$, t. y. jeigu $T(m)$ teisingas, tai pagal teoremos 2 sąlygą ir teisingos išvados dėsnį $T(m')$ – teisingas teiginys. Taigi $m' \in M$. Iš 4 Peano aksiomos išplaukia, kad $M = \mathbb{N}$.

Iš šios teoremos išplaukiantis teiginių $(\forall n \in \mathbb{N}) T(n)$ įrodymo metodas (schema) būtų šitoks:

1) tikrinama, ar $T(1)$ teisingas. Jeigu $T(1)$ neteisingas, tai ir $(\forall n \in \mathbb{N}) T(n)$ neteisingas;

2) jeigu $T(1)$ teisingas, tai tikrinama, ar implikacija $T(m) \Rightarrow T(m')$ teisinga.

Jeigu $T(1)$ ir minėtoji implikacija yra teisingi, tai ir teiginys $(\forall n \in \mathbb{N}) T(n)$ teisingas.

Taikydami matematinės indukcijos principą, turime tikrinti abi sąlygas. Pateiksime pamokantį pavyzdį, kuriame mėginama „išsiversti“ tik su antrąja sąlyga.

Pavyzdys. „Įrodysime“, kad natūrinis skaičius sutampa su skaičiumi, einančiu po jo. Imkime bet koki natūrinį skaičių n ir tarkime, kad $n = n + 1$. Prie abiejų lygybės pusių pridėję po 1, gauname teisingą lygybę $n + 1 = n + 2$, t. y. remdamiesi tuo, kad teiginys teisingas skaičiui n , įrodėme, jog jis teisingas skaičiui $n + 1$. Vadinasi, (?) teiginys teisingas visiems natūriniais skaičiais. Iš čia išplaukia, kad visi natūriniai skaičiai tarp savęs lygūs...

§23. Natūrinių skaičių sudėtis ir jos savybės

Pirmoji pažintis su natūriniais skaičiais prasideda tada, kai paaiškėja, kad prie 1 pridėję 1 gauname po jo einantį skaičių 2, prie 2 pridėję 1 gauname po 2 einantį skaičių 3 ir t. t. Tuo remdamiesi ir apibrėšime natūrinių skaičių sudėtį.

Natūrinių skaičių sudėtis apibrėžiama taisyklėmis:

S.1. $(\forall n \in \mathbb{N}) n' = n + 1$,

S.2. $(\forall m, n \in \mathbb{N}) m + n' = (m + n)'$.

Nesigilindami į išvedžiojimus, kurie įtikintų, kad šios abi taisyklės tikrai apibrėžia sudėtį – funkciją $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$, nustatysime, jog natūrinių skaičių sudėtis yra asociatyvi. Kartu pailiustruosime ir matematinės indukcijos metodo galimybes.

Įrodysime, kad natūrinių skaičių sudėtis yra asociatyvi:

$$(\forall k, m, n \in \mathbb{N}) (k + m) + n = k + (m + n).$$

Užrašytasis teiginys ekvivalentus šitokiam:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall k, m \in \mathbb{N}) (k + m) + n = k + (m + n).$$

Pažymėjus $T(n)$ predikatą

$$(\forall k, m \in \mathbb{N}) (k + m) + n = k + (m + n),$$

įrodomasis teiginys virsta šitokiu:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) T(n).$$

Jį galima įrodinėti matematinės indukcijos metodu.

$$1. T(1) \equiv (\forall k, m \in \mathbb{N}) (k + m) + 1 = k + (m + 1)$$

teisingas teiginys, nes pagal S.1

$$(k + m) + 1 = (k + m)',$$

pagal S.2

$$(k + m)' = k + m'.$$

Remdamiesi S.3, gauname

$$k + m' = k + (m + 1).$$

2. Tarkime, kad teisingas teiginys

$$T(s) \equiv (\forall k, m \in \mathbb{N}) (k + m) + s = k + (m + s).$$

Iš eilės remdamiesi sudėties taisyklėmis, gauname:

$$(k + m) + s' = ((k + m) + s)' \text{ (remiamės S.2),}$$

$$((k + m) + s)' = (k + (m + s))' \text{ (pagal indukcijos prielaidą),}$$

$$(k + (m + s))' = k + (m + s)' \text{ (vėl remiamės S.2),}$$

$$k + (m + s)' = k + (m + s') \text{ (taip pat pagal S.2).}$$

Taigi $(k + m) + s' = k + (m + s')$.

Įrodėme, kad

$$T(s) \Rightarrow T(s')$$

teisingas teiginys su bet kuriuo natūriniu s . Matematinės indukcijos abi sąlygos išpildytos, teiginys apie natūrinių skaičių sudėties asociatyvumą įrodytas.

§24. Natūrinių skaičių daugyba ir jos savybės

Pateikiame tokį natūrinių skaičių daugybos apibrėžimą.

Natūrinių skaičių daugyba apibrėžiama taisyklėmis:

$$D.1. (\forall m \in \mathbb{N}) m \cdot 1 = m,$$

$$D.2. (\forall m, n \in \mathbb{N}) m \cdot n' = mn + m.$$

Neįrodinėdami, kad šios dvi taisyklės tikrai apibrėžia binarę operaciją natūrinių skaičių aibėje — funkciją

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N},$$

aptarsime jos asociatyvumą, komutatyvumą ir distributyvumą sudėties atžvilgiu.

Natūrinių skaičių daugyba distributyvi natūrinių skaičių sudėties atžvilgiu:

$$(\forall k, m, n \in \mathbf{N}) (k+m)n = kn + mn,$$

$$n(k+m) = nk + nm.$$

Įrodymas. Įrodysime tik pirmąjį iš tų dviejų teiginių, antrasis išplaukia iš daugybos komutatyvumo, apie kurį kalbėsime toliau.

Pažymėję $T(n)$ predikatą $(\forall k, m \in \mathbf{N}) (k+m)n = kn + km$, pirmąjį teiginį užrašome šitaip: $(\forall n \in \mathbf{N}) T(n)$.

1) $T(1) \equiv (\forall k, m \in \mathbf{N}) (k+m) \cdot 1 = k \cdot 1 + m \cdot 1$ yra teisingas teiginys, nes pagal D.1 $(k+m) \cdot 1 = k+m = k \cdot 1 + m \cdot 1$.

2) Tarkime, kad $s \in \mathbf{N}$ ir teiginys $T(s) \equiv (\forall k, m \in \mathbf{N}) (k+m)s = ks + ms$ teisingas. Tada:

$$\begin{aligned} (k+m)s' &= (k+m)s + (k+m) = (ks + ms) + (k+m) = \\ &= ((ks + ms) + k) + m = (ks + (ms + k)) + m = \\ &= (ks + (k + ms)) + m = ((ks + k) + ms) + m = \\ &= (ks + k) + (ms + m) = ks' + ms'. \end{aligned}$$

Įrodinėdami rėmėmės daugybos apibrėžimu, indukcijos prielaida, sudėties asociatyvumo ir komutatyvumo savybėmis. Taigi $(\forall n \in \mathbf{N}) T(s) \Rightarrow T(s')$. Lieka remtis matematinės indukcijos teorema.

Panašiai galima įrodyti, kad natūrinių skaičių daugyba yra komutatyvi bei asociatyvi. Iš daugybos apibrėžimo taisyklės D.1 ir daugybos komutatyvumo išplaukia, jog natūrinių skaičių daugyba turi neutralųjį elementą.

§25. Kai kurios natūrinių skaičių aibės savybės. Matematinės indukcijos teoremos

Detaliai išnagrinėti struktūrą $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ — skaičių sistemų kurso uždavinys. Čia aptarsime tik keletą natūrinių skaičių savybių.

Sąryšį „mažiau“ aibėje $\mathbf{N}$ apibrėžiame šitaip: sakome, kad natūrinis skaičius m mažesnis už natūrinį skaičių n , kai yra toks natūrinis skaičius k , su kuriuo teisinga lygybė

$$m + k = n.$$

Tuo atveju rašome $m < n$.

Šis sąryšis, kaip galime įrodyti, yra tiesinės tvarkos sąryšis aibėje $\mathbf{N}$. Tuo atveju, kai $m < n$, galime apibrėžti natūrinių skaičių n ir m skirtumą $n - m$. Juo vadinamas natūrinis skaičius k , su kuriuo teisinga lygybė $m + k = n$.

Paminėsime keletą svarbesnių teoremų, kurios įrodomos remiantis Peano aksiomomis ir iš jų išplaukiančiais teiginiais.

1. Archimedo aksioma. *Bet kuriai natūrinių skaičių a, b porai egzistuoja toks natūrinis skaičius n , su kuriuo*

$$a \cdot n > b.$$

Teiginį galima įrodyti remiantis Peano aksiomomis, bet iš tradicijos jis tebedvadinamas *Archimedo aksioma*.

Panaši aksioma teisinga ir sveikiesiems, racionaliesiems, realiesiems skaičiams. Teorinė Archimedo aksiomos reikšmė gana didelė. Daug aritmetikos dėsnių (pvz., Euklido algoritmas, dviejų atkarpų bendrojo mato radimas ir kt.) pagrįsti Archimedo aksioma.

2. Mažiausiojo skaičiaus principas. *Kiekvienas netuščias natūrinių skaičių aibės poaibis turi mažiausią elementą.*

Šis principas dar vadinamas *visiško sutvarkymo aksioma*.

3. Didžiausiojo skaičiaus principas. *Kiekvienas netuščias baigtinis natūrinių skaičių aibės poaibis turi didžiausią elementą.*

Galime rasti ne vieną aibę – Peano aksiomų sistemos interpretaciją. Tačiau visos tos aibės skiriasi tik elementų užrašais, joms būdingi esminiai natūrinių skaičių aibės N bruožai: aibė yra begalinė, turi pirmąjį elementą, visi jos nariai susieti tvarkos sąryšiu – bet kuris elementas (išskyrus pirmąjį) eina po vieno ir tik vieno elemento.

Apibendrinsime matematinės indukcijos teoremą. Pateiksime tris plačiai taikomus jos bendrinius.

12 teorema (sustiprintasis matematinės indukcijos principas). *Jeigu*

$$1) T(1),$$

$$2) (\forall k \in N) (T(1) \wedge \dots \wedge T(k)) \Rightarrow T(k+1)$$

– *teisingi teiginiai, tai teisingas ir teiginys*

$$(\forall n \in N) T(n).$$

Įrodymas. Pažymėkime raide A aibę tų natūrinių skaičių n , su kuriais predikatas $T(n)$ yra neteisingas teiginys:

$$A = N \setminus \{n \mid T(n)\}.$$

Užtenka įrodyti, kad $A = \emptyset$.

Tarkime priešingai, kad $A \neq \emptyset$. Kadangi $A \subset N$, tai pagal mažiausiojo skaičiaus principą aibėje A yra mažiausias natūrinis skaičius m . Teiginys $T(1)$ teisingas, tad $m > 1$. Taigi $T(m)$ neteisingas, o $(\forall k < m) T(k)$ teisingas. Bet tada, remiantis 2 sąlyga, išeina, kad teiginys $T(m)$ teisingas. Gavome prieštaravimą. Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Matematinės indukcijos būdu pamėginkime įrodyti nelygybę $2^n > 2n+1$. Pati nelygybė abejonių nekelia: didėjant n , laipsnis 2^n didėja sparčiau negu $2n+1$. Lengvai galime patikrinti abiejų indukcijos principų antrąją sąlygą, bet negalime remtis pirmąja. Priežastis paprasta: su dviem pirmaisiais natūriniais skaičiais $n=1$ ir $n=2$ ši nelygybė neteisinga, su kitais – teisinga. Todėl formaliai negalime taikyti nė vieno iš įrodytųjų indukcijos principų. Išėitis – *apibendrintasis indukcijos principas*, nereikalaujantis, kad teiginys būtų teisingas, kai $n=1$.

13 teorema (apibendrintasis matematinės indukcijos principas). *Jeigu*

$$1) T(m),$$

$$2) (\forall k \geq m) T(k) \Rightarrow T(k+1)$$

– *teisingi teiginiai, tai teisingas ir teiginys*

$$(\forall n \geq m) T(n).$$

Įrodymas. Pažymėkime raide A aibę didesnių už $m-1$ natūrinių skaičių, su kuriais predikatas $T(n)$ – neteisingas teiginys. Teorema bus įrodyta, jei įrodysime, kad $A = \emptyset$.

Tarkime, kad $A \neq \emptyset$. Pagal mažiausiojo skaičiaus principą aibėje A yra mažiausias skaičius, kurį žymėkime s . Kadangi $T(m)$ – teisingas teiginys, tai $s > m$. Išeina, kad $(\forall m \leq k < s) T(k)$ – teisingas teiginys. Taigi $T(s-1)$ teisingas, o $T(s)$ neteisingas. Tačiau pagal teoremos 2 sąlygą ir teisingos išvados dėsnį išplaukia, kad $T(s)$ – teisingas teiginys. Gautasis prieštaravimas rodo, kad $A = \emptyset$.

14 teorema (apibendrintas sustiprintasis matematinės indukcijos principas). *Jeigu*

$$1) T(m),$$

$$2) (\forall k \geq m) (T(m) \wedge \dots \wedge T(k)) \Rightarrow T(k+1)$$

– *teisingi teiginiai, tai teisingas ir teiginys*

$$(\forall n \geq m) T(n).$$

Siūlome skaitytojui pačiam įrodyti šią teoremą.

Pavyzdžiai. 1. Įrodysime teiginį: jeigu $k_0=2$, $k_1=3$ ir su bet kuriuo natūriniu n teisinga lygybė $k_{n+1}=3k_n-2k_{n-1}$, tai $k_n=2^n+1$.

Įrodymas. Imkime $n=1$. Gausime $k_2=3k_1-2k_0=9-4=2^2+1$. Dabar sakykime, kad įrodomoji lygybė teisinga su visais natūriniais skaičiais, mažesniais už $n+1$: $k_n=2^n+1$, $k_{n-1}=2^{n-1}+1$. Tuomet $k_{n+1}=3k_n-2k_{n-1}=3(2^n+1)-2(2^{n-1}+1)=3 \cdot 2^n+3-2^n-2=2^{n+1}+1$.

Teiginį įrodėme pasinaudoję sustiprintuoju matematinės indukcijos principu. Vien prielaidos, kad teiginys teisingas skaičiui n , nepakako, teko remtis ir prielaida, kad jis teisingas skaičiui $n-1$.

2. Įrodysime, kad nelygybė

$$(1+p)^n > 1+np$$

teisinga, jei $p > 0$ ($p \in \mathbb{R}$) ir $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Nelygybė teisinga, kai $n=2$. Tarkime, kad ji teisinga ir kai rodiklis yra natūrinis skaičius $n > 2$. Tuomet

$$\begin{aligned} (1+p)^{n+1} &= (1+p)(1+p)^n > (1+p)(1+np) = \\ &= 1 + (n+1)p + np^2 > 1 + (n+1)p. \end{aligned}$$

Taigi iš prielaidos, kad įrodomoji nelygybė teisinga su natūriniu skaičiumi n , išplaukia, jog ji teisinga ir su skaičiumi $n+1$. Remiantis apibendrintuoju matematinės indukcijos principu, įrodomoji nelygybė teisinga su visais natūriniais skaičiais $n \geq 2$.

§26. Niutono binomo formulė

Šiame paragrafe, remdamiesi matematinės indukcijos principu, įrodysime dvinarinio kėlimo natūriniu laipsniu *Niutono formulę* ir jos bendrinį – vadinamąją *polinomine formulę*.

Prieš tai aptarsime žymėjimus.

Tarkime, kad k , m ir n – natūriniai skaičiai. Tada:

$$\sum_{k=n}^m a_k = \begin{cases} a_n + a_{n+1} + \dots + a_m, & \text{kai } m > n, \\ a_n, & \text{kai } m = n, \\ 0, & \text{kai } m < n, \end{cases}$$

$$\prod_{k=n}^m a_k = \begin{cases} a_n a_{n+1} \dots a_m, & \text{kai } m > n, \\ a_n, & \text{kai } m = n, \\ 1, & \text{kai } m < n, \end{cases}$$

$$\sum_{k=n}^m a = (m - n + 1) a, \quad \prod_{k=n}^m a = a^{m-n+1}, \quad \text{kai } m \geq n;$$

čia Σ sutrumpintai žymima kelių numeruotų dėmenų suma, o Π – numeruotų dauginamųjų sandauga. Tuščia suma, kurioje nėra dėmenų, laikoma lygia 0, o tuščia sandauga – vienetui.

Be $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, vartosime dar ir šitokius žymėjimus:

$$(2m+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m-1) \cdot (2m+1),$$

$$(2m)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2m-2) \cdot 2m.$$

Nesunku patikrinti, kad teisingi tokie sąryšiai:

$$(2m)! = (2m)!! (2m-1)!!,$$

$$\frac{n!}{m!} = (m+1)(m+2) \dots n, \quad n \geq m.$$

15 teorema. *Lygybė*

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k}$$

teisinga su visomis realiomis a ir x reikšmėmis ir su kiekvienu natūriniu skaičiumi n .

Ši formulė vadinama *Niutono binomo formule* (Isaac Newton, 1642–1727, anglų matematikas). Skaičiai C_n^k dažnai dar vadinami *binominiais koeficientais*.

Įrodinėsime indukcijos metodu. Kai $n=1$,

$$x+a = \sum_{k=0}^1 C_1^k a^k x^{1-k} = C_1^0 x + C_1^1 a = x+a.$$

Tarsime, kad formulė teisinga, kai laipsnio rodiklis — bet kuris natūrinis skaičius n , ir įrodysime, kad ji teisinga ir kai rodiklis lygus $n+1$:

$$\begin{aligned}(x+a)^{n+1} &= (x+a) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k x^{n+1-k} + \\ &+ \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} x^{n-k} = C_n^0 a^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^k a^k x^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} x^{n-k}.\end{aligned}$$

Pakeiskime abiejų sumų indeksų žymėjimus: pirmoje sumoje imkime $k=s$, antroje $k=s-1$. Gausime:

$$\begin{aligned}(x+a)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{s=1}^n C_n^s a^s x^{n+1-s} + \sum_{s=1}^{n+1} C_n^{s-1} a^s x^{n+1-s} = \\ &= x^{n+1} + \sum_{s=1}^n (C_n^s + C_n^{s-1}) a^s x^{n+1-s} + C_n^n a^{n+1}.\end{aligned}$$

Kadangi

$$C_n^s + C_n^{s-1} = C_{n+1}^s,$$

tai

$$(x+a)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{s=1}^n C_{n+1}^s a^s x^{n+1-s} + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} = \sum_{s=0}^{n+1} C_{n+1}^s a^s x^{n+1-s}.$$

Paėmę Niutono formulėje $a=x=1$, gauname kombinatorikos tapatybę

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

Kadangi C_n^k yra aibės $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ poaibių, turinčių k elementų, skaičius, tai pastaroji suma lygi visų poaibių skaičiui. Taigi n elementų aibė turi 2^n skirtingų poaibių (įskaitant pačią aibę ir tuščiąją aibę).

Paėmę Niutono formulėje $a=-1, x=1$, gausime dar vieną įdomią kombinatorikos tapatybę:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0.$$

Niutono binomo formulę galima apibendrinti ir didesniai dėmenų skaičiui. Įrodysime vadinamąją *polinomine teorema*.

16 teorema. *Su bet kuriuo natūriniu n teisinga lygybė*

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}. \quad (2.1)$$

Rodikliai $n_1, n_2, \dots, n_m$, nepriklausomai vienas nuo kito, gali įgyti visas sveikąsias neneigiamas reikšmes, bet tokias, kad būtų tenkinama sąlyga $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$.

Įrodymas. Sudauginę n daugianarių $x_1 + x_2 + \dots + x_m$, gausime sumą dėmenų, kurių kiekvieną sudarys n dauginamųjų — po vieną iš kiekvieno daugianario. Pakeitus vienodų dėmenų sandaugas laipsniais, kairiojoje (2.1) lygybės pusėje parašytoji suma bus lygi $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$ pavidalo dėmenų sumai. Visų rodiklių suma kiekviename naryje turi būti lygi n , t. y. $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$, nes kiekvienas dėmuo yra n daugiklių (įskaitant ir sutampančius) sandauga. Rasime, kiek yra dėmenų, kuriuose daugikliai x_k pakelti tais pačiais laipsniais n_k . Tarkime, kad daugianariai, kuriuos reikia sudauginti, sunumeruoti nuo 1 iki n . Ta pačia tvarka surašysime dėmenis, paimtus iš tų daugianarių sandaugai sudaryti.

Dėmenį

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m} \quad (2.2)$$

galime užrašyti šitaip:

$$\underbrace{x_1 x_1 \dots x_1}_{n_1} \underbrace{x_2 x_2 \dots x_2}_{n_2} \dots \underbrace{x_m x_m \dots x_m}_{n_m}. \quad (2.3)$$

Matome, kad iš pirmųjų n_1 daugianarių į (2.2) sandaugą įėjo jų dėmuo x_1 , iš n_2 daugianarių į tą pačią sandaugą įėjo jų dėmuo x_2 ir t. t., iš paskutinių n_m daugianarių įėjo jų dėmuo x_m . Bet kaip sukeitę vietomis (2.3) sandaugos dauginamuosius, gausime kitokią jų išsidėstymą, atitinkantį kitą būdą (2.3) sandaugai sudaryti. Kadangi (2.3) sandaugos dauginamuosius galime sukeisti vietomis $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ būdų, tai ir (2.2) sandaugą galime sudaryti tiek pat būdų. Lieka patikrinti, ar (2.1) formulėje koeficientas prie dėmens

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

ir yra $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Teorema įrodyta.

Skaičiai $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ vadinami *polinominiais koeficientais*.

Rasime, pavyzdžiui, daugianario $(x + y + z + u)^3$ koeficientą prie x^2u . Iš (2.1) formulės išplaukia, kad tas koeficientas lygus

$$\frac{3!}{2!0!0!1!} = 3.$$

Niutono binomo formulę dar anksčiau buvo įrodęs *Jokūbas Bernulis* (Jakob Bernoulli, 1654–1705, šveicarų matematikas). Niutonas pritaikė tą formulę binomams su trupmeniniais ir neigiamais rodikliais. Tais atvejais binomas išskleidžiamas begaline eilute. Niutono binomo formulę galima naudotis apytiksliai skaičiuojant, ypač tada, kai $x + a$ mažai skiriasi nuo 1. Jeigu $x = 1$, o a — mažas dydis, tai apytiksliai galime imti

$$(1 + a)^n \approx 1 + C_n^1 a = 1 + na.$$

Šią formulę galima taikyti ir kai n — racionalusis skaičius.

Uždaviniai

Išrodykite matematinės indukcijos metodu.

$$16. 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

$$17. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$18. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$19. 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$20. 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$$21. 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

$$22. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

$$23. 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

$$24. \sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \dots + n \sin n\alpha = \frac{(n+1) \sin n\alpha - n \sin ((n+1)\alpha)}{4 \sin^2 (\alpha/2)}.$$

$$25. \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin ((n+1/2)\alpha)}{\sin (\alpha/2)} \sin (n\alpha/2).$$

$$26. 2^n > n^2 \text{ (kai } n > 4).$$

$$27. \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

$$28. \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$$29. 2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n.$$

$$30. \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

31. Apskaičiuokite:

$$1) (\sqrt{5} - \sqrt{3})^8, \quad 2) (\sqrt{2} + \sqrt{3})^5, \quad 3) (3 - \sqrt{2})^{10}, \quad 4) (1 - x^2)^8.$$

32. Išspręskite lygtis:

$$1) C_x^x - 2 + 2x = 9, \quad 2) C_x^x - \frac{2}{x} = x^2 - 13, \quad 3) C_n^{n-2} = C_n^3.$$

33. Raskite binomo $(x + x^{-1})^{10}$ skleidinyje koeficientą prie x^6 .

Raskite apytiksles reikšmes šių reiškinių.

$$34. a) \sqrt[5]{0,99}, \quad b) (0,98)^{-1/2}, \quad c) (0,99)^3.$$

$$35. a) \sqrt[3]{1,01}, \quad b) \frac{1}{0,97}, \quad c) (0,98)^4.$$

$$36. a) \sqrt[3]{1,07}, \quad b) \sqrt[3]{1 + \sqrt{0,24}}, \quad c) (0,99)^{-2/3}.$$

37. Įrodykite tapatybę

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \dots + C_n^n C_m^0 = C_{m+n}^p.$$

N u r o d y m a s. Pakeiskite tapatybėje $(x+1)^n(x+1)^m = (x+1)^{m+n}$ kiekvieną dvinarį o laipsnį Niutono binomo formule ir sulygininkite koeficientus prie x^{n+m-p} .

38. Įrodykite tapatybę

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

§27. Grupės. Paprasčiausios grupių savybės

Iš visų algebrinių struktūrų $(A, *)$ — aibių A su viena algebrine operacija $*$ — išskirsime ir išsamiau aptarsime *grupes*.

Tarkime, kad A yra netuščia aibė, kurioje apibrėžta algebrinė binarė operacija $*$:

$$A \times A \xrightarrow{*} A.$$

*Algebrinė struktūra $G=(A, *)$ vadinama grupe, jeigu:*

G.1. Operacija $$ yra asociatyvi,*

G.2. Operacija $$ turi neutralųjį elementą,*

G.3. Kiekvienas aibės A elementas turi toje pačioje aibėje elementą, simetrišką operacijos $$ atžvilgiu.*

Jeigu, be to,

G.4. Operacija $$ yra ir komutatyvi, tai grupė vadinama komutatyviąja, arba Abelio, grupe.*

Aibė A vadinama grupės $G=(A, *)$ *bazine aibe*. Dažnai sakoma „aibė A yra grupė operacijos $*$ atžvilgiu“. Jeigu savaime aišku, apie kokią operaciją kalbama, tai tiesiog sakoma „grupė A “.

Grupė, kurioje apibrėžta daugyba, vadinama *multiplikacine*, o grupė, kurioje apibrėžta sudėtis, — *adicine*. Jeigu grupės bazinė aibė yra baigtinė, tai ir grupė vadinama baigtine, priešingu atveju — begaline.

Pavyzdžiai. 1. Sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ yra komutatyvioji grupė sudėties atžvilgiu, tai gi struktūra $(\mathbb{Z}, +)$ — grupė. Tuo nesunku įsitikinti prisiminus sveikųjų skaičių sudėties savybes.

2. Nelygių nuliui racionaliųjų skaičių aibė yra komutatyvioji grupė daugybos atžvilgiu.

3. Struktūra $(\mathbb{N}, +)$ nėra grupė, nes natūrinių skaičių sudėtis neturi neutraliojo elemento (nulio).

4. Struktūra $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nėra grupė, nes racionaliųjų skaičių aibės $\mathbb{Q}$ elementas 0 neturi atvirkštinio elemento daugybos atžvilgiu. Tačiau aibė $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sudaro komutatyviąją multiplikacinę grupę. Visa aibė $\mathbb{Q}$ sudaro komutatyviąją adicinę grupę.

Grupės sąvoka palyginti nesena. Grupių teorijos pradininkas yra prancūzų matematikas *Evaristas Galua* (Evariste Galois, 1811—1832).

Galua nagrinėjo beveik vien *keitinių grupes*, o mums žinomą *abstrakčiosios grupės* sąvoką 1854 m. įvedė anglų matematikas *Artūras Kelis* (Artur Cayley, 1821—1895). Nuo 19 a. vidurio algebroje, iki tol nagrinėjusioje daugiausia algebrines lygtis, įsigali algebrinės struktūros. Grupių teorijos idėjas imta sėkmingai taikyti geometrijoje, mechanikoje, teorinėje bei kristalų fizikoje ir daugelyje kitų mokslo sričių.

Nagrinėsime paprasčiausias grupių savybes.

Ketrios pagrindinės grupių savybės G.1—G.4, nurodytos apibrėžime, kartais vadinamos *grupių aksiomomis*. Kitos savybės gaunamos gana paprastai.

Kad būtų trumpiau, operacijos ženklą kartais praleisime ir rašysime tiesiog $a * b = ab$. Jeigu toji operacija yra sudėtis, tai užrašas ab reikš ne elementų a ir b sandaugą, bet jų sumą.

1. *Asociatyvumo savybė* $(ab)c=a(bc)$ rodo, kad skliaustų padėtis neturi reikšmės, todėl juos galima praleisti. Ši savybė teisinga ir esant didesniai elementų skaičiui.

Kai grupė yra komutatyvi, elementus reiškinyje abc galima keisti vietomis, pvz., $abc=bca=bac$ ir t. t. Tuo atveju galima išvesti formules, analogiškas žinomoms algebros formulėms.

Sakykime, kad a – kuris nors grupės elementas. Pažymėkime

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Jeigu b – taip pat grupės elementas, tai

$$\begin{aligned} (ab)^n &= \underbrace{(ab)(ab) \dots (ab)}_n = abab \dots ab = \underbrace{aa \dots a}_n \underbrace{bb \dots b}_n = \\ &= \underbrace{(aa \dots a)}_n \underbrace{(bb \dots b)}_n = a^n b^n. \end{aligned}$$

2. *Grupė turi tik vieną neutralųjį elementą.*

Tarus, kad grupė turi du neutraliuosius elementus e_1 ir e_2 , išeity, kad tų elementų kompozicija $e_1 e_2$ lygi ir e_1 (nes e_2 – neutralusis elementas), ir e_2 (nes e_1 – neutralusis elementas). Taigi $e_1 = e_2$.

3. *Kiekvienas grupės (bazinės aibės) elementas a turi tik vieną jam simetrišką elementą.*

Iš tikrųjų, jeigu elementas a turėtų grupėje du simetriškus elementus a'_1 ir a' , tai būtų

$$a'_1 (aa') = a'_1 e = a'_1,$$

$$a'_1 (aa') = (a'_1 a) a' = ea' = a'.$$

Iš operacijos asociatyvumo išplaukia, kad $a' = a'_1$.

Iš 3 savybės išeina, kad lygybės $ab=ac$ ir $ba=ca$ galima suprastinti ir gauti lygybę $b=c$.

4. *Jeigu a ir b – grupės elementai, tai toje grupėje yra tokie elementai x ir y , su kuriais teisingos lygybės $bx=a$ bei $yb=a$. Jeigu grupė komutatyvi, tai visuomet $x=y$.*

Nesunku įsitikinti, kad x ir y randami vienareikšmiškai ir išreiškiami šitaip:

$$x=b'a, \quad y=ab'.$$

Iš 4 savybės išplaukia: jeigu grupė yra komutatyvi, tai joje egzistuoja atvirkstinė operacija.

5. *Grupės elementui a simetriško elemento a' simetriškasis elementas yra a , t. y. $(a')' = a$.* Tai išplaukia iš simetriškojo elemento apibrėžimo.

6. *Jeigu $a_1, a_2, \dots, a_n$ yra grupės elementai, tai*

$$(a_1 a_2 \dots a_n)' = a'_n a'_{n-1} \dots a'_1.$$

Irodymas paprastas, pagrįstas operacijos asociatyvumo savybe.

Anksčiau apibrėžėme grupės elemento a laipsnį a^n su natūriniu rodikliu n . Dabar apibrėšime laipsnius su nuliniu ir sveikuoju neigiamu rodikliais:

$$a^{-n} = \underbrace{a' a' \dots a'}_n, \quad a^0 = e;$$

čia raide e , kaip ir anksčiau, žymime grupės neutralųjį elementą.

7. Jeigu a – grupės elementas, m ir n – sveikieji skaičiai, tai teisingos lygybės

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (a^n)' = a^{-n}.$$

Įrodymai paprasti. Pateiksime įrodymą tik tuo atveju, kai $m = -k$, n ir k – natūriniai skaičiai, be to, $k > n$.

$$a^m a^n = a^{-k} a^n = \underbrace{a' a' \dots a'}_k \underbrace{a a \dots a}_n = \underbrace{a' a' \dots a'}_{k-n} = a^{n-k} = a^{m+n}.$$

8. Komutatyviosios grupės elementų a ir b santykį a/b galima apibrėžti lygybe

$$a/b = ab'.$$

Teisingos tokios veiksmų su santykiais taisyklės:

$$(a/b)(c/d) = ac/bd,$$

$$(a/b)' = b/a,$$

$$(a/b)/(c/d) = ad/bc;$$

čia a , b , c , d – grupės elementai.

Kai grupė adicinė, pastaroji lygybė būtų taip užrašoma:

$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c).$$

Nesunku užrašyti ir kitas čia pateiktas lygybes, kai grupė yra adicinė.

§28. Grupių izomorfizmai

Yra labai panašios struktūros grupių, turinčių vienodas savybes. Tokias grupes galima atvaizduoti vienas kitose (arba vienas į kitas) apibrėžtas savybes turinčiomis funkcijomis, vadinamomis *homomorfizmais* (izomorfizmais).

Jeigu $G = (A, *)$ ir $G_1 = (A_1, *_1)$ yra grupės, tai funkcija

$$f: A \rightarrow A_1$$

vadinama grupės G homomorfizmu į grupę G_1 , jei kiekvienai aibės A elementų porai a, b teisinga lygybė

$$f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$$

ir $E_f = A_1$.

Pavyzdžiui, grupės $(Z, +)$ bazinę aibę Z atvaizduokime į grupės $(2Z, +)$ bazinę aibę $2Z$ šitaip:

$$m \xrightarrow{f} 2m \quad (m \in Z).$$

Kadangi

$$f(m+n) = 2(m+n) = 2m+2n = f(m) + f(n),$$

tai nurodytoji funkcija f yra homomorfizmas.

Jeigu grupės G homomorfizmas į grupę G_1 yra abipus vienareikšmis, tai jis vadinamas grupių G ir G_1 izomorfizmu.

Taigi izomorfizmas yra bijekcija.

17 teorema. Jeigu funkcija f yra grupės $G=(A, *)$ izomorfizmas į grupę $G_1=(A_1, *_1)$, tai jai atvirkštinė funkcija f' yra grupės G_1 izomorfizmas į grupę G .

Irodymas. Kadangi f yra bijekcija, tai egzistuoja jai atvirkštinė funkcija f' , kuri yra bijekcija $A_1 \rightarrow A$. Tarkime, kad a_1 ir b_1 yra aibės A_1 elementai. Aibėje A yra tokie elementai a ir b , kad $f(a)=a_1$ ir $f(b)=b_1$. Tačiau

$$f'(a_1) = f'(f(a)) = a, \quad f'(b_1) = f'(f(b)) = b.$$

Todėl

$$f'(a_1 *_1 b_1) = f'(f(a) *_1 f(b)) = f'(f(a * b)) = a * b = f'(a_1) * f'(b_1).$$

Ši lygybė ir reiškia, kad f' yra grupės G_1 izomorfizmas į grupę G .

Jeigu egzistuoja grupių G ir G_1 izomorfizmas, tai tokios grupės vadinamos *izomorfiškomis*; žymima

$$G \cong G_1.$$

Pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibė R su sudėtimi – struktūra $(R, +)$ ir teigiamų realiųjų skaičių aibė R_+ su daugyba – struktūra $(R_+, \cdot)$ yra grupės. Jų izomorfizmą nustato funkcija $f(x) = \lg x$.

18 teorema. Kiekviena grupė yra izomorfiška pati sau.

Irodymas. Funkcija $f(x)=x$ grupės bazinę aibę A atvaizduoja į A . Turime: $f(ab) = ab = a+b = f(a)+f(b)$.

19 teorema. Jeigu f yra grupės $G=(A, *)$ izomorfizmas į grupę $G_1=(A_1, *_1)$, g – grupės G_1 izomorfizmas į grupę $G_2=(A_2, *_2)$, tai funkcijų f ir g kompozicija fg yra grupės G izomorfizmas į grupę G_2 .

Irodymas. Imkime bet kokius a ir b iš A . Tada

$$fg(a) = g(f(a)) \in A_2, \quad fg(b) = g(f(b)) \in A_2.$$

Kadangi funkcijos f ir g yra izomorfizmai, tai

$$fg(a * b) = g(f(a * b)) = g(f(a) *_1 f(b)) = g(f(a)) *_2 g(f(b)) = fg(a) *_2 fg(b).$$

Bijekcijų kompozicija yra bijekcija, todėl funkcija fg pasižymi izomorfizmo savybėmis.

Iš trijų pastarosiose teoremose įrodytų izomorfizmo savybių išplaukia dar šitokios jo savybės:

refleksyvumo: grupė izomorfiška pati sau,

simetriškumo: jeigu grupė G izomorfiška grupei G_1 , tai ir grupė G_1 izomorfiška grupei G ,

tranzityvumo: jeigu grupė G izomorfiška grupei G_1 , o G_1 izomorfiška grupei G_2 , tai ir G izomorfiška grupei G_2 .

Toliau nagrinėsime kai kurias homomorfizmo savybes.

1. Jeigu f yra grupės $(A, *)$ homomorfizmas į grupę $(A_1, *_1)$, e ir e_1 – atitinkamai tų grupių neutralieji elementai, tai

$$f(e) = e_1.$$

Pasirinkime $a_1 \in A_1$. Kadangi f yra aibės A atvaizdavimas į aibę A_1 , tai aibėje A yra toks elementas a , kad $f(a) = a_1$. Kadangi $a * e = a$ ir f yra homomorfizmas, tai

$$a_1 = f(a) = f(a * e) = f(a) *_1 f(e) = a_1 *_1 f(e).$$

Iš čia išplaukia lygybė $f(e) = e_1$.

2. Jeigu f – homomorfizmas, tai $f(a') = f(a)'$.

Įrodymas. Pavartoję tuos pačius žymėjimus, turime:

$$e_1 = f(e) = f(a * a') = f(a) *_1 f(a').$$

Iš čia ir išplaukia įrodomoji savybė.

20 teorema. Jeigu $G = (A, *)$ yra grupė, $G_1 = (A_1, \cdot)$ – algebrinė struktūra su tam tikra operacija, kurią pažymėjome daugybos ženklu, ir jeigu egzistuoja tokia bijekcija $f: G \rightarrow G_1$, kad

$$(\forall a, b \in A) \quad f(a * b) = f(a) \cdot f(b),$$

tai struktūra G_1 yra grupė.

Jeigu G dar ir komutatyvi, tai ir G_1 – komutatyvioji grupė.

Įrodymas. Pakanka nustatyti, kad aibės A_1 operacija turi G.1 – G.3 ir, jei grupė komutatyvi, G.4 savybes.

Įrodysime savybę G.1. Parinkime bet kuriuos tris aibės A_1 elementus a_1, b_1, c_1 . Kadangi $f: A \rightarrow A_1$, tai $(\exists a, b, c \in A) \quad a_1 = f(a), b_1 = f(b), c_1 = f(c)$. Tada

$$\begin{aligned} (a_1 b_1) c_1 &= (f(a) f(b)) f(c) = f(a * b) f(c) = f((a * b) * c) = \\ &= f(a * (b * c)) = f(a) f(b * c) = f(a) (f(b) f(c)) = a_1 (b_1 c_1). \end{aligned}$$

Įrodinėdami savybę G.2, parinksime bet koki $a_1 \in A_1$. Grupėje G egzistuoja toks elementas a , kad $a_1 = f(a)$. Jeigu e yra grupės G neutralusis elementas, tai pažymėkime e_1 tokį aibės A_1 elementą, kad būtų $e_1 = f(e)$. Nesunku įsitikinti, kad e_1 yra neutralusis aibės A_1 elementas:

$$a_1 e_1 = f(a) f(e) = f(a * e) = f(a) = a_1.$$

Įrodinėjant savybę G.3, pakanka patikrinti, ar bet kurio aibės A_1 elemento a_1 simetriškasis (atvirkštinis) elementas yra $a'_1 = f(a')$; čia a' – grupės G elemento a simetriškasis elementas.

Gana paprastas ir savybės G.4 įrodymas, kai grupė G yra komutatyvi.

Uždaviniai

39. Aibėje $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ operacija $\odot$ apibrėžta lentele

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Įrodykite, kad: 1) aibė su taip apibrėžta operacija nėra grupė; 2) struktūra $(\{1, 5\}, \odot)$ yra komutatyvioji grupė.

40. Aibėje $Q(\sqrt{2}) \setminus \{0\} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q, |a| + |b| \neq 0\}$ apibrėžta daugyba: $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$. Įrodykite, kad ši struktūra yra grupė.

41. Įrodykite, kad aibė

$$\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^m \mid m \in Z \right\}$$

yra grupė su daugybos operacija.

42. Turime

$$F_R = \{f \mid f(x) = ax + b, x \in R, a \neq 0, b \in R\}$$

– tiesinių funkcijų, apibrėžtų realiųjų skaičių aibėje R , aibė. Apibrėžiamo aibėje F_R opera, cija šitaip: jeigu $f, g \in F_R$, tai fg yra tokia funkcija, kad $fg(x, y) = g(f(x, y))$. Įrodykite, kad F_R su tokia operacija yra grupė.

43. Sakysime,

$$F_R = \{f \mid f(x, y) = (ax + by, cx + dy), a, b, c, d \in R, ad - bc \neq 0, (x, y) \in R^2\}$$

yra erdvės R^2 tiesinių transformacijų aibė. Šioje aibėje „daugybą“ apibrėžiame šitaip: jeigu $f, g \in F_R$, tai fg yra tokia funkcija, kad $fg(x, y) = g(f(x, y))$. Įrodykite, kad struktūra $(F_R, \cdot)$ yra grupė.

44. Aibėje $\{a, b, c\}$ taip apibrėžkite algebrinę operaciją, kad gautoji struktūra būtų grupė.

45. Įrodykite teiginį: jeigu $(A, *)$ yra grupė, e – jos neutralusis elementas ir aibėje A yra n elementų, tai kiekvienam a iš A galima parinkti tokį natūrinį skaičių $p \leq n$, kad būtų

$$\underbrace{a * a * \dots * a}_p = e.$$

Nurodymas. Nagrinėkite reiškinius $a, a * a, a * a * a, \dots, \underbrace{a * a * \dots * a}_m$, kai $m > n$.

46. G yra komutatyvioji multiplikacinė grupė. Įrodykite šiuos teiginius:

1) jeigu grupėje yra n elementų, tai egzistuoja toks $p \in \mathbb{N}$, kad su kiekvienu $a \in G$ teisinga lygybė $a^m = a^r$, $r = m - pk$.

Nurodymas. Remkitės 45 uždavinio sąlyga;

2) $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1}$;

3) $(a/b)^n = a^n / b^n$;

4) jeigu $a^p = e$ (e – grupės neutralusis elementas), tai su kiekvienu sveikuoju skaičiumi k $(a^k)^p = e$.

§29. Žiedai. Paprasčiausios žiedų savybės

Struktūros $(Z, +, \cdot)$ ir $(Q, +, \cdot)$ jau žinomos iš vidurinės mokyklos kurso. Vienas iš jų skirtumų yra tas, kad dalyba iš nelygaus nuliui racionaliojo skaičiaus aibėje Q visada galima, o sveikųjų skaičių aibėje Z – ne visada. Panašių skirtumų pasitaiko nagrinėjant ir kitas struktūras, kurių aibės yra platesnės už skaičių aibes Z ir Q (beje, aibės gali būti ir ne skaičių, o pvz., funkcijų, transformacijų ir kt.).

Struktūra $(Z, +, \cdot)$ ir kitos jai analogiškos struktūros priklauso struktūrų, vadinamų *žiedais*, klasei.

Kad būtų patogiau, apibrėždami žiedą, dvi abstrakčias operacijas taip pat vadinsime sudėtimi bei daugyba ir žymėsime įprastais ženklais.

Algebrinė struktūra $\tilde{Z} = (A, +, \cdot)$, kurios bazinė aibė A yra netuščia, vadinama žiedu, jei:

Ž.1. Struktūra $(A, +)$ yra komutatyvioji grupė,

Ž.2. Daugyba asociatyvi,

Ž.3. Daugyba distributyvi sudėties atžvilgiu.

Jeigu

Ž.4. Daugyba dar ir komutatyvi,

tai $\tilde{Z}$ vadinama komutatyviuoju žiedu.

Prisiminę komutatyviosios grupės apibrėžimą, žiedą galime apibūdinti šitaip.

Algebrinė struktūra $\tilde{Z} = (A, +, \cdot)$, $A \neq \emptyset$, vadinama žiedu, jei:

Ž.1.1. $(\forall a, b, c \in A) (a + b) + c = a + (b + c)$,

Ž.1.2. $(\exists O_A \in A) (\forall a \in A) a + O_A = a$,

Ž.1.3. $(\forall a \in A) (\exists -a \in A) a + (-a) = O_A$,

Ž.1.4. $(\forall a, b \in A) a + b = b + a$,

Ž.2. $(\forall a, b, c \in A) (ab)c = a(bc)$,

Ž.3. $(\forall a, b, c \in A) (a+b)c = ac+bc$ ir $c(a+b) = ca+cb$.

Jeigu dar ir

Ž.4. $(\forall a, b \in A) ab = ba$,

tai žiedas yra komutatyvus.

Savybės Ž.1.1–Ž.1.4 yra ekvivalenčios Ž.1. Iš apibrėžimo išplaukia, jog struktūra $(A, +, \cdot)$ be daugybos yra komutatyvi adicinė grupė, vadinama žiedo $\mathbb{Z}$ adicine grupe.

Pavyzdžiai. 1. Sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ su sudėtimi ir daugyba yra komutatyvusis žiedas.

2. Struktūra $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ žiedo nesudaro, nes neturi savybių Ž.1.2 ir Ž.1.3.

3. Sveikųjų skaičių aibės poaibis $m\mathbb{Z}$ (m kartotinių aibė) su sudėtimi ir daugyba yra komutatyvusis žiedas. $0 = 0 \cdot m$ yra to žiedo nulinis elementas. m gali būti bet kuris nenulinis sveikasis skaičius, tačiau, nagrinėjant tokio tipo žiedus, galima apsiriboti atveju, kai m – natūrinis skaičius. Taigi yra be galo daug žiedų

$$\mathbb{Z}_2 = (2\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad \mathbb{Z}_3 = (3\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad \mathbb{Z}_4 = (4\mathbb{Z}, +, \cdot), \dots$$

Visi tie žiedai, kai $m \geq 2$, neturi vienetinio elemento (vieneto).

Nekomutatyviųjų žiedų pavyzdžių pateiksime vėliau. Dabar aptarsime paprasčiausias žiedų savybes.

Kadangi struktūra $\mathbb{Z}$ yra komutatyvioji grupė, tai žiedų savybės, susijusios su sudėtimi, sutampa su šios grupės savybėmis.

1. Žiedo sudėties savybės

1.1. Reiškinyje, sudarytame iš žiedo bazinės aibės A elementų, operacijos ženklų $+$ ir skliaustų, skliaustus galima rašyti bet kokia tvarka arba ir visai juos praleisti.

1.2. Žiedas turi vienintelį nulinį elementą.

1.3. Kiekvienas žiedo bazinės aibės elementas turi vienintelį priešingąjį elementą.

1.4. Sudėtis prastinama šitaip: $a+b=a+c \Rightarrow b=c$.

1.5. Lygtis $a+x=b$ (a ir b – žiedo bazinės aibės bet kurie elementai) turi vienintelį sprendinį aibėje A . Tą sprendinį žymime $b-a$ ir vadiname elementu b ir a skirtumu, apibrėžiamu vienareikšmiškai. Tai reiškia, kad sudėtis turi atvirkštinę operaciją, kuri vadinama atimtimi. Išsprendę lygtį $a+x=b$, gauname $b-a=b+(-a)$.

1.6. Jeigu $a \in A$, tai $-(-a)=a$.

Tai išplaukia iš grupių 6-osios savybės.

1.7. $-(a_1+a_2+\dots+a_n)=(-a_1)+(-a_2)+\dots+(-a_n)$, jei visi a_i priklauso aibei A .

Ši savybė gaunama iš grupių 7-osios savybės, prisiminus, kad $a'=-a$ (kai operacija yra sudėtis), ir sudėties komutatyvumo.

Išvesime žiedo bazinės aibės elemento a kartotinio sąvoką. Pažymėkime

$$n \cdot a = \underbrace{a+a+\dots+a}_n, \quad -n \cdot a = \underbrace{(-a)+(-a)+\dots+(-a)}_n,$$

kai $n \in \mathbb{N}$. Tokius reiškinius ir vadinsime elemento a „kartotiniais“.

1.8. Kai m ir n – sveikieji skaičiai, $a \in A$, teisingos lygybės:

$$m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a,$$

$$m \cdot (n \cdot a) = (mn) \cdot a,$$

$$-(m \cdot a) = -m \cdot a.$$

Šios lygybės išplaukia iš apibrėžimo bei jau įrodytų savybių. Pavyzdžiui, kai $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n \cdot a + m \cdot a &= \underbrace{(a + a + \dots + a)}_n + \underbrace{(a + a + \dots + a)}_m = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n+m} = \\ &= (n + m) \cdot a. \end{aligned}$$

Jeigu $m \in \mathbb{N}$, $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$ ir $m > k$, tai

$$\begin{aligned} m \cdot a + n \cdot a &= \underbrace{(a + a + \dots + a)}_m + \underbrace{((-a) + (-a) + \dots + (-a))}_k = \\ &= \underbrace{a + a + \dots + a}_{m-k} = (m - k) \cdot a = (m + n) \cdot a. \end{aligned}$$

Analogiškai įrodomi kiti pirmosios lygybės atvejai bei kitos dvi šio skirsnelio lygybės.

1.9. Veiksmų su skirtumais taisyklės:

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d),$$

$$-(a - b) = b - a,$$

$$(a - b) - (c - d) = (a + d) - (c + b),$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$$

Įrodysime, pavyzdžiui, pirmąją taisyklę remdamiesi 1.4, 1.1 bei 1.6 savybėmis:

$$\begin{aligned} (a - b) + (c - d) &= (a + (-b)) + (c + (-d)) = a + (-b) + c + (-d) = \\ &= (a + c) + ((-b) + (-d)) = (a + c) + (-(b + d)) = (a + c) - (b + d). \end{aligned}$$

Panašiai įrodomos ir kitos taisyklės.

2. Žiedo daugybos savybės

Šios savybės įrodomos kaip ir panašios grupių savybės. Todėl čia jų neįrodinsime.

Jeigu reiškinyje, sudarytame iš žiedo bazinės aibės A elementų, daugybos ženklų ir skliaustų, keisime skliaustų vietą, tai reiškinyje nepasikeis. Todėl skliaustų galime nerašyti. Jeigu žiedas komutatyvus, tai dauginamuosius galime keisti vietomis.

Ne kiekvienas žiedas turi neutralųjį daugybos atžvilgiu elementą. Pavyzdžiui, sveikųjų skaičių žiedas jį turi, o žiedai $\mathbb{Z}_m$ neturi, kai $m \geq 2$. Jeigu neu-

tralusis daugybos elementas egzistuoja, tai tik vienas. Jį žymėsime 1_A ir vadiname *vienetiniu elementu*.

Jeigu kuris nors žiedo, turinčio vienetinį elementą, elementas a turi atvirkštinį (simetrišką daugybos atžvilgiu), tai tik vieną. Tuo atveju lygtys $ax=b$ ir $ya=b$ išsprendžiamos, sprendiniai randami vienareikšmiškai. Elementui a atvirkštinio elemento, kurį žymėsime a^{-1} , atvirkštinis elementas $(a^{-1})^{-1}$ sutampa su a . Taip pat nesunku įsitikinti, kad $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ (čia a ir b – žiedo elementai, turintys atvirkštinius).

Galima apibrėžti žiedo elementų laipsnius (kai laipsnio rodiklis – natūrinis skaičius), išvesti veiksmų su laipsniais taisykles, tą apibrėžimą bei taisykles apibendrinti imant bet kurį sveikąjį rodiklį.

[3. Bendrosios sudėties ir daugybos savybės

3.1. Lygybės $O_A \cdot a = O_A$ ir $a \cdot O_A = O_A$ (čia O_A – sudėties neutralusis elementas – žiedo nulinis elementas) teisingos su kiekvienu žiedo bazinės aibės A elementu a .

Prie abiejų lygybės $O_A \cdot a = O_A$ ir $a \cdot O_A = O_A$ pusių pridėkime elementui $O_A \cdot a$ priešingą elementą ir remkimės sudėties asociatyvumu:

$$\begin{aligned} (-O_A \cdot a) + (O_A \cdot a) &= ((-O_A \cdot a) + O_A \cdot a) + O_A \cdot a = O_A + O_A \cdot a, \\ O_A &= O_A \cdot a. \end{aligned}$$

Panašiai įrodoma ir antroji lygybė.

3.2. Bet kuriai žiedo bazinės aibės elementų a, b porai teisinga lygybė $(-a)b = -ab$.

Įrodymas. Sumą $a + (-a)$, lygią žiedo nuliniam elementui, padauginsime iš b . Pagal jau įrodytą 3.1 savybę sandauga taip pat lygi O_A . Pasinaudoję daugybos distributyvumo savybe, turime

$$(a + (-a))b = ab + (-a)b.$$

Iš čia ir išplaukia 3.2 savybė.

Remiantis antrąja žiedo distributyvumo savybės Ž.3 lygybe, galima analogiškai įrodyti, kad $a(-b) = -ab$. Iš šios ir anksčiau įrodytos lygybės išplaukia:

3.3. $(-a)(-b) = ab$.

Beje, įrodymo eigoje tenka remtis ir 1.6 dvigubo minuso dėsniu.

3.4. Bet kuriems trims žiedo bazinės aibės A elementams a, b, c teisingos lygybės

$$(a-b)c = ac - bc,$$

$$c(a-b) = ca - cb.$$

Šios lygybės vadinamos *daugybos distributyvumo atimties atžvilgiu savybe*. Norint įrodyti pirmąją lygybę, reikia atimtį pakeisti atitinkama suma $bc + (a-b)c$ ir atlikti jau žinomus (t. y. anksčiau pagrįstus) veiksmus. Panašiai įrodoma ir antroji lygybė.

3.5. Daugyba distributyvi sudėties atžvilgiu, kad ir koks būtų dėmenų skaičius.

Įrodoma matematinės indukcijos metodu.

Taigi žiedų savybes galime taip suformuluoti.

Jeigu struktūra $\tilde{Z}=(A, +, \cdot)$ yra komutatyvusis žiedas, tai aibėje A sudėties, atimties ir daugybos savybės yra tokios pat, kaip ir sveikųjų skaičių atitinkamų veiksmų savybės, išskyrus tai, kad yra žiedų, kuriuose nulinis žiedo elementų sandauga lygi žiedo nuliniam elementui. Tokie elementai vadinami nulio dalikliais. Juos aptarsime vėliau.

§30. Žiedų homomorfizmai ir izomorfizmai

Svarbią vietą žiedų teorijoje užima žiedų *homomorfizmai* ir *izomorfizmai*. Juos išsamiau nagrinėsime vadovėlio antrojoje dalyje. Čia pateikiame pačias sąvokas ir jų paprasčiausias savybes.

Funkcija $f: A \rightarrow A_1$, kai $E_f = A_1$, vadinama žiedo $(A, +, \cdot)$ homomorfizmu į žiedą $(A_1, \oplus, \odot)$, jeigu:

$$\begin{aligned} (\forall a, b \in A) \quad & 1) f(a+b) = f(a) \oplus f(b), \\ & 2) f(ab) = f(a) \odot f(b). \end{aligned}$$

Jeigu homomorfizmas yra bijekcija, tai jis vadinamas žiedo $(A, +, \cdot)$ izomorfizmu į žiedą $(A_1, \oplus, \odot)$.

Žiedų izomorfizmų savybės analogiškos grupių izomorfizmų savybėms.

21 teorema. *Jeigu funkcija f yra žiedo $\tilde{Z}=(A, +, \cdot)$ izomorfizmas į žiedą $\tilde{Z}_1=(A_1, \oplus, \odot)$, tai atvirkštinė funkcija f^{-1} yra žiedo $\tilde{Z}_1$ izomorfizmas į žiedą $\tilde{Z}$.*

Įrodymas. Kadangi f yra bijekcija, tai jai atvirkštinė funkcija f^{-1} – taip pat bijekcija. Patikrinsime, ar funkcijai f^{-1} būdingos homomorfizmo apibrėžime nurodytos 1 ir 2 savybės.

Tarkime, kad $f(a)=a_1$, $f(b)=b_1$ ($a, b \in A$; $a_1, b_1 \in A_1$) ir $f^{-1}(a_1)=f^{-1}f(a)=a$, $f^{-1}(b_1)=f^{-1}f(b)=b$. Todėl

$$\begin{aligned} f^{-1}(a_1 \oplus b_1) &= f^{-1}(f(a) \oplus f(b)) = f^{-1}(f(a+b)) = f^{-1}f(a+b) = \\ &= a+b = f^{-1}f(a) + f^{-1}f(b) = f^{-1}(a_1) + f^{-1}(b_1). \end{aligned}$$

Panašiai įrodoma ir lygybė

$$f^{-1}(a_1 \odot b_1) = f^{-1}(a_1) \cdot f^{-1}(b_1).$$

Remdamiesi šia teorema, žiedus $\tilde{Z}$ ir $\tilde{Z}_1$, tarp kurių galima apibrėžti bent vieną izomorfizmą, vadiname *izomorfiškais* ir rašome

$$\tilde{Z} \simeq \tilde{Z}_1.$$

Akivaizdu, kad bet kuris žiedas yra izomorfiškas pats sau. Atitinkamas izomorfizmas yra $f(x)=x$.

22 teorema. Jeigu f yra žiedo $\tilde{Z}$ izomorfizmas į žiedą $\tilde{Z}_1$, o g yra žiedo $\tilde{Z}_1$ izomorfizmas į žiedą $\tilde{Z}_2$, tai funkcijų kompozicija fg yra žiedo $\tilde{Z}$ izomorfizmas į žiedą $\tilde{Z}_2$.

Įrodymas. Kad būtų paprasčiau, abiejuose žieduose operacijas žymėsime sudėties ir daugybos ženklais. Imkime bet kurią žiedo $\tilde{Z}$ bazinės aibės elementų porą a, b ir užrašykime:

$$fg(ab) = g(f(ab)) = g(f(a) \cdot f(b)) = g(f(a)) \cdot g(f(b)) = fg(a) \cdot fg(b).$$

Nesunkiai patikrinama ir kita homomorfizmo sąlyga. Žinome, kad bijekcijų kompozicija yra bijekcija. Taigi teorema įrodyta.

Iš tų trijų įrodytų faktų išplaukia, kad žiedų izomorfizmas yra *refleksyvus, simetrinis ir tranzityvus*. Taigi jis yra *ekvivalentumo sąryšis*.

Svarbi ši teorema.

23 teorema. Jeigu $\tilde{Z} = (A, +, \cdot)$ yra žiedas ir $\tilde{Z}_1 = (A_1, \oplus, \odot)$ – algebrinė struktūra, o bijekcija $f: A \leftrightarrow A_1$ pasižymi savybėmis

$$(\forall a, b \in A) \quad 1) f(a+b) = f(a) \oplus f(b),$$

$$2) f(ab) = f(a) \odot f(b),$$

tai struktūra $\tilde{Z}_1$ yra žiedas. Jeigu, be to, žiedas $\tilde{Z}$ yra komutatyvus, tai ir $\tilde{Z}_1$ yra komutatyvusis žiedas.

Įrodymas. Užtenka patikrinti, ar struktūra $\tilde{Z}_1$ turi žiedo savybes. Savybės $\tilde{Z}.1.1$ – $\tilde{Z}.1.4$ tikrinamos visai taip pat, kaip ir 20 teoremos įrodyme. Patikrinsime tik $\tilde{Z}.2$ savybę, nes kitos tikrinamos analogiškai.

Kadangi $f: A \leftrightarrow A_1$, tai $(\forall a_1, b_1, c_1 \in A_1) (\exists a, b, c \in A) a_1 = f(a), b_1 = f(b), c_1 = f(c)$. Iš funkcijos f savybių išplaukia:

$$\begin{aligned} (a_1 \odot b_1) \odot c_1 &= (f(a) \odot f(b)) \odot f(c) = f(ab) \odot f(c) = \\ &= f(abc) = f(a(bc)) = f(a)f(bc) = f(a) \odot (f(b) \odot f(c)) = a_1 \odot (b_1 \odot c_1). \end{aligned}$$

Panašiai tikriname $\tilde{Z}.3$ bei $\tilde{Z}.4$, kai žiedas komutatyvus.

§31. Laukai. Paprasčiausios laukų savybės

Praeitame paragrafe minėjome, kad žiedas ne visada turi vienetinį elementą, ne kiekvienas jo bazinės aibės elementas turi atvirkštinį. Taigi ne kiekviename žiede yra dalybai atvirkštinė operacija. Plačiau nagrinėsime žiedus, kurie yra komutatyvūs, turi vienetinį elementą ir kuriuose galima dalyba iš bet kurio nenulinio elemento.

Komutatyvusis žiedas su vienetu (vienetiniu elementu), kurio bazinė aibė turi ne mažiau kaip du elementus, o kiekvienas nenulinis elementas turi atvirkštinį elementą, vadinamas lauku (kūnu).

Lauko vienetinis ir nulinis elementai kartais vadinami atitinkamai *viene-tu* ir *nuliu*, bet jie nebūtinai turi sutapti su sveikaisiais skaičiais 1 ir 0.

Pateiktąjį lauko apibrėžimą galima taip detalizuoti.

Algebrinė struktūra $L=(A, +, \cdot)$ vadinama lauku, jei:

L.0. $\text{Card}A \geq 2$,

L.1. *Struktūra $(A, +)$ yra komutatyvi grupė,*

L.2. *Struktūra $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ – komutatyvi grupė,*

L.3. *Daugyba distributyvi sudėties atžvilgiu.*

Lauką galima apibrėžti ir aksiomiškai.

Algebrinė struktūra $L=(A, +, \cdot)$ vadinama lauku, jei:

L.0. $\text{Card}A \geq 2$,

L.1.1 *Sudėtis yra asociatyvi,*

L.1.2. *Yra neutralus sudėties atžvilgiu elementas,*

L.1.3. *Kiekvienas aibės A elementas turi priešingą elementą,*

L.1.4. *Sudėtis yra komutatyvi,*

L.2.1. *Daugyba yra asociatyvi,*

L.2.2. *Yra neutralus daugybos atžvilgiu elementas,*

L.2.3. *Kiekvienas nenulinis aibės A elementas turi atvirkštinį,*

L.2.4. *Daugyba komutatyvi,*

L.3. *Daugyba distributyvi sudėties atžvilgiu.*

Pažymėsime simboliu A^* aibę A be nulinio elemento: $A \setminus \{0\}$.

Lauką galima nusakyti ir remiantis grupės bei žiedo sąvokomis.

Algebrinė struktūra $(A, +)$ yra komutatyvioji grupė; ji vadinama lauko adicine grupe. Lauko multiplikacine grupe vadinama struktūra $(A^, \cdot)$; ji taip pat komutatyvi.*

Aptarsime paprasčiausias lauko savybes.

Kaip matome iš apibrėžimo, lauko aksiomų sąrašas trimis aksiomomis ilgesnis už žiedo aksiomų sąrašą. Viena iš aksiomų, kurių nėra žiedo apibrėžime, yra sąlyga, kad lauko bazinė aibė turėtų ne mažiau kaip 2 elementus. Iš tikrųjų, jeigu aibė turi tik vieną elementą, tai ji formaliai gali būti žiedo bazinė aibė. Tačiau tada šis elementas turi būti nulinis. Tuo tarpu laukas privalo turėti ir vienetinį elementą. Lengva įsitikinti, kad nulinis ir vienetinis elementai negali sutapti.

Trečioji aksioma, kuria laukas skiriasi nuo žiedo – reikalavimas, kad kiekvienas nenulinis elementas turėtų atvirkštinį. Tuo atveju galima dalyba iš kiekvieno nenulinio elemento (egzistuoja daugybai atvirkščias veiksmas aibėje $A \setminus \{0\}$).

Taigi laukas turi visas tas savybes, kurias turi komutatyvusis žiedas, ir dar keletą naujų savybių, kurias trumpai aptarsime.

Laukas turi vienintelį vienetinį elementą (vienetą).

Tikrai, aksioma L.2.2 teigia, kad toks elementas yra ir kad jis vienintelis.

Panašiai įsitikiname, kad kiekvienas lauko bazinės aibės nenulinis elementas turi vienintelį atvirkštinį elementą.

Daugyba turi atvirkštinę operaciją (dalybą) aibėje A^ .*

Galima nagrinėti lauko bazinės aibės elementų (lauko elementų) santykius – *trupmenas* $a/b = ab^{-1}$, kai $b \neq O_A$. Teisingi teiginiai:

- 1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ tada ir tik tada, kai $ad = bc$,
- 2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
- 3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, kai a, b nelygūs nuliui,
- 4) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$, kai b, c, d nelygūs nuliui.

Įrodysime, pavyzdžiui, pirmąją lygybę. Jeigu $a/b = c/d$, tai tą lygybę dauginame iš bd ir gauname $ad = bc$. Jeigu teisinga pastaroji lygybė ir $b \neq O_A$, $d \neq O_A$, tai ją dauginame iš $b^{-1}d^{-1}$ ir gauname $a/b = c/d$.

Viena iš būdingesnių lauko savybių yra ši.

Jeigu $ab \neq O_A$, tai $a \neq O_A$ ir $b \neq O_A$. Ir atvirkščiai, jeigu $ab = O_A$, tai arba $a = O_A$, arba $b = O_A$.

Įrodymas. Jeigu $a \neq O_A$, tai $a^{-1} \in A$. Padauginę abi lygybės $ab = O_A$ pusės iš a^{-1} , gausime $b = O_A$. Taigi antrasis teiginys įrodytas, o pirmasis išplaukia iš žiedo savybės 3.1.

Lauko elementams teisingos šitokios lygybės:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

Vieną jų įrodysime remdamiesi distributyvumu, kitos taip pat nesunkiai įrodomos.

$$\begin{aligned} a/b + c/d &= ab^{-1} + cd^{-1} = ab^{-1} dd^{-1} + cd^{-1} bb^{-1} = ad(b^{-1}d^{-1}) + cb(d^{-1}b^{-1}) = \\ &= ad(bd)^{-1} + (cb)(bd)^{-1} = (ad+bc)(bd)^{-1} = (ad+bc)/bd. \end{aligned}$$

Lauko savybes trumpai galime taip suformuluoti: jeigu struktūra $L=(A, +, \cdot)$ yra laukas, tai aibėje A sudėties, atimties, daugybos ir dalybos savybės analogiškos racionaliųjų skaičių tų pačių veiksmų savybėms. Skirtumas tik tas, kad sudėtis ir daugyba aibėje A gali būti kitaip apibrėžtos, o atimtimi ir dalyba vadinamos sudėčiai ir daugybai atvirkštinės operacijos.

Lauko L vienetinį elementą paprastai žymime 1_L , kartais tiesiog 1 , nulinį elementą žymime O_L (kartais 0).

Pavyzdžiai. 1. Iš patirties žinome, kad racionaliųjų skaičių sudėčiai ir daugybai būdingos lauko apibrėžime išvardytos savybės. Taigi struktūra $(Q, +, \cdot)$ yra laukas.

2. Realiųjų skaičių aibė su sudėtimi ir daugyba – struktūra $(R, +, \cdot)$ yra laukas.

3. Aibėje $Q(\sqrt{5}) = \{a+b\sqrt{5} \mid a, b \in Q\}$ apibrėžkime sudėtį ir daugybą lygybėmis

$$(a+b\sqrt{5}) + (c+d\sqrt{5}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{5},$$

$$(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}) = (ac+5bd) + (ad+bc)\sqrt{5}.$$

Nesunku įsitikinti, kad veiksmai komutatyvūs, asociatyvūs, daugyba distributyvi sudėties atžvilgiu. Vienetinis ir nulinis elementai yra atitinkamai skaičiai 1 ir 0 . Kadangi lyg-

$$(a+b\sqrt{5})x = 1,$$

kai $a+b\sqrt{5} \neq 0$, šaknis yra skaičius

$$x = \frac{a}{a^2 - 5b^2} + \frac{-b}{a^2 - 5b^2} \sqrt{5},$$

tai kiekvienas nenulinis tos aibės elementas turi sau atvirkštinį. Nurodytoji struktūra yra laukas, kurį trumpiau žymėsime $Q(\sqrt{5})$. Panašiai galime apibrėžti laukus $Q(\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{3})$ ir t. t.

4. Paprasčiausias iš visų laukų yra du elementus a ir b turintis laukas. Vienas iš tų elementų turi būti lauko vienetinis elementas (tarkime, kad b), o kitas nulinis. Jų veiksmus (vadinkime juos sudėtimi ir daugyba) galima tik taip apibrėžti:

+	a	b	·	a	b
a	a	b	a	a	a
b	b	a	b	a	b

Visi šios lentelės elementai akivaizdūs. Aptarsime nebent sumą $b+b$. Kadangi aibė turi tik du elementus, tai ši suma gali būti lygi tik a arba b . Tačiau $b+b=b$ rodytų, kad b yra lauko nulinis elementas, o tai prieštarauja mūsų parinkimui. Taigi $b+b=a$.

Turint veiksmų lentelę, nesunku patikrinti visas lauko veiksmų savybes. Pavyzdžiui, kiekvienas iš tų dviejų elementų turi priešingą elementą, būtent sau lygų elementą. Kiekvienas nenulinis elementas (toks yra tik b) turi atvirkštinį elementą (lygų sau).

Taigi struktūra $(\{a, b\}, +, \cdot)$ yra laukas. Kadangi elementai a ir b bet kokie, tai yra be galo daug laukų, tačiau jie „vienodi“ (skiriasi tik elementų žymėjimas, o jų veiksmams apibrėžiami nurodytu būdu ir niekaip kitaip).

§32. Laukų izomorfizmai

Jeigu $L = (A, +, \cdot)$ ir $L_1 = (A_1, \oplus, \odot)$ yra laukai, tai bijekciją $f: A \leftrightarrow A_1$, turinčią savybes:

$$(\forall a, b \in A) \quad 1) f(a+b) = f(a) \oplus f(b),$$

$$2) f(ab) = f(a) \odot f(b),$$

vadiname lauko L izomorfizmu į lauką L_1 .

Teisingas teiginys: jeigu $f: L \leftrightarrow L_1$ – lauko L izomorfizmas į lauką L_1 , tai $f^{-1}: L_1 \leftrightarrow L$ – lauko L_1 izomorfizmas į lauką L .

Remdamiesi šia savybe, laukus, kuriuos sieja bent vienas izomorfizmas, vadiname *izomorfiškais* ir rašome

$$L \cong L_1.$$

Panašiai kaip ir žiedams, galime įrodyti: jeigu $L \cong L_1$ ir $L_1 \cong L_2$, tai ir $L \cong L_2$ (laukų izomorfizmas tranzityvus). Akivaizdi ir refleksyvumo savybė – kiekvienas laukas izomorfiškas pats sau.

24 teorema. Jeigu $L=(A, +, \cdot)$ yra laukas, $L_1=(A_1, \oplus, \odot)$ – algebrinė struktūra ir yra tokia funkcija $f: A \leftrightarrow A_1$, kad

$$(\forall a, b \in A) \quad 1) f(a+b)=f(a) \oplus f(b),$$

$$2) f(ab)=f(a) \odot f(b),$$

tai struktūra L_1 yra laukas.

Įrodymas. Kadangi L – komutatyvusis žiedas, tai remiantis 23 teorema, L_1 taip pat komutatyvusis žiedas. Kadangi f yra bijekcija, tai $\text{Card } A_1 = \text{Card } A \geq 2$. Įrodysime, kad L_1 turi vienetinį elementą. Pažymėkime $e_1 = f(1_A)$. Tada $(\forall a_1 \in A_1) (\exists a \in A) a_1 = f(a)$ ir

$$a_1 \odot e = f(a) \odot f(1_A) = f(a \cdot 1_A) = f(a) = a_1.$$

Tai reiškia, kad e_1 yra struktūros L_1 vienetinis elementas.

Norėdami įrodyti, jog egzistuoja atvirkštinis elementas, imkime bet koki $a_1 \in A_1$, $a_1 \neq e_1$. Aibėje A egzistuoja toks nenulinis elementas a , kad $a_1 = f(a)$. Tada $(\exists a^{-1} \in A) aa^{-1} = 1_A$. Taigi

$$a_1 \odot f(a^{-1}) = f(a) \odot f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1_A) = e_1.$$

Iš čia ir išplaukia, kad elementui a_1 atvirkštinis yra $f(a^{-1})$. Kitos lauko savybės lengvai patikrinamos. Tad L_1 yra laukas.

§33. Lauko polaukiai. Lauko charakteristika

Kai kuriuos laukus, kaip ir grupes, sieja panašūs sąryšiai – vienas laukas gali būti kitame lauke.

Nagrinėkime, pavyzdžiui, laukus $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ir $\mathbb{Q}$. Kaip žinome,

$$\mathbb{Q} = \{a + 0\sqrt{5} \mid a \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5}),$$

o sudėtis ir daugyba aibėje $\mathbb{Q}$ sutampa su sudėtimi ir daugyba lauko $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ poaibyje $\mathbb{Q}$, nes

$$(a + 0\sqrt{5}) + (b + 0\sqrt{5}) = (a+b) + (0+0)\sqrt{5} = a+b,$$

$$(a + 0\sqrt{5})(b + 0\sqrt{5}) = (ab + 5 \cdot 0 \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 0)\sqrt{5} = ab.$$

Taigi racionaliųjų skaičių laukas „įdėtas“ į lauką $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, t. y. laukas $\mathbb{Q}$ yra lauko $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ polaukis. Panašiai galime įsitikinti, kad laukas $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ yra realiųjų skaičių lauko $\mathbb{R}$ polaukis.

Jeigu struktūros $L=(A, +, \cdot)$ ir $L_1=(A_1, +, \cdot)$ yra laukai, o $A_1 \subset A$, tai L_1 vadinamas lauko L polaukiu. Tuo atveju laukas L vadinamas lauko L_1 plėtiniu, arba viršlaukiu. Jeigu dar ir $L_1 \neq L$, tai laukas L_1 vadinamas lauko L tiesioginiu polaukiu.

Laukas, neturintis tiesioginių polaukių, vadinamas pirminiu lauku.

25 teorema. *Polaukių sankirta yra polaukis.*

Įrodymas. Tarkime, kad laukai $L_1 = (A_1, +, \cdot)$ ir $L_2 = (A_2, +, \cdot)$ yra lauko $L = (A, +, \cdot)$ polaukiai. Nagrinėkime aibę $A_1 \cap A_2$. Kadangi aibėse A_1 ir A_2 galima sudėti ir daugyba, be to, joms būdingos aibės A savybės, tai sudėti ir daugyba galima ir sankirtoje $A_1 \cap A_2$. Be to, šioje aibėje išlieka visos minėtų operacijų savybės. Todėl sankirta $A_1 \cap A_2$ yra laukas tų operacijų atžvilgiu, t. y. lauko L polaukis. Nesunku patikrinti, kad lauko nulinis ir vienetinis elementai priklauso bet kuriam polaukiui, taigi ir jų sankirtai.

26 teorema. *Kiekvienas laukas yra arba pirminis, arba turi pirminį polaukį.*

Įrodymas. Jeigu laukas nėra pirminis, tai jis turi tiesioginių polaukių. Pastarųjų sankirta – minimalus polaukis, neturintis jokių polaukių. Tai ir bus pirminis lauko polaukis.

Kai $L = (A, +, \cdot)$ yra laukas, $A_1 \subset A$ ir A_1 turi bent vieną nenulinį elementą, nustatyti, ar $L_1 = (A_1, +, \cdot)$ yra polaukis, padeda šitokia teorema.

27 teorema. *Lauko L bazinės aibės poaibis A_1 yra laukas tada ir tik tada, kai poaibis A_1 uždaras sudėties ir atimties atžvilgiu, o $A_1 = A_1 \setminus \{O_A\}$ uždaras daugybos ir dalybos atžvilgiu, t. y.*

- 1) $(\forall a, b \in A_1) \ a + b \in A_1 \text{ ir } a - b \in A_1,$
- 2) $(\forall a, b \in A_1, \ a \neq O_A, \ b \neq O_A) \ ab \in A_1, \ a/b \in A_1.$

Įrodymas. Akivaizdu, kad lauko L nulinis ir vienetiniai elementai tokie yra ir lauko bazinės aibės A poaibyje A_1 .

Teoremos sąlygų būtinumas taip pat akivaizdus. Įrodinėjant sąlygos pakankumą, užtenka patikrinti, ar aibei A_1 tikrai priklauso kiekvienam jos elementui priešingas elementas bei kiekvienam jos nenuliniam elementui atvirkštinis, taip pat O_A ir 1_A . Tuo įsitikiname paėmę $b = a$, paskui $a = O_A$ ir $a = 1_A$.

Aptarsime lauko charakteristikos sąvoką.

Nagrinėdami laukus, galime aptikti įvairių jų skirtumų (skiriasi elementų skaičius, operacijos ir kt.). Vienas gana neįprastas kai kurių laukų skiriamasis bruožas yra šitoks: lauko vienetinį elementą sudėjus su juo pačiu baigtinį skaičių kartų, gaunamas lauko nulinis elementas. Šis faktas stebina tik todėl, kad esame įpratę operuoti skaičiais. Skaičiui 1 suteikiama *kiekio prasmė* (aibės $\{a\}$ elementų skaičius).

Skaičių aibėse kuo daugiau vienetų sudedame, tuo didesnį skaičių gauname, ir niekada negali būti teisinga lygybė

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_m = m \cdot 1 = 0$$

su natūriniu m . Tačiau visai kitaip yra nagrinėjant baigtinį lauką. Jau 31 paragrafo 4 pavyzdyje matėme, kad dviejų lauko vienetinių elementų b suma lygi nuliniam elementui a .

Tarkime, kad 1_L yra lauko L vienetinis elementas. Sumą

$$\underbrace{1_L + 1_L + \dots + 1_L}_k$$

pažymėkime $k \cdot 1_L$, o

$$\underbrace{(-1_L) + (-1_L) + \dots + (-1_L)}_k = -k \cdot 1_L.$$

Veiksmų su tokiais reiškiniiais – „vieneto kartotiniais“ – taisyklės analogiškos veiksmų su sveikaisiais skaičiais taisyklėms:

1. $k \cdot 1_L + t \cdot 1_L = (k+t) \cdot 1_L$,
2. $(k \cdot 1_L) \cdot (t \cdot 1_L) = (kt) \cdot 1_L$,
3. $n = mk \Rightarrow n \cdot 1_L = (m \cdot 1_L) \cdot (k \cdot 1_L)$

su sveikaisiais k, t, n, m .

Iš reiškinių $k \cdot 1_L$ apibrėžimo ir 1 bei 2 savybių išplaukia, kad struktūra

$$(k \cdot 1_L | k \in \mathbb{Z}, +, \cdot)$$

yra žiedas.

Irodysime štai ką: jeigu laukas L baigtinis, tai yra toks natūrinis skaičius k , kad $k \cdot 1_L = O_L$. Iš tikrųjų, tarę, kad aibė L turi n elementų, sudarome seką

$$1_L, 1_L + 1_L, 1_L + 1_L + 1_L, \dots, \underbrace{1_L + 1_L + \dots + 1_L}_n, \underbrace{1_L + 1_L + \dots + 1_L}_{n+1}.$$

Šioje sekoje yra $n+1$ elementas, kurių kiekvienas priklauso aibei L , turinčiai n elementų. Todėl yra bent du lygūs šios sekos elementai. Tarkime, kad elementai $s \cdot 1_L$ ir $t \cdot 1_L$ lygūs, be to, $s < t$. Prie abiejų lygybės $s \cdot 1_L = t \cdot 1_L$ pusių pridėję $-s \cdot 1_L$, gausime

$$(t-s) \cdot 1_L = O_L, \quad t-s \in \mathbb{N}.$$

Išitikinome, kad tam tikras lauko vienetinio elemento kartotinis lygus lauko nuliniam elementui.

Mažiausią natūrinį skaičių k , su kuriuo teisinga lygybė

$$k \cdot 1_L = O_L,$$

vadiname lauko L charakteristika. Jeigu tokio elemento nėra, tai laukas vadinamas nulinės charakteristikos lauku.

Lauko charakteristiką žymime $\text{char} L$.

Matėme, kad racionaliųjų skaičių laukas $\mathbf{Q}$ yra nulinės charakteristikos. Tuo tarpu 31 paragrafo 4 pavyzdyje lauko charakteristika lygi 2. Iš įrodytojo teiginio išplaukia, kad *baigtinio lauko charakteristika nenulinė*.

Jeigu lauko charakteristika nenulinė, tai ji yra pirminis skaičius.

Tarkime, kad $\text{char } \mathbf{L} = k = dt$, $d, t \in \mathbf{N}$. Tada $k \cdot 1_L = O_L$. Tačiau $k \cdot 1_L = (d \cdot 1_L)(t \cdot 1_L)$. Kaip matėme 31 paragrafe, jeigu dviejų lauko elementų sandauga lygi nuliniam elementui, tai bent vienas iš tų dauginamųjų pats yra nulinis lauko elementas. Iš čia išplaukia, kad bent viena iš sandaugų $d \cdot 1_L$, $t \cdot 1_L$ yra lauko $\mathbf{L}$ nulinis elementas. Bet tai prieštarauja skaičiaus k apibrėžimui.

Idomu tai, kad p charakteristikos baigtinis laukas turi p^m ($m \in \mathbf{N}$) elementų. Pavyzdžiui, laukas, kurio charakteristika 2, gali turėti 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n , ... elementų. Nėra tokio lauko, kuris turėtų, pavyzdžiui, 6, 10, 12 ir pan. elementų. Tačiau yra begalinių laukų, kurių charakteristika baigtinė.

Baigtinės charakteristikos lauke kai kurios įprastos formulės pasikeičia. Pavyzdžiui, jeigu $\text{char } \mathbf{L} = p$, tai $(\forall a, b \in \mathbf{L})$

$$(a+b)^p = a^p + b^p,$$

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Uždaviniai

47. Aibėje $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{m+n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ sudėtis ir daugyba apibrėžiama formulėmis:

$$(m_1 + n_1 \sqrt{w}) + (m_2 + n_2 \sqrt{w}) = (m_1 + m_2) + (n_1 + n_2) \sqrt{w},$$

$$(m_1 + n_1 \sqrt{w})(m_2 + n_2 \sqrt{w}) = (m_1 m_2 + w n_1 n_2) + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \sqrt{w},$$

kuriose $w=2$. Įrodykite, kad struktūra – aibė $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ su taip apibrėžtomis operacijomis – yra komutatyvusis žiedas.

48. Praeito uždavinio aibę pakeiskite analogiška aibe $\mathbf{Z}[\sqrt{w}]$ (w – natūrinis skaičius, nelygus pilnam kvadratui) ir gaukite tą pačią išvadą.

49. Aibėje $\{0, 1, 2\}$ taip apibrėžkite sudėtį ir daugybą, kad gautoji struktūra būtų laukas.

50. Aibėje $\mathbf{Q}[\sqrt{w}] = \{m+n\sqrt{w} \mid m, n \in \mathbf{Q}\}$ sudėtis ir daugyba apibrėžiama kaip 47 uždavinyje. Įrodykite, kad gautoji struktūra yra laukas, jei w natūrinis skaičius. Kuomet šis laukas sutaps su racionaliųjų skaičių lauku?

51. Įrodykite, kad yra toks lauko adicinės grupės $(A, +)$ pogrupis, kurio eilė lygi lauko charakteristikai (laukas baigtinis).

52. Įrodykite teiginius:

1) jeigu $\text{char } \mathbf{L} = p$, tai $(\forall a \in \mathbf{L}) p \cdot a = O_L$,

2) baigtinės charakteristikos lauko kiekvieno polaukio charakteristika lygi paties lauko charakteristikai,

3) jeigu $\text{char } \mathbf{L} = p$, tai bet kuriems jo elementams teisingos šio paragrafo pabaigoje užrašytos lygybės bei lygybė

$$(a+b+c)^p = a^p + b^p + c^p.$$

53. Įrodykite šiuos teiginius su lauko $\mathbf{L}$ elementais:

1) $-(-a) = a$,

2) $(a^{-1})^{-1} = a$, jei $a \neq O_L$,

3) reiškinys a/b , kai $b \neq O_L$, apibrėžiamas lygybe $a/b = ab^{-1}$. Įrodykite, kad

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}, \quad -\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a},$$

kai $a \neq O_L$, $b \neq O_L$, ir

$$(-a)^{-1} = -(a^{-1}),$$

kai $a \neq O_L$ (lygybė $a/b = c/d$ ekvivalenti lygybei $ad = bc$).

54. Aibėje $R_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ (m – sudėtinis natūrinis skaičius) sudėtis ir daugyba apibrėžtos šitaip:

$$a \oplus b = a + b - km,$$

$$a \odot b = ab - tm;$$

čia k – toks sveikasis neneigiamas skaičius, kad $0 \leq a + b - km < m$, o t – toks sveikasis neneigiamas skaičius, kad $0 \leq ab - tm < m$. Įrodykite, kad struktūra $L_m = (R_m, \oplus, \odot)$ yra komutatyvusis žiedas. Raskite jo nulinį elementą. Nustatykite, ar jis turi vienetinį elementą, jeigu taip, tai raskite jį. Kodėl ši struktūra nėra laukas?

55. Detaliai aprašykite žiedus: a) $\mathbb{Z}_3$, b) $\mathbb{Z}_4$, c) $\mathbb{Z}_6$, d) $\mathbb{Z}_8$. Užrašykite bazines aibes, sudarykite sudėties ir daugybos lenteles, raskite nulio daliklių poras (jeigu $ab = O_Z$, o $a \neq O_Z$ ir $b \neq O_Z$, tai a ir b vadinami žiedo Z nulio dalikliais). Nustatykite, kokie elementai neturi atvirkštinių.

56. Pažymėkime $C[0, 1]$ tolydinių intervale $[0, 1]$ funkcijų aibę. Šioje aibėje funkcijų sudėtį ir daugybą apibrėžkime natūraliu būdu:

$$f + g(x) = f(x) + g(x),$$

$$fg(x) = f(x)g(x).$$

Įrodykite, kad struktū $(C[0, 1], +, \cdot)$ yra komutatyvusis žiedas.

Skaičių laukai

§34. Sveikieji skaičiai ir jų veiksmai

Ne visus uždavinius galime spręsti vartodami tik natūrinius skaičius. Paprasčiausios lygtys

$$m + x = n$$

su natūriniais m ir n ne visuomet išsprendžiamos aibėje $\mathbb{N}$. Kyla uždavinys – taip praplėsti natūrinių skaičių aibę, kad naujoje aibėje jau būtų galima išspręsti tokias lygtis. Tai **atliekama** įvedant *sveikuosius skaičius*. Trumpai, nesigilindami į teorinius išvedžiojimus, priminsime, kaip tai daroma.

Imkime natūrinių skaičių aibę

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Pažymėkime

$$\mathbb{N}^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

aibę elementų, kuriuos gauname prie natūrinių skaičių prirašę brūkšnelį (minusą).

Aibė $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup 0 \cup \mathbb{N}$ vadinama *sveikųjų skaičių aibe*.

Šios aibės elementai vadinami *sveikaisiais skaičiais*. Natūriniais skaičiams paliekami jų vardai, elementas 0 vadinamas *nuliu*, o elementai $-1, -2, -3, \dots$ vadinami „minus vienas“, „minus du“, „minus trys“ ir t. t. Įprasta natūrinius skaičius vadinti *sveikaisiais teigiamais skaičiais*, o skaičius $-n$ ($n \in \mathbb{N}$) – *sveikaisiais neigiamais skaičiais*.

Sveikojų skaičiaus *modulis* (*absoliutinis didumas*) apibrėžiamas šitaip:

$$|m| = \begin{cases} m, & \text{kai } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{kai } m = 0, \\ n, & \text{kai } m = -n \text{ ir } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kadangi nelygaus nuliui sveikojų skaičiaus modulis yra natūrinis skaičius, o aibė $\mathbb{N}$ sutvarkyta sąryšiu „mažiau“, tai sveikųjų skaičių modulius galima palyginti. Tuo remiamasi apibrėžiant sveikųjų skaičių sudėtį. Apibrė-

žimas turi būti toks, kad sveikųjų skaičių sudėtis apimtų ir natūrinių skaičių sudėtį. Kadangi aibė $\mathbf{Z}$ susideda iš trijų dalių, tai į jas ir reikia atsižvelgti. Sveikųjų skaičių sudėtį galima apibrėžti šitaip.

1. Jeigu $m, n \in \mathbf{N}$, tai $m+n$ yra natūrinių skaičių suma.
2. Jeigu $n \in \mathbf{Z}$, $m=0$, tai $n+0=0+n=n$.
- 3.1. Jeigu $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}^-$ ir $|m| < n$, tai $m+n=n+m=n-|m|$.
- 3.2. Jeigu $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}^-$ ir $n < |m|$, tai $m+n=n+m=-(|m|-n)$.
- 3.3. Jeigu $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}^-$ ir $n=m$, tai $m+n=n+m=0$.
4. Jeigu $n \in \mathbf{N}^-$, $m \in \mathbf{N}^-$, tai $m+n=n+m=-(|m|+|n|)$.

(Pastarasis apibrėžimas žinomas iš vidurinės mokyklos matematikos kurso.) Matome, kad 0 yra sudėties neutralusis elementas. Taisyklė 3.3 nustato, kad kiekvienas sveikasis skaičius turi priešingą elementą: $-n$ yra priešingas elementas natūriniam skaičiui n , o n – priešingas elementas neigiamam sveikajam skaičiui $-n$. Nuliui priešingas elementas yra jis pats.

Sudėties komutatyvumas išplaukia iš pačių taisyklių. Remiantis pateiktuoju apibrėžimu, nelengva įsitikinti, ar sudėtis asociatyvi. Tai įrodė, gautume, kad struktūra $(\mathbf{Z}, +)$ yra komutatyvioji grupė.

Sveikųjų skaičių daugybos apibrėžimas kiek paprastesnis. Jam prireikia *skaičiaus ženklo sąvokos* ir *ženklų daugybos lentelės*.

Susitarsime, kad pliusas (+), prirašytas prie raidės, nieko nekeičia, t. y. $+a=a$. Pavyzdžiui, $+3=3$, $+(-3)=-3$ ir pan. Tada pliusą ar minusą, prirašytą prie raidės, reiškiančios natūrinį skaičių, galima laikyti *ženklą*. Susitarsime skaičiaus $a \neq 0$ ženklą žymėti e_a . Tada $a=e_a|a|$. Pavyzdžiui, $-5=-|-5|$. Aišku, kad $e_a=+$, kai $a \in \mathbf{N}$, ir $e_a=-$, kai $a \in \mathbf{N}^-$. Ženkilai dauginami šitaip:

·		+		-
+		+		-
-		-		+

Remdamiesi natūrinių skaičių daugyba bei šia lentele, sveikųjų skaičių daugybą galime apibrėžti taisyklėmis:

1. Su kiekvienu sveikuoju skaičiumi a

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

2. Kai a ir b – nelygūs nuliui sveikieji skaičiai,

$$ab = (e_a \cdot e_b)(|a| \cdot |b|).$$

Pavyzdžiui, $(-6)(-8) = ((-)(-))(|-6| \cdot |-8|) = 6 \cdot 8 = 48$.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad sveikųjų skaičių daugyba sutampa su natūrinių skaičių daugyba, kai sveikieji skaičiai yra natūriniai. Nesunku įsitikinti,

kad sveikųjų skaičių daugyba komutatyvi, asociatyvi bei distributyvi sudėties atžvilgiu. Iš viso to išplaukia šitoks teiginys.

Struktūra $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ yra komutatyvusis žiedas – sveikųjų skaičių žiedas, natūrinių skaičių struktūros $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ plėtinys.

Sveikųjų skaičių aibę $\mathbb{Z}$ galima sutvarkyti sąryšiu „mažiau“, kuris apibrėžiamas šitaip: $a < b$, kai egzistuoja natūrinis skaičius k , su kuriuo teisinga lygybė $a + k = b$.

Kadangi $n + 0 = n$, kai $n \in \mathbb{N}$, tai $0 < n$ su kiekvienu natūriniu n . Be to, $n + (-n) = 0$, kai $n \in \mathbb{N}$, todėl $-n < 0$ su kiekvienu natūriniu n . Kadangi $n = -(-n)$, tai $-m < n$ su kiekviena pora natūrinių skaičių m ir n . Ir apskritai nesunku suvokti, kad sąryšiu $<$ aibę $\mathbb{Z}$ taip sutvarkoma:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}.$$

Uždaviniai

1. Įrodykite, kad sveikųjų skaičių daugyba turi neutralųjį elementą ir kad jis lygus 1.
2. Įrodykite, kad sveikųjų skaičių daugyba komutatyvi.
3. Įrodykite, kai $a < b$:
 - 1) $(\forall m \in \mathbb{Z}) a + m < b + m$,
 - 2) $(\forall n \in \mathbb{N}) an < bn$,
 - 3) $(\forall n \in \mathbb{N}^+) bn < an$.
4. Žinoma, kad $a < b$ ir $c < d$. Įrodykite $a + c < b + c$, $ac < bd$.

§35. Racionaliųjų skaičių laukas

Sveikųjų skaičių aibėje taip pat ne visos lygtys gali būti išspręstos, pavyzdžiui, lygtis $3x = 5$. Taigi reikia išplėsti šią aibę iki tokios, kurioje jau būtų išsprendžiamos pirmojo laipsnio lygtys. Tokios lygtys išsprendžiamos kiekviename lauke. Todėl reikia sukonstruoti tokį lauką, į kurį įeitų sveikieji skaičiai ir kurio veiksmas apibendrintų tų skaičių veiksmus.

Trumpai aptarsime tokio lauko konstrukciją.

Lygties $nx = m$, kai $n \neq 0$, sprendinį, jeigu jis egzistuoja, apibrėžia skaičių pora (m, n) . Žymėkime jį

$$\frac{m}{n} \text{ (arba } m/n\text{)}$$

ir vadinkime *trupmena*. Pažymėkime raide T aibę trupmenų:

$$T = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Kadangi lygtys $kx = km$ ir $nx = m$ su kiekvienu $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, turi tuos pačius sprendinius, tai natūralu trupmenas

$$\frac{km}{kn} \quad \text{ir} \quad \frac{m}{n}$$

laikyti lygiomis. Trupmenų aibėje apibrėžkime sąryšį

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}, \quad \text{kai} \quad m_1 n_2 = m_2 n_1.$$

Trupmenų lygumas yra ekvivalentumo sąryšis.

Tai nesunku patikrinti. Akivaizdžios šio sąryšio refleksyvumo ir simetriškumo savybės. Paprastai įrodoma ir tranzityvumo savybė. Jeigu

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \quad \text{ir} \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3},$$

tai $m_1 n_2 = m_2 n_1$ bei $m_2 n_3 = m_3 n_2$. Sudauginę šias lygybes panariui bei supras-tinę iš sandaugos $m_2 n_2$, kai $m_2 \neq 0$, gauname $m_1 n_3 = m_3 n_1$. Pastaroji lygybė reiškia, kad

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_3}{n_3}.$$

Jeigu $m_2 = 0$, tai iš lygybės $m_1 n_2 = 0 \cdot n_1$ išplaukia $m_1 = 0$. Panašiai randame $m_3 = 0$. Taigi ir šiuo atveju lygybė $m_1 n_3 = m_3 n_1$ teisinga.

Trupmenų aibės T faktoraibę $T/ =$ trupmenų lygybės sąryšio atžvilgiu vadinsime racionaliųjų skaičių aibe ir žymėsime $\mathbb{Q}$.

Šiuo apibrėžimu *visas lygias trupmenas laikome vienu racionaliuoju skaičiumi*. Kiekvieną racionalių skaičių galima užrašyti daugybe skirtingų būdų.

Lygties $nx = m$, kai $n = 1$, šaknis yra ir sveikasis skaičius m , ir trupmena $m/1$. Laikydami trupmenas $m/1$ lygiomis sveikiesiems skaičiams, gauname $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Racionaliųjų skaičių sudėtis ir daugyba apibrėžiamos taisyklėmis, minėtomis 33 paragrafe (žr. 53 uždavinį). Nesunku įrodyti, kad šios taisyklės nepriklauso nuo racionaliojo skaičiaus užrašymo būdo.

28 teorema. *Algebrinė struktūra $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ yra laukas.*

Įrodymas. Kadangi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, tai $\text{Card } \mathbb{Q} \geq 2$. Akivaizdus sudėties komutatyvumas, lengvai įrodomas ir jos asociatyvumas. Dar paprasčiau įrodomos analogiškos daugybos savybės, taip pat daugybos distributyvumas sudėties atžvilgiu. Nulinis ir vienetinis elementai yra atitinkamai racionalieji skaičiai $0/n = 0$ ir $n/n = 1$. Kiekvienas nelygus nuliui aibės $\mathbb{Q}$ elementas m/n turi atvirkštinį elementą, lygų n/m . Lygtis

$$x \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b}, \quad \text{kai} \quad \frac{m}{n} \neq 0,$$

turi sprendinį

$$x = \frac{a}{b} \left(\frac{m}{n} \right)^{-1} = \frac{an}{bm} \in \mathbb{Q}.$$

Taigi nurodytoji struktūra yra racionaliųjų skaičių laukas. Jį žymėsime raide $\mathbb{Q}$. Laukas $\mathbb{Q}$ yra sveikųjų skaičių aibės plėtinys.

29 teorema. *Racionaliųjų skaičių laukas $\mathbb{Q}$ yra pirminis.*

Įrodymas. Tarkime, kad Q' yra lauko Q polaukis. Lauko Q vienetinis elementas 1 priklauso Q' , todėl aibei Q' priklauso ir skaičiai $1+1=2$, $1+2=3$, ..., $1-2=-1$, $1-3=-2$, $1-4=-3$... Matome, kad aibei Q' priklauso visi sveikieji skaičiai. Tačiau tuomet aibei Q' priklauso ir visi sveikųjų skaičių santykiai, nes aibė Q' yra laukas ir ji uždara dalybos atžvilgiu. Taigi visi racionalieji skaičiai priklauso aibei Q' , t. y. $Q \subset Q'$. Bet iš sąlygų

$$Q' \subset Q, Q \subset Q'$$

išplaukia, kad $Q=Q'$. Vadinasi, laukas Q neturi tiesioginių polaukių, jis yra pirminis.

Racionaliųjų skaičių laukas yra ir daugelio kitų skaičių laukų, pavyzdžiui, 31 paragrafe apibrėžtų kvadratinų laukų $Q(\sqrt{m})$, polaukis.

Racionalusis skaičius m/n vadinamas teigiamu, jei $nm \in \mathbb{N}$. Kai a ir b racionalieji skaičiai, s. koma, kad $a < b$, jei egzistuoja toks teigiamas racionalusis skaičius c , kad $a+c=b$.

Šis sąryšis yra tiesinės tvarkos sąryšis.

Iš tikrųjų nesunku įsitikinti, kad šis sąryšis tranzityvus ir turi trichotomijos savybę.

Natūrinių skaičių ir sveikųjų skaičių aibės su sąryšiais „mažiau“ yra diskrečios, o racionaliųjų skaičių aibė – *tiršta*. Kad tuo įsitikintume, imkime bet kuriuos du racionaliuosius skaičius a ir b , $a < b$. Kadangi

$$b = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}$$

ir $(b-a)/2$ yra teigiamas racionalusis skaičius, tai

$$\frac{b+a}{2} < b.$$

Kadangi

$$\frac{b+a}{2} = a + \frac{b-a}{2},$$

tai ir

$$a < \frac{a+b}{2}.$$

Nustatėme, kad tarp bet kurių dviejų nelygių racionaliųjų skaičių yra bent vienas (taigi ir be galo daug) racionalusis skaičius.

Uždaviniai

Įrodykite šiuos teiginius.

5. Teigiamų racionaliųjų skaičių suma yra teigiamasis skaičius.

6. Teigiamų racionaliųjų skaičių sandauga yra teigiamasis skaičius.

7. Teiginys „teigiamas racionalusis skaičius“ ekvivalentus teiginiui „racionalusis skaičius didesnis už 0“.

8. Laikydami neigiamu racionalųjį skaičių, mažesnę už 0, įrodykite:

1) neigiamų racionaliųjų skaičių suma yra neigiamas racionalusis skaičius,

2) neigiamų racionaliųjų skaičių sandauga yra teigiamas racionalusis skaičius.

§36. Dedekindo pjūviai

Racionaliųjų skaičių lauke $\mathbf{Q}$ visuomet išsprendžiama tiesinė lygtis $bx=a$, kai $b \neq 0$. Apie aukštesniojo laipsnio lygtis to jau negalima pasakyti. Pavyzdžiui, gana paprasta lygtis $bx^2=a$ ne visada išsprendžiama. Įrodysime, kad ši lygtis neišsprendžiama, kai $b=1$, $a=2$.

Tarkime, kad nesuprastinama trupmena c/d yra lygties $x^2=2$ sprendinys. Tada

$$(c/d)^2 = 2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c = 2c_1 \Rightarrow (2c_1)^2 = 2d^2 \Rightarrow 2c_1^2 = d^2 \Rightarrow d = 2d_1.$$

Tai prieštarauja prielaidai, kad trupmena c/d nesuprastinama. Taigi ir c , ir d , – lyginiai skaičiai.

Vadinasi, lauke $\mathbf{Q}$ lygtis $x^2=2$ neišsprendžiama. Šiame lauke ne visada galima kvadratinės šaknies (aišku, ir aukštesniojo laipsnio šaknų) traukimo operacija. Tuo tarpu lygties $x^2=2$ šaknis realiai egzistuoja ir lygi kvadrato, kurio kraštinė yra 1, įstrižainės ilgiui.

Kaip matome, racionaliųjų skaičių aibės $\mathbf{Q}$ nepakanka kai kuriems teoriniams ir praktiniams uždaviniams spręsti. Tenka ieškoti būdų šiai aibei praplėsti.

Norint lauką $\mathbf{Q}$ praplėsti iki tokios aibės, kurioje būtų galima ištraukti bet kurio laipsnio šaknį iš teigiamo racionaliojo skaičiaus ir kurios skaičiais būtų galima išreikšti visų atkarpų ilgius, reikia įvesti *realiuosius skaičius*. Tai viena iš pagrindinių matematikos sąvokų. Stengiantis kuo paprasčiau ir trumpiau apibrėžti realiuosius skaičius, iškyla įvairių sunkumų. Todėl žinomas ne vienas, o keli realiųjų skaičių apibrėžimo būdai.

Kitame paragrafe realiuosius skaičius apibrėšime aksiomomis. Prieš tai aptarsime *Dedekindo pjūvio* sąvoką.

Tarkime, kad B yra sąryšiu $<$ tiesiškai sutvarkyta aibė. Sakysime „ b eina po a “, jei $a < b$. Priminsime, kad tiesiškai sutvarkytos aibės elementą, kuris neina po jokio kito tos aibės elemento, vadiname mažiausiuoju elementu. Panašiai elementą, po kurio neina joks kitas tos aibės elementas, vadiname didžiausiuoju elementu.

Sutvarkytos aibės B Dedekindo pjūviu vadiname tokį aibės B suskirstymą į du poaibius A ir V , kad:

- 1) $A \cup V = B$,
- 2) $A \cap V = \emptyset$,
- 3) $(\forall a \in A) (\forall v \in V) a < v$.

Pirmosios dvi sąlygos reiškia, kad bet kuris aibės B elementas patenka tik į vieną poaibį – A arba V . Paskutinė sąlyga reiškia, kad bet kuris poaibio V elementas eina po bet kurio poaibio A elemento. Poaibis A vadinamas *pjūvio apatine klase*, poaibis V – *viršutine klase*.

Jeigu lauko $L=(A, +, \cdot)$ bazinėje aibėje yra apibrėžtas tiesinės tvarkos sąryšis $<$, tai laukas L vadinamas *sutvarkytu*. Sutvarkyto lauko $(L, <)$ Dedekindo pjūvis vadinamas *lauko Dedekindo pjūviu*.

Jeigu sutvarkyta aibė A yra *tiršta*, tai galimi trijų tipų Dedekindo pjūviai:

- 1) *apatinėje klasėje nėra didžiausio elemento, viršutinėje klasėje yra mažiausias elementas r ,*
- 2) *apatinėje klasėje yra didžiausias elementas r , viršutinėje klasėje nėra mažiausio elemento,*
- 3) *apatinėje klasėje nėra didžiausio, o viršutinėje klasėje — mažiausio elemento.*

Kai Dedekindo pjūvis yra pirmojo arba antrojo tipo, sakoma, kad *jis turi rėžį r* . Trečiojo tipo Dedekindo pjūvius vadiname *pjūviais be rėžio*.

Pavyzdžiai. 1. Apatinei klasei priskirkime visus racionaliuosius skaičius q , ne didesnius už 3 ($q \leq 3$). Visus kitus racionaliuosius skaičius q ($q > 3$) priskirkime viršutinei klasei. Akivaizdu, kad Dedekindo pjūvio sąlygos yra išpildytos. Turime antrojo tipo pjūvį, nes apatinėje pjūvio klasėje yra didžiausias skaičius 3, o viršutinėje klasėje mažiausio skaičiaus nėra.

2. Pirmajame pavyzdyje nagrinėtą antrojo tipo Dedekindo pjūvį lengvai galime paversti pirmojo tipo pjūviu, perkėlę skaičių 3 į viršutinę pjūvio klasę. Iš tikrųjų lauko Q poabijai $A = \{q \mid q < 3\}$ ir $V = \{q \mid q \geq 3\}$ apibrėžia Dedekindo pjūvį, kurio viršutinė klasė V turi mažiausią skaičių 3, o apatinė klasė A didžiausio skaičiaus neturi.

3. Apatinei klasei priskirkime visus neigiamus racionaliuosius skaičius ir tuos teigiamus racionaliuosius q , kurių kvadratai mažesni už 2 ($q^2 < 2$). Viršutinė klasė bus sudaryta iš tokių teigiamų racionaliujų skaičių q , kurių kvadratai didesni už 2. Toks aibės Q suskirstymas yra lauko Q Dedekindo pjūvis, nes bet kuris teigiamas racionalusis skaičius q tenkina tik vieną nelygybę: arba $q^2 < 2$, arba $q^2 > 2$. Matėme, kad nėra racionaliojo skaičiaus, kurio kvadratas būtų lygus 2. Nesunku įsitikinti, kad nei šio pjūvio apatinė klasė neturi didžiausio skaičiaus, nei viršutinė — mažiausio. Iš tikrųjų, kad ir kokį imtume apatinės klasės skaičių a ($a^2 < 2$), toje pačioje klasėje rasime už jį didesnį skaičių $a' = a + r$; čia $r = n^{-1}$, o n — bet kuris natūrinis skaičius, tenkinantis sąlygą

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Panašiai įrodome, kad ir viršutinėje klasėje nėra mažiausio skaičiaus. Vadinasi, turime trečiojo tipo Dedekindo pjūvį.

Ar lauko Q Dedekindo pjūviai negali būti tokie, kad apatinė klasė A turėtų didžiausią skaičių a , o viršutinė klasė V — mažiausią skaičių v ? Tuo atveju visi racionalieji skaičiai, didesni už a ir mažesni už v (pavyzdžiui, $(a+v)/2$), nepatektų nė į vieną klasę. Tai prieštarauja pjūvio apibrėžimui.

Iš šių pavyzdžių išplaukia, kad iš antrojo tipo Dedekindo pjūvių galima gauti pirmojo tipo pjūvius, ir atvirkščiai. Susitarsime pjūvio rėžį priskirti apatinei klasei. Tokiu būdu pirmojo tipo pjūvius visada keisime antrojo tipo Dedekindo pjūviais. Remdamiesi išnagrinėtais pavyzdžiais ir šia pastaba, galime tvirtinti, kad teisinga šitokia teorema.

30 teorema. *Racionaliųjų skaičių lauke egzistuoja Dedekindo pjūviai su rėžiu ir be rėžio. Kiekvieną racionalųjį skaičių atitinka antrojo tipo Dedekindo pjūvis.*

Racionaliųjų skaičių lauko Dedekindo pjūvius nesunku pavaizduoti geometriškai.

Pažymėkime tiesėje T du taškus: O (vadinamąjį koordinačių pradžios tašką) ir į dešinę nuo jo tašką I . Atkarpos OI ilgį laikykime ilgio vienetu. Tuomet bet kurį teigiamą racionalųjį skaičių q galime atvaizduoti tos tiesės tašku

A , esančiu į dešinę nuo taško O atstumu q . Skaičiui q priešingą racionalųjį skaičių $-q$ vaizduosime tašku A , simetrišku taškui A koordinačių pradžios taško atžvilgiu. Tuo būdu visi racionalieji skaičiai bus atvaizduoti tiesės T taškais. Skaičių 0 ir 1 vaizdai bus atitinkami taškai O ir I .

Racionaliųjų skaičių lauko $\mathbb{Q}$ Dedekindio pjūvis atitinka tiesės T „perkirpimą“ į dvi pustus. Nesunku patikrinti, kad bet kaip perkirpę tiesę T į dvi dalis T_1 (kairioji pusė) ir T_2 (dešinioji pusė), gauname Dedekindio pjūvio modelį. Apatinę klasę A sudaro tie racionalieji skaičiai, kurių vaizdai yra pusės T_1 , viršutinę klasę V sudaro racionalieji skaičiai, vaizduojami pusės T_2 taškais. Iš tikrųjų T_1 ir T_2 neturi bendrų taškų. Bet kuris T_2 taškas eina po bet kurio T_1 taško. Jeigu tiesės kirpimo vieta sutampa su tašku — kurio nors racionaliojo skaičiaus q vaizdu, tai tą tašką priskiriame kairiajai pusčiai T_1 . Šitoks tiesės perkirpimas atitiks lauko $\mathbb{Q}$ Dedekindio pjūvio su režiu q modelį. Jeigu perkirpimo taškas nėra jokio racionaliojo skaičiaus vaizdas, tai gaunamas Dedekindio pjūvio be režio modelis.

§37. Realųjų skaičių lauko apibrėžimas

Nagrinėdami racionaliųjų skaičių lauko geometrinį modelį, matėme, kad dalis tiesės taškų (racionalieji taškai) vaizduoja racionaliuosius skaičius kiti taškai (vadinkime juos iracionaliaisiais) nėra jokių racionaliųjų skaičių vaizdai. Jeigu iš tiesės T pašalinsime iracionaliuosius taškus, gausime be galo daug tuščių tarpų. Kiekvieno iracionaliojo taško W atstumas iki taško O yra realus dydis — atkarpos OW ilgis, kuris, deja, neišreiškiamas racionaliuoju skaičiumi. Savaime aišku, norint racionaliųjų skaičių aibę $\mathbb{Q}$ išplėsti iki tokios aibės, kurios pakaktų visų atkarpų ilgiams išreikšti, prie $\mathbb{Q}$ reikia prijungti naujus skaičius. Jų geometrinis modelis bus iracionalieji taškai. Kadangi racionalieji ir iracionalieji taškai išsemia visą tiesės T taškų aibę, tai šiuo būdu išplėsto racionaliųjų skaičių lauko $\mathbb{Q}$ geometrinis modelis bus visa tiesė T . Nagrinėjant visus tos tiesės taškus, jau neįmanoma rasti tuščio tarpo tarp dviejų taškų, neįmanoma „perkirpti“ tiesės, neužkliudant kurio nors jos taško. (Priminsime, kad tiesės taškas neturi jokių matmenų ir yra matematinė abstrakcija.) Bet kurioje tiesės vietoje yra taškas, vietos be taško nėra. Ši savybė vadinama *tiesės tolydumu*. Skaičių aibės, kurios geometrinis modelis yra visa tiesė, atitinkama savybė formuluojama šitaip: bet kuris skaičių aibės Dedekindio pjūvis turi režį.

Sutvarkytas laukas vadinamas tolydžiuoju, jei kiekvienas to lauko Dedekindio pjūvis turi režį.

Iš pateiktųjų samprotavimų išplaukia, kad racionaliųjų skaičių lauko plėtinys — realiųjų skaičių laukas — turi būti tolydus. Pagal 30 teoremą racionaliųjų skaičių laukas nėra toks.

Realųjų skaičių lauko apibrėžimui reikia dar vienos sąvokos — *išsidėstymo*.

Jeigu galima išskirti tokį lauko L poaibį L_+ , kad su kiekviena pora $a, b \in L_+$ teisingi sąryšiai

$$a + b \in L_+ \quad \text{ir} \quad ab \in L_+,$$

tai poaibio L_+ elementai vadinami *teigiamaisiais* elementais.

Laukas vadinamas išsidėsčiusiu, jeigu jo teigiamų elementų suma ir sandauga yra teigiamieji elementai.

Racionaliųjų skaičių laukas yra išsidėstęs, bet nėra tolydus.

Ne kiekvienas sutvarkytas laukas yra išsidėstęs. Tačiau kiekvienas išsidėstęs laukas yra sutvarkytas.

Nesunku įsitikinti, kad joks baigtinės charakteristikos laukas negali būti išsidėstęs.

Tikrai, jeigu lauko charakteristika yra p , tai paėmę bet kurį teigiamą lauko elementą a turėtume gauti, kad p tokių elementų suma yra teigiamasis skaičius. Tuo tarpu tokia suma yra pa ir ji lygi lauko nuliui.

Pažymėkime, kaip minėta, L_+ lauko L teigiamų elementų aibę. Tiesinės tvarkos sąryšį „ $<$ “ galima taip apibrėžti: $a < b$, jei $b - a \in L_+$, ir $b < a$, jei $a - b \in L_+$. Nesunku patikrinti šio sąryšio tranzityvumo ir trichotomijos savybes.

Apibrėšime realiuosius skaičius.

Realųjų skaičių lauku vadinamas išsidėstęs tolydusis laukas.

Realųjų skaičių lauką žymime $\mathbf{R}$; jo elementus vadiname *realiaisiais skaičiais*.

Pateiktasis realiųjų skaičių lauko apibrėžimas vadinamas *aksiominiu apibrėžimu*. Tiesa, iš jo neaišku, kiek yra aksiomų ir kokios. Tačiau prisiminus lauko apibrėžimą, lengva tas aksiomas išvardinti.

Realųjų skaičių lauku vadinama algebrinė struktūra $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, $\mathbf{R}$ tiesiškai sutvarkyta aibė, kuriai būdingos šios savybės:

- R.1. $(\forall a, b, c \in \mathbf{R}) \quad (a + b) + c = a + (b + c),$
- R.2. $(\exists O_{\mathbf{R}} \in \mathbf{R}) (\forall a \in \mathbf{R}) \quad a + O_{\mathbf{R}} = a,$
- R.3. $(\forall a \in \mathbf{R}) (\exists -a \in \mathbf{R}) \quad a + (-a) = O_{\mathbf{R}},$
- R.4. $(\forall a, b \in \mathbf{R}) \quad a + b = b + a,$
- R.5. $(\forall a, b, c \in \mathbf{R}) \quad a(bc) = (ab)c,$
- R.6. $(\exists 1_{\mathbf{R}} \in \mathbf{R}) (\forall a \in \mathbf{R}) \quad a \cdot 1_{\mathbf{R}} = a,$
- R.7. $(\forall a \in \mathbf{R}, a \neq O_{\mathbf{R}}) (\exists a^{-1} \in \mathbf{R}) \quad aa^{-1} = 1_{\mathbf{R}},$
- R.8. $(\forall a, b, c \in \mathbf{R}) \quad (a + b)c = ac + bc,$
- R.9. $(\forall a, b \in \mathbf{R}) \quad ab = ba,$
- R.10. $(\exists \mathbf{R}_+ \subset \mathbf{R}, \mathbf{R}_+ \neq \mathbf{R}) (\forall a \in \mathbf{R}_+, a \neq O_{\mathbf{R}}) (\forall b \in \mathbf{R}_+) \quad a + b \in \mathbf{R}_+, ab \in \mathbf{R}_+.$
- R.11. *Aibės $(\mathbf{R}, <)$ kiekvienas Dedekindo pjūvis turi rėžį.*

Čia neištrauktas reikalavimas, kad R turėtų ne mažiau kaip 2 elementus, tačiau tai išplaukia iš lauko išsidėstymo aksiomos $R.10$.

Pirmosios 9 aksiomos kartoja 31 paragrafe pateikto lauko apibrėžimo reikalavimus. Taigi jos yra tipiškos bet kurio lauko aksiomos. Simboliais 0_R ir 1_R , kaip ir anksčiau, žymime atitinkamai aibės R nulį ir vienetinį elementus.

Dešimtoji ir vienuoliktoji aksiomos detaliau nurodo lauko R elementų tarpusavio ryšių struktūrą: R turi būti toks sutvarkytas išsidėstęs laukas, kuriame kiekvienas Dedekindio pjūvis turi rėžį.

Parodysime, kad laukas R , apibrėžtas tomis 11 aksiomų, turi polaukį, izomorfišką racionaliųjų skaičių laukui Q .

31 teorema. *Išsidėstęs tolydusis laukas turi polaukį, izomorfišką racionaliųjų skaičių laukui.*

Įrodymas. Jau žinome, kad bet kuriame lauke L egzistuoja vienetinis elementas, kurį žymime 1_L . Iš lauko L uždarojo sudėties ir atimties atžvilgiu išplaukia, kad jam priklauso $1_L + 1_L = 2 \cdot 1_L$, $1_L + 2 \cdot 1_L = 3 \cdot 1_L$ ir t. t., t. y. visi sveikieji vienetinio elemento kartotiniai $a \cdot 1_L$.

Laukas L uždaras ir dalybos iš nenulinio elemento atžvilgiu. Todėl jam priklauso ir bet kurie tokių kartotinių santykiai

$$\frac{a \cdot 1_L}{b \cdot 1_L} = \frac{a}{b} \cdot 1_L \quad (b \neq 0).$$

Taigi laukui L priklauso visų $q \cdot 1_L$ pavidalo elementų aibė Q' , q – bet koks racionalusis skaičius. Akivaizdu, kad funkcija

$$\varphi: \varphi(q) = q \cdot 1_L \quad (\forall q \in Q)$$

aprašo aibių Q ir Q' izomorfizmą. Iš tikrųjų, jeigu $q_1, q_2 \in Q$, tai

$$\varphi(q_1 + q_2) = (q_1 + q_2) \cdot 1_L = q_1 \cdot 1_L + q_2 \cdot 1_L = \varphi(q_1) + \varphi(q_2),$$

$$\varphi(q_1 \cdot q_2) = q_1 \cdot q_2 \cdot 1_L = q_1 \cdot 1_L \cdot q_2 \cdot 1_L = \varphi(q_1) \cdot \varphi(q_2)$$

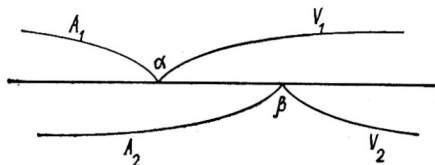
(rėmėmės vienetinio elemento savybe $1_L^2 = 1_L$). Teorema įrodyta.

§38. Realiųjų skaičių aksiomų interpretacijos

Jau minėjome, kad tiesės taškų aibė T gali būti geometriniu realiųjų skaičių aibės modeliu. Aibę T galima sutvarkyti sąryšiu „mažiau“, laikant, kad taškai α ir β susieti sąryšiu $<$, jei taškas α yra tiesėje į kairę nuo taško β . Tiesėje laisvai parenkami du taškai O ir I ($O < I$), kuriais nustatomas mastelis. Taškus α ($O < \alpha$) vadinsime teigiamais, o kitus taškus, išskyrus O , – neigiamais. Sudėties ir daugybos operacijas aibėje T galima apibrėžti remiantis atkarpu sudėties ir daugybos dėsniais. Pavyzdžiui, atkarpą $\overline{O\alpha}$, jungiančią taškus O ir α , taip pastūmus, kad taškas O sutaptų su tašku β , antrasis tos atkarpos galas sutaps su tašku, kurį laikysime taškų α ir β suma $\alpha + \beta$. Akivaizdu, kad teigiamų taškų suma yra teigiamas taškas, o sudėties operacija komutatyvi ir

asociatyvi. Taškui α priešingu tašku laikysime tašką $-\alpha$, simetrišką taško O atžvilgiu. Taškų α ir β skirtumą $\alpha - \beta$ galime rasti iš formulės $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Taškų daugybą apibrėšime naudodamiesi proporcingomis atkarpomis. Teigiamų taškų α ir β sandauga bus toks taškas γ , kad $O\gamma : O\alpha = O\beta : OI$. Dviejų vienodo ženklo taškų sandaugą laikysime teigiamu tašku, skirtingų ženklo taškų sandaugą – neigiamu tašku. Nesunku įsitikinti, kad ir kitos lauko sąlygos teisingos aibėje T . Ši aibė išsidėsčiusi ir, kaip minėjome praeitame paragrafe, tolydi. Vadinasi, tiesės taškų aibė T , ją sutvarkius, parinkus mastelį bei reikiamu būdu apibrėžus operacijas, tenkina lauko $\mathbf{R}$ aksiomas.

Pasinaudoję Dedekindo pjūviais, gausime antrą realiųjų skaičių lauko $\mathbf{R}$ interpretaciją. Kiekvienas racionaliujų skaičių lauko $\mathbf{Q}$ Dedekindo pjūvis su režiu q apibrėžia racionalųjį skaičių q , o kiekvienas pjūvis be režio – iracionalųjį skaičių. Visų racionaliujų ir iracionaliujų skaičių aibę vadiname realiųjų skaičių aibe. Sutvarkysime tą aibę. Jeigu realiųjų skaičių α apibrėžia pjūvio klasės A_1 ir V_1 , o skaičių β – klasės A_2 ir V_2 , tai klasės A_1 ir A_2 gali arba sutapti, arba būti viena kitos poaibių. 2 paveiksle matome tų klasių tarpusavio padėtį, kai $A_1 \subset A_2$.



2 pav.

Laikysime $\alpha < \beta$, jei $A_1 \subset A_2$, ir $\alpha = \beta$, jei $A_1 = A_2$. Vadinasi, bet kurie du realieji skaičiai α ir β tenkina tik vieną iš trijų sąryšių: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$. Taigi realiųjų skaičių aibę, įvedus sąvoką „mažiau“, yra sutvarkyta. Matome, kad kiekvieną realiųjų skaičių α visiškai apibūdina jį atitinkančio Dedekindo pjūvio apatinė klasė, kurią toliau žymėsime A_α .

Realųjį skaičių α vadiname teigiamu, jei $\alpha > 0$, ir neigiamu, jei $\alpha < 0$. Realiųjų skaičių α ir β suma $\alpha + \beta = \gamma$ laikysime tokį realiųjų skaičių, kurio Dedekindo pjūvio apatinę klasę A_γ sudaro apatinių klasių A_α ir A_β elementų visos galimos sumos:

$$A_\gamma = \{z \mid z = x + y, x \in A_\alpha, y \in A_\beta\}.$$

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad realiųjų skaičių sudėtis komutatyvi ir asociatyvi (nes racionaliujų skaičių x ir y sudėtis yra komutatyvi ir asociatyvi).

Racionaliujų skaičių Dedekindo pjūvių daugyba apibrėžiama žymiai sudėtingiau, todėl jos čia nenagrinėsime. Tik pažymėsime, kad įrodoma, jog racionaliujų skaičių lauko Dedekindo pjūvių aibė su sudėtimi ir daugyba sudaro struktūrą, turinčią visas realiųjų skaičių lauko apibrėžime išvardytas savybes. Vadinasi, lauko $\mathbf{Q}$ Dedekindo pjūvių aibę, ją sutvarkius ir joje apibrėžus atitinkamas operacijas, yra algebrinė struktūra, tenkinanti realiųjų skaičių lauko aksiomas.

Trečią lauko $\mathbf{R}$ aksiomų sistemos interpretaciją gausime remdamiesi šia teorema.

32 teorema. Kiekvienas realusis skaičius α išreiškiamas begaline dešimtaine trupmena

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots;$$

čia a_0 – tam tikras sveikasis skaičius, visi kiti a_i – dešimtainiai skaitmenys.

Įrodymas. Iš realiųjų skaičių lauko apibrėžimo išplaukia, kad kiekvienas Dedekindo pjūvis tame lauke turi rėžį. Sukonstruosime pjūvį, kurio rėžis bus realusis skaičius α . Akivaizdu, kad tokį pjūvį sudarys klasių A' ir V' pora:

$$A' = \{r \mid r \in \mathbf{R}, r \leq \alpha\}, \quad V' = \{r \mid r \in \mathbf{R}, r > \alpha\}.$$

Pažymėkime A ir V racionaliųjų skaičių, esančių klasėse A' ir V' , aibes. Lengva patikrinti, kad šios dvi klasės tenkina Dedekindo pjūvio sąlygas ir yra lauko $\mathbf{Q}$ Dedekindo pjūvio klasės.

Tarkime, kad a_0 – didžiausias sveikasis skaičius klasėje A . Tada $a_0 + 1 \in V$. Iš 11 racionaliųjų skaičių

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1 \quad (3.1)$$

dalys priklauso klasei A , kita dalis – klasei V . Sakykime, $a_0 + a_1/10$ – paskutinis (3.1) sekos skaičius, priklausantis apatinei klasei A . Tuomet

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

Iš 11 racionaliųjų skaičių

$$a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{100}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{2}{100}, \dots, a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

vėl dalis priklauso klasei A , kita dalis – klasei V . Jeigu $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}$ yra paskutinis tos eilės skaičius, priklausantis aibei A , tai

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{100}.$$

Tęsdami šį procesą, gausime

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k + 1}{10^k},$$

kad ir koks būtų didelis natūrinis k .

Begalinė sveikųjų skaičių $a_0, a_1, a_2, \dots$ seka visiškai apibrėžia realių skaičių α . Teorema įrodyta.

Jeigu teoremoje nurodyta dešimtainė trupmena yra baigtinė ($a_i = 0, i \geq k$) arba periodinė ($a_{i+m} = a_i, i \geq k, k \in \mathbf{N}$), tai α yra racionalusis skaičius. Teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu gautoji begalinė dešimtainė trupmena nėra nei baigtinė, nei periodinė, tai α yra ne racionalusis, o iracionalusis skaičius.

Iš 32 teoremos išplaukia, kad begalinių dešimtainių trupmenų aibė yra viena iš realiųjų skaičių interpretacijų.

Iracionalieji skaičiai žymimi įvairiai: atsižvelgiant į jų kilmę, tradicijas, vaidmenį; pavyzdžiui,

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}, \pi, e, \lg 3, \sin \alpha, 2\sqrt[3]{3} \text{ ir kt.}$$

9. Raskite skaičių $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, α/β artinius, išreikštus racionaliaisiais skaičiais, kai:

$$1) \alpha = -4 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \dots,$$

$$\beta = 3 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots,$$

$$2) \alpha = 2 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots,$$

$$\beta = 32 + \frac{7}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots$$

§39. Realiųjų skaičių paprasčiausios savybės

Iš lauko apibrėžimo išplaukia, kad realiųjų skaičių sudėties ir daugybos savybės analogiškos racionaliuųjų skaičių atitinkamoms savybėms: abi operacijos komutatyvios, asociatyvios ir tarpusavyje distributyvios. Kiekvienam realiajam skaičiui α galima rasti priešingą skaičių $-\alpha$ bei atvirkštinį α^{-1} , kai $\alpha \neq 0$.

Iš dviejų nelygių nuliui skaičių α ir $-\alpha$ vienas yra teigiamas. Jį žymime $|\alpha|$ ir vadiname skaičiaus α moduliu (*absoliutiniu didumu*). Taigi

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{jei } \alpha > 0, \\ -\alpha, & \text{jei } \alpha < 0. \end{cases}$$

Skaičiaus 0 moduliui laikome 0. Kai žinoma, kaip dauginti teigiamus realiuosius skaičius, apibrėžiama neigiamų realiųjų skaičių daugyba:

$$\alpha > 0, \beta < 0 \Rightarrow \alpha\beta = -\alpha|\beta|,$$

$$\alpha < 0, \beta < 0 \Rightarrow \alpha\beta = |\alpha||\beta|.$$

Iš šių apibrėžimų išplaukia lygybė

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|.$$

Irodysime porą teoremų apie modulius.

33 teorema. Nelygybė $|\alpha| \leq \beta$ ekvivalenti nelygybei

$$-\beta \leq \alpha \leq \beta.$$

Irodymas. Skaičių α ir $-\alpha$ moduliai yra tie patys; be to, $\beta \geq 0$. Kadangi $|\alpha| \leq \beta$, tai $\alpha \leq \beta$ ir $-\alpha \leq \beta$. Iš čia $-\alpha - \beta \leq 0$. Todėl $\alpha \geq -\beta$.

Iš šios teoremos gauname keletą išvadų.

1. Jeigu $|\alpha| \geq \beta > 0$, tai arba $\alpha \geq \beta$, arba $\alpha \leq -\beta$.

Irodymui pakanka remtis modulio apibrėžimu.

2. Jeigu $\beta < 0$, tai nelygybė $|\alpha| < \beta$ negalima, kad ir koks būtų realusis skaičius α .

3. Kad ir koks būtų realusis α ,

$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|.$$

Iš tikrųjų, jeigu $\alpha > 0$, tai $-|\alpha| < \alpha = |\alpha|$. Jeigu $\alpha < 0$, tai $-|\alpha| = \alpha < |\alpha|$.

34 teorema. Teisingos nelygybės:

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Įrodymas. Sudėję panariui nelygbes $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ ir $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$, turime $-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$. Remdamiesi 33 teorema, gauname

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Viena nelygybės dalis įrodyta. Norėdami įrodyti kitą dalį, pakeiskime α šitaip: $(\alpha + \beta) + (-\beta)$. Tada

$$|\alpha| = |(\alpha + \beta) + (-\beta)| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|,$$

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|.$$

Išvada. $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Ši formulė gaunama 34 teoremoje β pakeitus $-\beta$.

Svarbi realiųjų skaičių savybė vadinama *Archimedo aksioma*.

Kad ir koks būtų realusis skaičius $\alpha \neq 0$ ir natūrinis skaičius n , yra toks natūrinis skaičius m , su kuriuo teisinga lygybė

$$m|\alpha| > n.$$

Įrodymas. Tarkime, kad

$$|\alpha| = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \dots$$

ir k – toks mažiausias sveikasis neneigiamas skaičius, su kuriuo $a_k \neq 0$. Kadangi a_k yra sveikas ir neneigiamas skaičius, tai $a_k \geq 1$. Todėl $|\alpha| \geq 10^{-k}$. Padauginę šią nelygybę iš $n \cdot 10^k$, gauname $n \cdot 10^k |\alpha| \geq n$. Pažymėję $m = n \cdot 10^k + 1$, turėsime $m|\alpha| > n$.

Realiųjų skaičių lauke galima ištraukti bet kurio laipsnio aritmetinę šaknį iš teigiamo racionaliojo skaičiaus a . Iš tikrųjų lygties

$$x^n = a \quad (a > 0)$$

sprendinys bus realusis skaičius β , apibrėžiamas Dedekindo pjūviu, kurio viršutinė klasė yra $V = \{q \in \mathbf{Q}, q^n > a\}$.

Sudauginę lyginį skaičių neigiamų realiųjų skaičių, gauname teigiamą sandaugą. Todėl lygtis

$$x^{2n} = -a \quad (a > 0)$$

lauke $\mathbf{R}$ neišsprendžiama, tačiau išsprendžiama lygtis

$$x^{2n+1} = -a \quad (a > 0),$$

nes sudauginę nelyginį skaičių neigiamų realiųjų dauginamųjų gauname neigiamą sandaugą.

Baigdami nagrinėti paprasčiausias realiųjų skaičių savybes, aptarsime lauko $\mathbf{R}$ galią. Nesunku įrodyti šitokią teiginį.

Visų realiųjų skaičių aibė nėra suskaičiuojama.

Įrodymas. Pakanka įrodyti, kad nėra suskaičiuojama realiųjų skaičių r , $0 < r < 1$, aibė. Tarkime priešingai, toji aibė yra suskaičiuojama, t. y. visus tokius realiuosius skaičius kokių nors būdu galima sunumeruoti: $r_1, r_2, r_3, \dots$

Remiantis 32 teorema, kiekvieną realųjį skaičių galima užrašyti begaline dešimtaine trupmena:

$$r_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1j} \dots,$$

$$r_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2j} \dots,$$

$$r_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3j} \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_i = 0, a_{i1} a_{i2} a_{i3} \dots a_{ij} \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Čia a_{ij} yra skaičiaus r_i dešimtainis skaitmuo, esantis j -ojoje vietoje po kablelio. Parašykime realųjį skaičių

$$r_0 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_i \dots;$$

čia b_i – tokie dešimtainiai skaitmenys, kad

$$b_i \neq a_{ii} \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.2)$$

Skaičius r_0 yra tarp 0 ir 1, bet jis nesutampa nė su vienu iš skaičių r_i . Iš tikrųjų r_0 skiriasi nuo bet kurio skaičiaus r_i bent jau k -uoju skaitmeniu po kablelio, nes iš (3.2) $b_k \neq a_{kk}$. Taigi r_0 (tokių skaičių galima parašyti be galo daug) liko nenumeruotas. Gautasis prieštaravimas ir rodo, jog teorema teisinga.

Realųjų skaičių r , esančių tarp 0 ir 1, aibės galią vadiname kontinuumu ir žymime c . Kadangi bet kuriame atvirajame intervale (a, b) esančių realiųjų skaičių aibė yra ekvivalenti intervale $(0, 1)$ esančių realiųjų skaičių aibei (abių vienareikšmę atitiktį galima nustatyti, pavyzdžiui, projektuojant vieną intervalą į kitą iš pasirinkto projektavimo centro), tai bet kuriame intervale esančių realiųjų skaičių aibė ir visa aibė $\mathbf{R}$ taip pat turi kontinuumo galią.

§40. Kompleksiniai skaičiai

Nagrinėdami realiųjų skaičių lauką $\mathbf{R}$, matėme, kad jame išsprendžiamos kai kurios $x^n = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) pavidalo lygtys, t. y. atskirais atvejais galima rasti bent vieną realų tų lygčių sprendinį.

Tačiau lauke $\mathbf{R}$ neįmanoma ištraukti lyginio laipsnio šaknies iš neigiamojo skaičiaus, t. y. negalima išspręsti lygties

$$x^{2n} + a = 0,$$

jei $a > 0$. Paprasčiausias tokio tipo lygties pavyzdys yra

$$x^2 + 1 = 0. \quad (3.3)$$

Nagrinėjant daugelį teorijos ir praktikos klausimų, tenka spręsti (3.3) ir panašias lygtis. Kadangi jų išspręsti realiųjų skaičių lauke $\mathbf{R}$ negalima, tai reikia kokių nors būdu tą lauką praplėsti iki tokios aibės, kurioje minėtos lygtys būtų išsprendžiamos.

Gal reikiamas lauko $\mathbf{R}$ plėtinys bus ne vienas, o keli? Pavyzdžiui, jeigu laukai $L_1, L_2, L_3, \dots$ yra lauko $\mathbf{R}$ norimi plėtiniai, be to,

$$\mathbf{R} \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots,$$

tai patogiausia pasirinkti tą, kuris turi mažiau polaukių, vadinamąjį *minimalų plėtinį*.

Lauko L plėtinys L_1 vadinamas minimaliu kokių nors savybių atžvilgiu, jeigu jis yra laukas ir neturi tiesioginio poaibio L_2 , kuris taip pat yra lauko L plėtinys tų pačių savybių atžvilgiu.

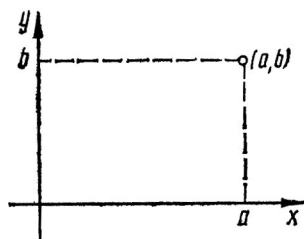
Dabar jau galima apibrėžti *kompleksinius skaičius*.

Kompleksinių skaičių lauku $\mathbf{K}$ vadinamas minimalus realiųjų skaičių lauko $\mathbf{R}$ plėtinys, kuriame išsprendžiama lygtis

$$x^2 + 1 = 0.$$

Kompleksinių skaičių lauko elementai vadinami kompleksiniais skaičiais.

Nagrinėdami racionaliųjų skaičių lauko $\mathbf{Q}$ plėtinio geometrinį modelį, matėme, kad pavaizdavus racionaliuosius skaičius tiesės taškais, lieka daug „laisvų“ taškų, neatitinkančių jokių racionaliųjų skaičių. Tuos „laisvuosius“ taškus galime interpretuoti kaip iracionaliųjų skaičių vaizdus. Racionalieji ir iracionalieji skaičiai kartu sudaro realiųjų skaičių aibę, kurios geometrinis vaizdas yra visa tiesė. Taigi tiesėje, kuri vaizduoja lauką $\mathbf{R}$, laisvų taškų nebėra. Norėdami praplėsti lauką $\mathbf{R}$, turime „išeiti“ už tiesės ribų, t. y. išeiti į plokštumą. Todėl plokštumoje ir mėginsime ieškoti kompleksinių skaičių modelio.



3 pav.

Žinodami mastelį, taško padėtį tiesėje nurodome vienu (realiuoju) skaičiumi, reiškiančiu jo atstumą iki taško, vaizduojančio nulį. Plokštumoje esančio taško padėtis vienu skaičiumi nenusakysime – reikia dviejų skaičių. Iš tikrųjų, išvedę plokštumoje dvi tarpusavyje statmenas bazines tieses (koordinatinių ašis), kiekvieną plokštumos tašką A galėsime visiškai apibūdinti dviem realiaisiais skaičiais a, b , reiškiančiais taško A atstumą iki tų tiesių.

Kitaip sakant, taško padėtį plokštumoje nusakys realiųjų skaičių dvejetas. Taigi kompleksinius skaičius natūralu apibrėžti realiųjų skaičių poromis. Tokių porų aibė – Dekarto sandauga $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Žinome, kad $(a, b) = (c, d)$, kai $a = c$, $b = d$. Aibėje $\mathbf{R}^2$ apibrėžkime sudėtį ir daugybą šitaip:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Iš sudėties ir daugybos operacijų apibrėžimo išplaukia, kad aibė $\mathbf{R}^2$ uždara tų operacijų atžvilgiu, nes operacijų rezultatai randami realiųjų skaičių veiksmams.

35 teorema. *Struktūra $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ yra laukas.*

Irodymas. Patikrinsime, ar struktūra $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ turi visas lauko savybes. Gana akivaizdu, kad sudėtis asociatyvi ir komutatyvi. Nulinio elemento, kurį žymėsime O_K , vaidmenį atlieka pora $(0, 0)$. Elementui (a, b) priešingas elementas yra pora $(-a, -b)$. Taigi $-(a, b) = (-a, -b)$. Nesudėtingais, nors ir ilgo-kais skaičiavimais įsitikiname, kad daugyba komutatyvi, asociatyvi bei distributyvi sudėties atžvilgiu. Vienetinis elementas 1_K yra pora $(1, 0)$.

Aibėje $\mathbf{R}^2$ galima sudėčiai priešinga operacija – atimtis, t. y. išsprendžiama lygtis

$$(c, d) + (x, y) = (a, b) \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R}).$$

Iš tikrųjų ši lygtis ekvivalenti lygčiai $(c + x, d + y) = (a, b)$, o pastaroji – sistemai

$$\begin{cases} c + x = a, \\ d + y = b \end{cases}$$

(remiamės porų lygybės apibrėžimu). Išsprendę sistemą, gauname porų atimties taisyklę

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d).$$

Irodysime, kad aibėje $\mathbf{R}^2$ galimas daugybai atvirkščias veiksmas – dalyba, t. y. išsprendžiama lygtis

$$(c, d)(x, y) = (a, b), \tag{3.4}$$

kai $(c, d) \neq (0, 0)$. Ši lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(cx - dy, cy + dx) = (a, b).$$

Iš pastarosios gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ cy + dx = b. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendiniai yra

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Taigi dviejų aibės $\mathbf{R}^2$ elementų (a, b) ir (c, d) santykis ((3.4) lygties sprendinys) randamas iš tokių formulių:

$$(a, b):(c, d) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right). \quad (3.5)$$

Šis santykis neegzistuoja tik tada, kai $c^2+d^2=0$. Taigi dalyba negalima tik iš nulinio elemento $O_K=(0, 0)$.

Iš (3.5) formulės lengvai randame ir elementui (a, b) atvirkštinį elementą. Sukeitę lygtyje poras (a, b) ir (c, d) vietomis bei paėmę $(c, d)=(1, 0)$, gauname

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right). \quad (3.6)$$

Pastebėję, kad $\text{Card } \mathbf{R}^2 > 2$, konstatuojame, jog teorema įrodyta.

Struktūra $K'=(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ yra laukas. Tačiau tas laukas dar nėra realiųjų skaičių lauko plėtinys, nes aibėje nėra realiųjų skaičių. Realiųjų skaičių poros – aibės $\mathbf{R}^2$ elementai – tai ne realieji skaičiai, o nauji objektai. Todėl reikia šį lauką taip pakeisti, kad jame būtų ir realieji skaičiai.

Tuo tikslu imame lauko K' poaibį K_0 , kurio elementai – visos galimos realiųjų skaičių poros, kurių antrasis skaičius yra 0:

$$K_0 = \{(a, 0)\} \subset K'.$$

Parodysime, kad *struktūra* $(K_0, +, \cdot)$ yra laukas, izomorfiškas realiųjų skaičių laukui $\mathbf{R}$. Nustatome tarp tų aibių abipus vienareikšmę atitiktį $f: K_0 \leftrightarrow \mathbf{R}$ šitaip:

$$f(a, 0) = a.$$

Kadangi su bet kuriais realiaisiais skaičiais a ir b

$$(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0),$$

$$\text{tai} \quad f((a, 0) + (b, 0)) = f(a+b, 0) = a+b = f(a, 0) + f(b, 0).$$

Analogiškai patikriname ir antrąją izomorfizmo sąlygą. Kadangi $\mathbf{R}$ yra laukas, tai pagal 24 teoremą ir K_0 yra laukas, lauko K' polaukis.

Sudarome aibę

$$\mathbf{K} = (\mathbf{R}^2 \setminus K_0) \cup \mathbf{R}$$

– iš aibės $\mathbf{R}^2$ išmetame elementus $(a, 0)$, $a \in \mathbf{R}$, ir prijungiame visus realiuosius skaičius. Tokį aibės $\mathbf{R}^2$ pakeitimą galima lengvai suprasti laikant $(a, 0) = a$. Taigi turėsime $(1, 0) = 1$, $(0, 0) = 0$ ir pan.

Naujojoje aibėje $\mathbf{K}$ veiksmus apibrėžiame šitaip: kai $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ yra skaičių poros, veiksmus atliekame remdamiesi veiksmų su poromis apibrėžimu. Kai bent viena iš tų porų yra realusis skaičius a , tai jį pakeičiame pora $(a, 0)$. Jei-gu atlikę veiksmus gauname $(z, 0)$ pavidalo porą, tai ją pakeičiame realiuoju skaičiumi z .

Pavyzdžiui,

$$(3, 2) \cdot 5 = (3, 2)(5, 0) = (3 \cdot 5 - 2 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 2 \cdot 5) = (15, 10),$$

$$(4, -6) + (5, 6) = (4 + 5, -6 + 6) = (9, 0) = 9.$$

Aibė $\mathbf{K}$ nuo aibės $\mathbf{R}^2$ skiriasi tik tuo, kad kai kurie elementai kitaip pažymėti. Taigi struktūra $\mathbf{K} = (\mathbf{K}, +, \cdot)$ yra laukas, kurio polaukis yra realiųjų skaičių laukas $\mathbf{R}$. Nesunku įsitikinti, kad lauke $\mathbf{K}$ lygtis $x^2 + 1 = 0$ išsprendžiama.

Pažymėkime šios lygties sprendinį $x = (u, v)$ ($u, v \in \mathbf{R}$). Tada lygtis $x^2 + 1 = 0$ virsta tokia:

$$(u, v)^2 + 1 = (u, v)(u, v) + (1, 0) = (0, 0).$$

Atlikę veiksmus su atitinkamomis poromis, tą lygtį galime perrašyti šitaip:

$$(u^2 - v^2 + 1, 2uv) = (0, 0).$$

Pastaroji porų lygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} u^2 - v^2 + 1 = 0, \\ 2uv = 0. \end{cases}$$

Sprendami šią sistemą, gauname du lygties $x^2 + 1 = 0$ sprendinius $x_1 = (0, 1)$ ir $x_2 = (0, -1)$ aibėje $\mathbf{K}$.

Pažymėkime $i = (0, 1)$. Nesunku apskaičiuoti remiantis porų daugybos taisykle, kad $i^2 = -1$ (taip pat ir $(-i)^2 = -1$).

Kadangi

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + (0, 1)b,$$

tai, prisiminę, kad aibės $\mathbf{K}$ vienetinis elementas $1_{\mathbf{K}} = (1, 0)$ tapachiai lygus realiajam skaičiui 1, matome, jog kiekvieną aibės $\mathbf{K}$ elementą galima užrašyti suma

$$\alpha = a + ib;$$

čia a ir b – tam tikri realieji skaičiai, i – skaičius (vadinamas *menamuoju vienetu*), turintis savybę

$$i^2 = -1. \quad (3.7)$$

Kiekvieną aibės $\mathbf{K}$ elementą α vadiname *kompleksiniu skaičiumi*, o jo išraišką $\alpha = a + ib$ – *algebrine forma*.

Sukonstravome kompleksinių skaičių lauką $\mathbf{K}$, įrodėme, kad jo elementai gali būti užrašyti $a + ib$ pavidalu.

Įrodysime, kad šis lauko $\mathbf{R}$ plėtinys yra *minimalus*.

36 teorema. *Realiųjų skaičių lauko plėtinys, kuriame yra elementas i , turintis savybę $i^2 = -1$, yra minimalus, jei kiekvieną to plėtinio elementą galima užrašyti $a + ib$ pavidalu ($a, b \in \mathbf{R}$).*

Įrodymas. Tarkime, kad teoremos sąlygoje minimas lauko $\mathbf{R}$ plėtinys $\mathbf{K}$ nėra minimalus, t. y. galima rasti kitą tokį lauko $\mathbf{R}$ plėtinį K_0 , kuris yra tiesioginis lauko $\mathbf{K}$ poaibis ir kuriam priklauso lygties $x^2 + 1 = 0$ šaknis – skai-

čius i . Kadangi aibei K_0 priklauso bet kokie realieji skaičiai a, b ir elementas i , tai K_0 , kaip laukui, priklauso elementų b ir i sandauga bi bei suma $a+bi$. Taigi kiekvienas lauko K elementas priklauso laukui K_0 . Tai prieštarauja prielaidai, kad K_0 yra tiesioginis lauko K poaibis. Teorema įrodyta.

Matome, kad aibė K tenkina visas kompleksinių skaičių lauko sąlygas: ji yra minimalus lauko R plėtinys, kuriame išsprendžiama lygtis $x^2+1=0$.

Algebrinės formos $\alpha=a+bi$ kompleksinių skaičių veiksmai atliekami kaip algebrinių dvinarių veiksmai, kuriuose i laikomas daugikliu, tenkinančiu (3.7) lygybę.

Atsižvelgę į įvestus žymėjimus $(a, 0)=a$ ir $(0, b)=ib$, algebrinės formos kompleksinių skaičių sudėtį ir daugybą galime apibrėžti šitaip:

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d),$$

$$(a+ib) \cdot (c+id)=ac-bd+i(ad+bc).$$

Kompleksinių skaičių dalybą tikslinga apibrėžti šitokiomis lygybėmis:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{\mathbb{I}(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}.$$

Kartais vietoje $a+ib$ patogiau rašyti $a+bi$.

Pavyzdžiai. 1. $(2-i)+(4+i)=6$. 2. $(2-i)(4+i)=9-2i$.

$$3. \frac{2-i}{4+i} = \frac{7}{17} - \frac{6}{17}i.$$

Kompleksinio skaičiaus $\alpha=a+bi$ išraiškoje ($a, b \in R$) skaičius a vadinamas *realiąja komponente* (žymimas $a=Re\alpha$), o skaičius b – *menamąja komponente* (žymimas $b=Im\alpha$). Tad

$$\alpha = Re\alpha + (Im\alpha)i.$$

Kompleksiniai skaičiai, kurių menamoji komponentė lygi 0, sutapatunami su realiaisiais skaičiais

$$a+0 \cdot i = a.$$

Kompleksiniai skaičiai, kurių menamoji komponentė nelygi nuliui, vadinami *menamaisiais*. Tokie, pavyzdžiui, yra skaičiai

$$1+i, \lg 5-13i, \frac{1}{2} + \sqrt{2}i, 100+\pi i.$$

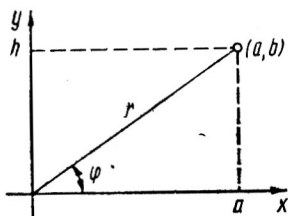
Menamieji skaičiai, kurių realioji komponentė lygi 0, vadinami *grynai menamais*. Tokie, pavyzdžiui, yra skaičiai

$$i, 7i, \sqrt{3}i, -\pi i.$$

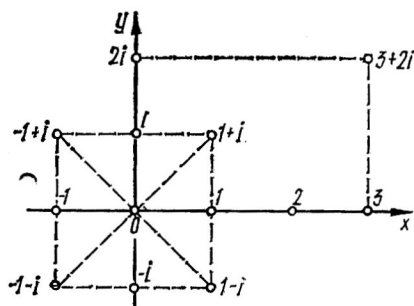
§41. Kompleksinių skaičių geometrinė interpretacija. Kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma

Pasirinkime plokštumoje stačiakampę koordinačių sistemą (4 pav.). Kompleksinį skaičių $a+bi$ vaizduosime plokštumos tašku, kurio koordinatės yra (a, b) . Taip vaizduojant, abscisų ašyje žymimos realiosios komponentės, or-

dinačių ašyje – menamosios, todėl abscisių ašis vadinama *realiąja*, o ordinačių ašis – *menamąją ašimi*. Visa plokštuma, kurioje vaizduojami kompleksiniai skaičiai, vadinama *kompleksine plokštuma*.



4 pav.

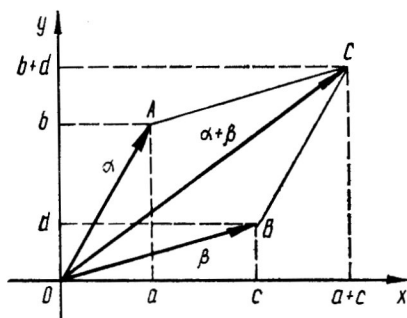


5 pav.

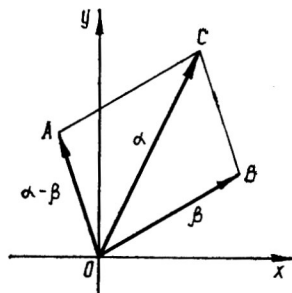
Akivaizdu, kad tik realiųjų kompleksinių skaičių vaizdai yra realiojoje ašyje. Grynai menami skaičiai vaizduojami menamosios ašies taškais. Atvaizduosime keletą kompleksinių skaičių, būtent: ± 1 , $\pm i$, $\pm 1 \pm i$, $3 + 2i$ (5 pav.).

Kompleksinius skaičius galima vaizduoti ir vektoriais, prasidedančiais koordinatų pradžios taške ir pasibaigiančiais taške (a, b) . Kiekvienas toks vektorius apibūdinamas dviem parametrais – ilgiu r ir kampu φ , kurį jis sudaro su teigiamąja realiosios ašies kryptimi (žr. 4 pav.).

Vaizduodami kompleksinius skaičius vektoriais, galime nesunkiai interpretuoti kompleksinių skaičių sudėtį ir atimtį. Lengva įsitikinti, kad kompleksinių skaičių α ir β suma $\alpha + \beta$ vaizduojama vektoriumi, kurio padėtis sutampa su lygiagretainio (jo kraštinės – vektoriai OA ir OB) įstrižaine OC (6 pav.).



6 pav.



7 pav.

Dviejų kompleksinių skaičių α ir β skirtumą γ galima išreikšti remiantis sudėtimi

$$\beta + \gamma = \alpha.$$

Taigi kompleksinių skaičių atimties geometrinis modelis – vienos lygiagretainio kraštinės radimas, kai žinoma kita jo kraštinė ir įstrižainė. Gaunama šitokia kompleksinių skaičių skirtumo $\alpha - \beta$ radimo geometrinė taisyklė. Vektoriaus OB , vaizduojančio skaičių β , galą reikia sujungti su vektorio

riaus OC , vaizduojančio skaičių α , galu C ir gautą vektorių BC lygiagrečiai pastumti taip, kad taškas B sutaptų su koordinačių pradžia. Tuomet antrasis šio vektoriaus galas sutaps su skirtumą $\alpha - \beta$ vaizduojančiu tašku (7 pav.).

Pažymėkime šaknies $\sqrt{a^2 + b^2}$ aritmetinę reikšmę $|\alpha|$ ir pavadinkime ją kompleksinio skaičiaus $\alpha = a + ib$ *moduliu*. Kai $\alpha \neq 0$, tašku (a, b) vaizduojamą kompleksinį skaičių α galime išreikšti šitaip:

$$\alpha = |\alpha| \left(\frac{a}{|\alpha|} + i \frac{b}{|\alpha|} \right).$$

Pažymėję $\text{Arg } \alpha$ bet kurį sistemos

$$\begin{cases} \cos x = \frac{a}{|\alpha|}, \\ \sin x = \frac{b}{|\alpha|} \end{cases} \quad (3.8)$$

sprendinį (jį vadinsime *kompleksinio skaičiaus α argumentu*), gausime

$$\alpha = |\alpha| (\cos (\text{Arg } \alpha) + i \sin (\text{Arg } \alpha)).$$

Mažiausias neneigiamas (3.8) sistemos sprendinys φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) žymimas $\arg \alpha$ ($\varphi = \arg \alpha$) ir vadinamas *skaičiaus α argumento pagrindine reikšme*. Aišku, kad

$$\text{Arg } \alpha = \arg \alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Taigi $\alpha = |\alpha|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ yra *skaičiaus α trigonometrinė forma*.

Modulio $|\alpha|$ ir argumento φ geometrinė prasmė aiški 4 paveiksle: $|\alpha|$ yra atstumas nuo koordinačių pradžios iki taško (a, b) ; φ – kampo tarp teigiamojo absčių pusašio ir atkarpos, jungiančios koordinačių pradžią su tašku (a, b) , didumas.

Akivaizdu, kad realiųjų kompleksinių skaičių argumento pagrindinė reikšmė yra $\arg \alpha = 0$ (jei $\alpha > 0$) arba $\arg \alpha = \pi$ (jei $\alpha < 0$). Grynai menamų kompleksinių skaičių bi argumento pagrindinė reikšmė yra $\pi/2$ (jei $b > 0$) arba $3\pi/2$ (jei $b < 0$). Skaičiui 0 priskiriame reikšmę $|\alpha| = 0$, $\arg 0 = 0$.

Kadangi kompleksinių skaičių argumentai yra nevienareikšmiai, tai negalima teigti, kad lygių kompleksinių skaičių argumentai lygūs.

Jeigu kompleksiniai skaičiai α ir β lygūs, tai jų moduliai, be abejo, lygūs, o argumentai gali skirtis sveikuoju 2π kartotiniu:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| = |\beta|, \\ \text{Arg } \alpha = \text{Arg } \beta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases} \quad (3.9)$$

Geometrinė kompleksinių skaičių interpretacija rodo, kad visi vienodo modulio kompleksiniai skaičiai atvaizduojami taškais apskritimo, kurio centras yra taškas O .

Analogiškai to paties argumento kompleksiniai skaičiai atvaizduojami taškais spindulio, prasidedančio taške O .

Pavyzdžiai. 1. Skaičiaus $\alpha = 1 - i$ modulis yra $\sqrt{2}$, o argumentas

$$\arg(1 - i) = \frac{7}{4} \pi, \quad \text{Arg}(1 - i) = \frac{7}{4} \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Todėl

$$1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

2. Imkime $\alpha = \sqrt{3} + i$. Tuomet $|\alpha| = 2$, $\arg \alpha = \pi/6$ ir

$$\alpha = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Irodysime kelias teoremas apie trigonometrinės formos kompleksinių skaičių veiksmus.

37 teorema. *Dauginant du kompleksinius skaičius, jų moduliai sudauginami, o argumentai sudedami.*

Irodymas. Imkime du kompleksinius skaičius

$$\alpha = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{ir} \quad \beta = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Tuomet

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Šią taisyklę nesunkiai galima apibendrinti bet kuriam dauginamųjų skaičiui.

38 teorema. *Dalijant kompleksinį skaičių α iš nelygaus nuliui kompleksinio skaičiaus β , reikia skaičiaus α modulį padalyti iš skaičiaus β modulio ir iš skaičiaus α argumento atimti skaičiaus β argumentą.*

Irodymas.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Trupmenos skaitiklį ir vardiklį dauginome iš kompleksinio skaičiaus $r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)$ ir naudojomes lygybę

$$(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1.$$

38 teoremos teiginį galima ir taip užrašyti:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Iš įrodytosios teoremos išplaukia šitokia išvada.

Išvada. *Keliant kompleksinį skaičių natūriniu laipsniu n , jo modulis keliamas tuo laipsniu, o argumentas dauginamas iš n , t. y.*

$$(r (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (3.10)$$

Si formulė vadinama *Muavro formule* (A. Moivre, 1667–1754, anglų matematikas, išvedęs šią formulę).

Analogiška taisyklė tinka ir tuo atveju, kai laipsnio rodiklis neigiamas. Jeigu $\alpha \neq 0$, tai

$$\alpha^{-1} = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-1} = \frac{1}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} =$$

$$= \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r} (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)),$$

todėl

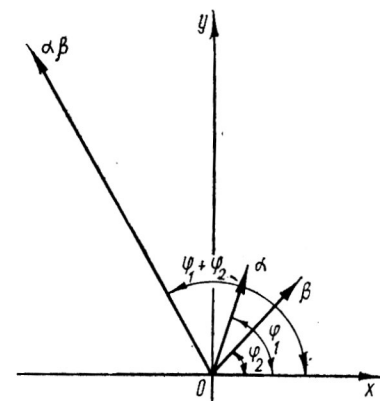
$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{-n} = r^{-n} (\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi))$$

su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$.

Naudodamiesi trigonometrinės formos kompleksinių skaičių daugybos ir dalybos taisyklėmis, galime nesunkiai interpretuoti geometriškai skaičių sandaugą ir santykį.

Daugindami du kompleksinius skaičius α ir β , jų modulius turime sudauginti, o argumentus sudėti. Vadinasi, skaičių α vaizduojantį vektorių reikia pasukti kampu $\arg \beta$ prieš laikrodžio rodyklę ir jo modulį padauginti iš $|\beta|$ (8 pav.).

Akivaizdu, kad atliekant daugybai atvirkščią veiksmą, t. y. dalijant α iš $\beta \neq 0$, reikia vektorių, vaizduojantį skaičių α , pasukti pagal laikrodžio rodyklę kampu $\arg \beta$ ir jo modulį padalyti iš $|\beta|$.



8 pav.

Uždaviniai

10. Apskaičiuokite $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^{-1}$, kai:

1) $\alpha = 3 - 2i$, $\beta = 4 + 5i$,

2) $\alpha = -3 - 4i$, $\beta = -6 + 7i$,

3) $\alpha = \frac{3}{2} + \frac{5}{3}i$, $\beta = -\frac{8}{5} + \frac{4}{3}i$,

4) $\alpha = 0,51 - 0,43i$, $\beta = -3,21 + 6,82i$,

5) $\alpha = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}i$, $\beta = -5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}i$.

11. Užrašykite šių skaičių trigonometrinės formas:

1) 3, 2) -3 , 3) -10 , 4) $2 + 2i$, 5) $1 - i$, 6) $-1 + i$,

7) $\sqrt{3} - i$, 8) $-1 - \sqrt{3}i$, 9) $-1 + \sqrt{3}i$, 10) $5 + 5\sqrt{3}i$.

12. Apskaičiuokite reiškinius:

1) $\frac{(1-i)^8}{(1+i)^{10}}$, 2) $\frac{(2+2i)^7}{(-1+i)^{20}}$, 3) $(1 - \sqrt{3}i)^{14}$,

4) $\frac{(-1-i)^{12}}{(\sqrt{3}+i)^4}$, 5) $\frac{(-\sqrt{3}+i)^4}{(2-2i)^8}$.

Pastaba. Skaičiuojant algebrinės formos kompleksinio skaičiaus modulį ir argumentą, galima remtis tuo, kad kompleksinio skaičiaus $\alpha = a + bi$ argu-

mento pagrindinė reikšmė $\varphi = \arg \alpha$ yra mažiausias neneigiamas lygčių sistemos

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi, \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi \end{cases}$$

sprendinys. Skaičiaus α modulis skaičiuojamas iš formulės

$$r = |\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

§42. Jungtiniai kompleksiniai skaičiai. Modulio savybės

Kompleksiniam skaičiui $\alpha = a + bi$ jungtiniu vadiname skaičių, simetrišką x ašies atžvilgiu; jį žymime $\bar{\alpha}$. Taigi $\bar{\alpha} = a - bi$. Jungtinių kompleksinių skaičių moduliai lygūs, be to,

$$\alpha \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2.$$

Jungtinių skaičių argumentai susiję šitaip:

$$\arg \bar{\alpha} = \begin{cases} -\arg \alpha + 2\pi, & \text{kai } \arg \alpha \neq 0 \\ \arg \alpha, & \text{kai } \arg \alpha = 0. \end{cases}$$

Įrodysime porą teoremų apie jungtinius kompleksinius skaičius.

39 teorema. *Kompleksinis skaičius α yra realus tada ir tik tada, kai jis sutampa su sau jungtiniu skaičiumi.*

Įrodymas. Akivaizdus sąlygos būtinumas: jeigu $\alpha = a + 0 \cdot i$, tai $\bar{\alpha} = a - 0 \cdot i = a = \alpha$. Nesunkiai įrodomas ir sąlygos pakankamumas:

$$[(\alpha = a + bi) \wedge (\alpha = \bar{\alpha})] \Rightarrow a - bi = a + bi \Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0.$$

40 teorema. *Jeigu α – kompleksinis skaičius, a_i ($i=0, 1, \dots, n$) – realieji skaičiai, $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$, tai*

$$f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}.$$

Įrodymas. Kadangi $f(\alpha)$ yra reiškinys, gautas iš skaičių a_i ir α atlikus tik daugybos ir sudėties operacijas, tai pakanka patikrinti, ar įrodomoji savybė galioja toms operacijoms. Jeigu $\alpha = a + bi$ ir $\beta = c + di$ – bet kokie kompleksiniai skaičiai, tai

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = a - bi + c - di = a + c - (b + d)i = \overline{\alpha + \beta},$$

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i = \overline{\alpha \beta}.$$

■ **Išvada.** Funkcija $f: \mathbf{K} \leftrightarrow \mathbf{K}$, apibrėžta formule

$$(\alpha \in \mathbf{K}) \quad f(\alpha) = \bar{\alpha},$$

yra kompleksinių skaičių lauko automorfizmas.

Įrodymas. Funkcija yra abipus vienareikšmė atitiktis. Iš 40 teoremos įrodymo išplaukia

$$f(\alpha + \beta) = \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} = f(\alpha) + f(\beta),$$

$$f(\alpha \cdot \beta) = \overline{\alpha \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = f(\alpha) f(\beta).$$

Taigi f yra izomorfizmas – lauko $\mathbf{K}$ automorfizmas.

Aptarsime keletą svarbių kompleksinio skaičiaus modulio savybių. Jeigu $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, tai

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad |\alpha^m| = |\alpha|^m \quad (\forall m \in \mathbf{N}).$$

Šios lygybės išplaukia iš trigonometrinės formos kompleksinių skaičių daugybos, dalybos ir kėlimo laipsniu taisyklių.

Subtilesnės ir sudėtingesnės yra šitokios nelygybės:

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|,$$

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Jos įrodomos pasitelkus sudėties geometrinę interpretaciją ir yra analogiškos realiųjų skaičių modulio atitinkamoms savybėms.

§43. Šaknies traukimas

Tarkime, kad n yra natūrinis skaičius.

n -ojo laipsnio šaknimi iš kompleksinio skaičiaus α vadiname kiekvieną kompleksinį skaičių z , su kuriuo teisinga lygybė $z^n = \alpha$.

n -ojo laipsnio šaknį iš α žymėsime $\sqrt[n]{\alpha}$. Akivaizdu, kad visos tokios šaknys yra lygties

$$x^n = \alpha \tag{3.11}$$

sprendiniai.

Pakanka nagrinėti atvejį, kai $\alpha \neq 0$.

41 teorema. *n -ojo laipsnio šaknis iš nelygaus nuliui kompleksinio skaičiaus $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ turi kompleksinių skaičių lauke n skirtingų reikšmių z_k , kurios randamos iš formulės*

$$z_k = (\sqrt[n]{\alpha})_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right); \quad (3.12)$$

čia $\sqrt[n]{r}$ – šaknies aritmetinė reikšmė, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Irodymas. Tarkime, kad $x = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ yra (3.11) lygties sprendinys. Iš sąryšio

$$x^n = (\rho(\cos \psi + i \sin \psi))^n = \alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

remdamiesi kėlimo laipsniu taisykle, gauname

$$\rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Iš čia išplaukia

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \text{Arg } \alpha = \varphi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kai $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, gauname n skirtingų $\text{Arg } \alpha$ reikšmių, kurias atitinka n skirtingų $x = z_k$ reikšmių. Imdami kitas k reikšmes, naujų $\text{Arg } \alpha$ reikšmių negauname. Iš tikrųjų, remiantis kompleksinio skaičiaus argumento periodišku,

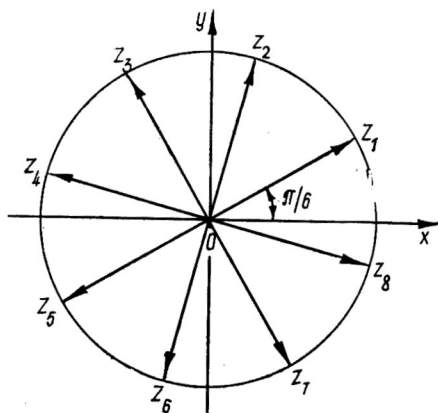
$$\psi_{k+nm} = \frac{\varphi + 2(k+nm)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2m\pi = \psi_k.$$

Visas (3.11) lygties šaknis paprasta atvaizduoti geometriškai. Kai z_k apibrėžti (3.12) formule, gretimų skaičių z_k ir z_{k+1} ($k=0, 1, 2, \dots, n-2$) argumentai skiriasi $2\pi/n$, o jų moduli-

liai lygūs $\sqrt[n]{|\alpha|}$. Nubrėžkime ap-

skritimą spinduliu $\sqrt[n]{|\alpha|}$, nuo x ašies atidėkime kampą φ/n ir nubrėžkime spindulį iš koordinatų pradžios. Kitą spindulį reikia brėžti taip, kad su pirmuoju spinduliu sudarytų kampą $2\pi/n$. Tokiais pat kampais nuo kiekvieno nubrėžto spindulio brėžiami visi kiti spinduliai. Tų spindulių susikirtimo su apskritimu taškai ir bus skaičių z_0, z_1, z_2 ir t. t. vaizdai.

Pavyzdžiui, 9 paveiksle atvaizduotos visos 8-ojo laipsnio šaknys iš kompleksinio skaičiaus



9 pav.

$$z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

t. y.

$$\rho = \sqrt[8]{|z|} = 1, \quad \psi_k = \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right) \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4}$$

($k=0, 1, 2, \dots, 7$).

Naudodamiesi (3.12) formule, galime rasti visas lygčių

$$bx^n = a$$

($a, b \in \mathbf{K}$) šaknis su bet kuriuo natūriniu rodikliu $n \geq 2$. Jeigu $b \neq 0$, tai padauginę abi lygties puses iš b^{-1} , gauname (3.11) pavidalo lygtį. Lieka pritaikyti šaknies traukimo formulę.

Taigi teisingas šitoks teiginys.

n -ojo laipsnio lygtis $bx^n = a$, $a, b \in \mathbf{K}$ ir $b \neq 0$, turi n skirtingų sprendinių kompleksinių skaičių aibėje $\mathbf{K}$.

Pavyzdžiai. 1. Išspręsimė lygtį $x^6 + 2 = 0$.

Turime $x_{k+1} = (\sqrt[6]{-2})_k$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$. Kadangi

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi),$$

tai

$$(\sqrt[6]{-2})_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right), \quad k=0, 1, \dots, 5.$$

Todėl

$$x_1 = (\sqrt[6]{-2})_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right),$$

$$x_2 = (\sqrt[6]{-2})_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} i,$$

$$x_3 = (\sqrt[6]{-2})_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right),$$

$$x_4 = (\sqrt[6]{-2})_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right),$$

$$x_5 = (\sqrt[6]{-2})_4 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right) = -\sqrt[6]{2} i,$$

$$x_6 = (\sqrt[6]{-2})_5 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right);$$

čia visur $\sqrt[6]{2}$ – šaknies aritmetinė reikšmė.

Nesunku įsitikinti, kad sprendiniai yra poromis jungtiniai kompleksiniai skaičiai: $x_0 = \bar{x}_1$, $x_5 = \bar{x}_2$, $x_4 = \bar{x}_3$.

2. Išsprendskime lygtį $ix^3=3$.

Padauginę abi lygties puses iš $-i$, gauname ekvivalenčią lygtį $x^3=-3i$, kurios sprendiniai yra

$$x_{k+1} = (\sqrt[3]{-3i})_k, \quad k=0, 1, 2.$$

Kadangi

$$-3i = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right),$$

tai

$$x_1 = (\sqrt[3]{-3i})_0 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{3}{6} \pi + i \sin \frac{3}{6} \pi \right) = i \sqrt[3]{3},$$

$$x_2 = (\sqrt[3]{-3i})_1 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{7}{6} \pi + i \sin \frac{7}{6} \pi \right) = \sqrt[3]{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right),$$

$$x_3 = (\sqrt[3]{-3i})_2 = \sqrt[3]{3} \left(\cos \frac{11}{6} \pi + i \sin \frac{11}{6} \pi \right) = \sqrt[3]{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right).$$

Tuo atveju, kai $n=2$, galima naudotis kvadratinės šaknies iš algebrinės formos kompleksinio skaičiaus traukimo formule.

Tarkime, kad $\alpha = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$), ir pažymėkime

$$\sqrt{\alpha} = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Kadangi $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, tai $x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$. Pastaroji lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = u, \\ 2xy = v. \end{cases}$$

Pirmąją lygtį pakėlę kvadratu ir prie jos pridėję antrąją lygtį, pakeltą kvadratu, gauname

$$(x^2 + y^2)^2 = u^2 + v^2.$$

Paėmę aritmetinę šaknies reikšmę, gauname

$$x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Toliau sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}, \\ x^2 - y^2 = u, \end{cases}$$

iš kurios randame

$$x = \pm \sqrt{\frac{|\alpha| + u}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{|\alpha| - u}{2}}.$$

Kadangi sprenddami sistemą lygtis kėlėme kvadratu, tai galėjome gauti pašalinių šaknų. Todėl reikia imti tokias x ir y reikšmes, kad būtų $2xy=v$.

Sistemą tenkina šaknys su vienodais ženklais, kai $v > 0$, ir su skirtingais, kai $v < 0$. Taigi

$$(\sqrt[n]{\alpha})_{1,2} = \pm \left(\sqrt[n]{\frac{|\alpha|+u}{2}} + i \operatorname{sign} v \sqrt[n]{\frac{|\alpha|-u}{2}} \right), \quad (3.13)$$

kai $\alpha = u + iv$.

Šios formulės dešinėje pusėje parašytos aritmetinės šaknys iš neneigiamų skaičių, $\operatorname{sign} v = e_v - v$ ženklas.

Uždaviniai

Apskaičiuokite ir pavaizduokite geometriškai:

13. 1) $\sqrt[3]{i}$, 2) $\sqrt[3]{1+i}$, 3) $\sqrt[3]{1-i}$, 4) $\sqrt[3]{2+3i}$, 5) $\sqrt[3]{6-5i}$,

14. 1) $\sqrt[3]{i}$, 2) $\sqrt[3]{-1}$, 3) $\sqrt[3]{-8}$, 4) $\sqrt[3]{2+2i}$, 5) $\sqrt[3]{2-2i}$,

15. 1) $\sqrt[5]{32}$, 2) $\sqrt[4]{-16}$, 3) $\sqrt[3]{-27}$, 4) $\sqrt[3]{1+i}$, 5) $\sqrt[3]{-1+i}$.

§44. Vieneto šaknys

n -ojo laipsnio ($n \in \mathbb{N}$) vieneto šaknimis vadiname lygties

$$x^n = 1 \quad (3.14)$$

sprendinius. Juos žymėsime ε_k ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$). Šiuos sprendinius galime rasti iš (3.12) formulės. Kadangi $\arg 1=0$, tai

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.15)$$

Šaknies ženklo nežymime, taip pat nežymime ir laipsnio rodiklio n , nes paprastai nagrinėjamos tik kokio nors vieno laipsnio vieneto šaknys.

Viena iš vieneto šaknų visuomet yra realusis skaičius $z_0=1$. Jeigu rodiklis n – lyginis skaičius, tai yra ir antra reali vieneto šaknis -1 . Visos kitos vieneto šaknys yra menamieji skaičiai. Tuo lengva įsitikinti prisiminus šaknies iš kompleksinio skaičiaus geometrinį vaizdavimą. Visos vieneto šaknys yra apskritime, kurio centras sutampa su koordinačių pradžia, o spindulys lygus 1. Toks apskritimas su realiąja ašimi susikerta dviejuose taškuose: 1 ir -1 .

Aptarsime kai kurias vieneto šaknų savybes.

1. Bet kurių n -ojo laipsnio vieneto šaknų $\varepsilon_k, \varepsilon_m$ sandauga yra to paties laipsnio vieneto šaknis.

Teiginys bus įrodytas, jei prisiminsime, kad n -ojo laipsnio vieneto šaknys yra (3.14) lygties sprendiniai:

$$(\varepsilon_k \varepsilon_m)^n = \varepsilon_k^n \varepsilon_m^n = 1 \cdot 1 = 1.$$

2. Bet kuris sveikasis n -ojo laipsnio vieneto šaknies ε_k laipsnis ε_k^s yra n -ojo laipsnio vieneto šaknis.

Įrodoma šitaip:

$$(\varepsilon_k^s)^n = (\varepsilon_k^n)^s = 1^s = 1.$$

3. Vieneto šakniai atvirkštinis dydis yra to paties laipsnio vieneto šaknis. Tai atskiras antrosios savybės atvejis, kai $s = -1$.

4. Dviejų n -ojo laipsnio vieneto šaknų ε_k , ε_m santykis yra n -ojo laipsnio vieneto šaknis.

Ši savybė išplaukia iš pirmosios ir trečiosios savybių, nes

$$\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_m} = \varepsilon_k \cdot \varepsilon_m^{-1}.$$

Pažymėkime V_n n -ojo laipsnio vieneto šaknų aibę:

$$V_n = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}.$$

Ta aibė yra kompleksinių skaičių aibės poaibis, turintis n elementų, kuriuos galima pavaizduoti geometriškai vienetinio apskritimo su centru koordinatinių pradžioje taškais, esančiais taisyklingo n -kampio viršūnėse. Įsitikiname, kad aibė V_n uždara daugybos atžvilgiu. Gavome algebrinę struktūrą $(V_n, \cdot)$.

Kadangi kompleksinių skaičių daugyba yra asociatyvi ir komutatyvi, tai tokia ji bus ir aibėje V_n . Nustatėme, kad $1 = \varepsilon_0 \in V_n$ ir kad kiekviena vieno šaknis ε_k turi atvirkštinį elementą $\varepsilon_k^{-1} \in V_n$. Taigi įrodėme šitokią teiginį.

n -ojo laipsnio vieneto šaknų aibė su daugyba yra komutatyvi grupė.

Jeigu norime rasti n -ojo laipsnio vieneto šaknų sandaugą ar santykį, tai turime prisiminti trigonometrinių funkcijų, kuriomis išreiškiamos vieneto šaknys, periodiškumą. Todėl veiksmų su vieneto šaknimis rezultatus galima apibrėžti šitaip:

$$1) \varepsilon_k \cdot \varepsilon_m = \varepsilon_{k+m},$$

$$2) \varepsilon_k : \varepsilon_m = \varepsilon_{k-m},$$

$$3) (\varepsilon_k)^m = \varepsilon_{km};$$

čia užrašas ε_s , kai $s < 0$ arba $s > n$, reiškia n -ojo laipsnio vieneto šaknį ε_r , o r yra mažiausia neneigiamą liekana, gauta skaičių s padalijus iš n .

Šie tvirtinimai įrodinėjami panašiai kaip ir 37 teorema, taip pat remiamasi 38 teorema bei Muavro formule.

Pavyzdžiui, atlikime veiksmus 10-ojo laipsnio vieneto šaknų aibėje V_{10} :

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_7 = \varepsilon_4 \quad (1 - 7 = -6 = (-1) \cdot 10 + 4),$$

$$(\varepsilon_5)^9 = \varepsilon_5 \quad (5 \cdot 9 = 45 = 4 \cdot 10 + 5).$$

Tarkime, kad ε_k yra fiksuota n -ojo laipsnio vieneto šaknis. Nagrinėkime aibę

$$(\varepsilon_k) = \{\varepsilon_k^m \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Akivaizdu, kad $(\varepsilon_k) \subset V_n$. Šioje aibėje galima daugyba:

$$\varepsilon_k^a \cdot \varepsilon_k^b = \varepsilon_k^{a+b}.$$

Joje yra vienetinis elementas ($\varepsilon_k^0 = 1$) bei kiekvienam elementui atvirkštinis. Taigi aibė (ε_k) yra grupė daugybos atžvilgiu.

Jeigu $(\varepsilon_k) = V_n$, tai šaknis ε_k vadinama primityviaja n -ojo laipsnio vieneto šaknimi.

Iš šio apibrėžimo išplaukia ir toks primityviosios vieneto šaknies apibūdinimas: n -ojo laipsnio vieneto šaknis ε_k vadinama primityviaja, jei visi n iš eilės einantys jos laipsniai $\varepsilon_k^0 = 1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \dots, \varepsilon_k^{n-1}$ yra skirtingi.

Šios sąlygos pakankamumas akivaizdus. Būtinumas išplaukia iš štai ko: jeigu nurodytoje laipsnių sekoje yra sutampančių skaičių, tai toje sekoje nėra visų n -ojo laipsnio vieneto šaknų. Keldami ε_k didesniais laipsniais, naujų vieneto šaknų negausime, nes $\varepsilon_k^n = 1, \varepsilon_k^{n+1} = \varepsilon_k$ ir t. t.

Pavyzdžiai. 1. Nesunku patikrinti, kad i yra primityvi 4-ojo laipsnio vieneto šaknis. Menamasis vienetas i tikrai yra ketvirtojo laipsnio vieneto šaknis, nes

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

ir keturi iš eilės einantys i laipsniai

$$i^0 = 1, i, i^2 = -1, i^3 = -i$$

yra skirtingi. Akivaizdu, kad daugiau skirtingų reikšmių nėra ir

$$i^{4m+r} = i^r \quad (\forall m \in \mathbb{N}, r = 0, 1, 2, 3).$$

2. Abi menamosios trečiojo laipsnio vieneto šaknys yra primityvios.

Iš (3.15) randame trečiojo laipsnio (arba kubinės) vieneto šaknis:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Lengva patikrinti, kad

$$\varepsilon_1^3 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_1^2 = 1, \quad \varepsilon_2^3 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^2 = 1.$$

Skaitytojui siūlome patikrinti, ar ε_5 yra primityvi 12-ojo laipsnio vieneto šaknis. ε_4 nėra primityvi vieneto šaknis, nes

$$(\varepsilon_4) = \{\varepsilon_0, \varepsilon_4, \varepsilon_8\} \neq V_{12}.$$

Akivaizdu, kad ε_1 yra primityvi vieneto šaknis. Ar $\varepsilon_k, k > 1$, yra primityvi n -ojo laipsnio vieneto šaknis, gana paprasta patikrinti remiantis šitokia teorema.

42 teorema. n -ojo laipsnio vieneto šaknis ε_k yra primityvi tada ir tik tada, kai n ir k neturi bendrų daliklių, didesnių už 1 ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Irodymas. Būtinumas. Tarkime, kad n ir k turi kokį nors bendrą daliklį $d > 1$. Tuomet sutampa laipsniai ε_k^0 ir $\varepsilon_k^{n/d}$:

$$\varepsilon_k^{n/d} = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^{n/d} = \cos \frac{2k\pi}{d} + i \sin \frac{2k\pi}{d} = 1 = \varepsilon_k^0,$$

nes k/d – sveikasis skaičius. Tačiau ši lygybė prieštarauja antrajam šaknies primityvumo apibrėžimui.

Pakankamumas. Tarkime, kad k ir n neturi bendrų daliklių. Tuomet ε_k turi būti primitivi šaknis. Iš tikrųjų, jeigu kokie nors du ε_k laipsniai $\varepsilon_k^m, \varepsilon_k^l$ ($0 \leq l < m \leq n-1$) sutampa, tai

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^m &= \cos \frac{2km\pi}{n} + i \sin \frac{2km\pi}{n} = \cos \frac{2kl\pi}{n} + i \sin \frac{2kl\pi}{n} \Rightarrow \frac{2km\pi}{n} = \\ &= \frac{2kl\pi}{n} + 2\pi t \Rightarrow k(m-l) = nt;\end{aligned}$$

čia t – tam tikras sveikasis skaičius. Pastaroji lygybė prieštaringa: dešinioji jos pusė dalijasi iš n , o kairioji negali dalytis, nes k su n neturi bendrų daliklių, o skaičius $m-l$ mažesnis už n ir todėl taip pat nesidalija iš n . Šis prieštaravimas įrodo, kad tikrai visi ε_k laipsniai $1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \dots, \varepsilon_k^{n-1}$ yra skirtingi. Vadinasi, ε_k – primitivioji šaknis.

Primitiviųjų n -ojo laipsnio vieneto šaknų yra tiek, kiek yra natūrinių skaičių, ne didesnių už n ir neturinčių didesnių už 1 bendrų su n daliklių. Primitiviųjų n -ojo laipsnio vieneto šaknų skaičius žymimas $\varphi(n)$ ir vadinamas *Eulerio funkcija*. Sutarta laikyti $\varphi(1)=1$.

Jeigu $n > 1$, tai ε_0 nėra primitivi šaknis, o ε_1 , kaip jau minėjome, visuomet yra primitivi šaknis, kad ir koks būtų n . Todėl teisinga lygybė

$$\varepsilon_k = \varepsilon_1^k.$$

Nesunku įsitikinti, kad n -ojo laipsnio vieneto šaknis, jeigu ji primitivi, nėra jokio kito mažesnio laipsnio m ($m < n$) vieneto šaknis. Lygybė

$$\varepsilon_k^m = 1 = \varepsilon_k^0 \quad (0 < m < n)$$

prieštarautų vieneto šaknies ε_k primityvumo sąlygai.

Iš šio tvirtinimo išplaukia, kad

$$\varepsilon_k^s = 1 \Leftrightarrow s = nt, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kai ε_k yra primitivioji n -ojo laipsnio vieneto šaknis.

Iš tikrųjų, jeigu s nebūtų n kartotinis, t. y. dalydami s iš n , gautume liekaną r ($s = np + r$, $0 < r < n$), tai būtų

$$\varepsilon_k^s = 1 \Rightarrow \varepsilon_k^{np+r} = 1 \Rightarrow (\varepsilon_k^n)^p \cdot \varepsilon_k^r = 1 \Rightarrow \varepsilon_k^r = 1.$$

Tačiau ką tik nustatėme, kad n -ojo laipsnio primitivioji vieneto šaknis nėra jokio kito mažesnio laipsnio r vieneto šaknis. Gautasis prieštaravimas rodo, kad tikrai lygybėje $\varepsilon_k^s = 1$ rodiklis s turi būti šaknies laipsnio n kartotinis.

Įrodysime dar vieną teoremą apie primitiviasias šaknis.

43 teorema. Jeigu ε_k yra n -ojo laipsnio primitivioji vieneto šaknis, tai tokio pat laipsnio primitivioji vieneto šaknis yra ir bet kuris ε_k laipsnis ε_k^m , kai m ir n neturi bendrų daliklių d ($d > 1$), $m \in \mathbb{N}$.

Įrodymas. Tarkime, kad m ir n neturi bendrų daliklių, bet ε_k^m nėra primitivi šaknis, t. y. sutampa kurie nors du jos laipsniai

$$(\varepsilon_k^m)^p = (\varepsilon_k^m)^r, \quad 0 \leq p < r \leq n-1.$$

Šią lygybę pakeitę lygybe

$$(\varepsilon_k^m)^{r-p} = 1 \quad (p, r \in \mathbb{N}),$$

gautume, kad $m(r-p)$ turi dalytis iš n . Tačiau tai negalima, nes pagal prielaidą m neturi bendrų daliklių su n , o $0 < r-p < n$. Gautasis prieštaravimas rodo, kad prielaida, jog ε_k^m nėra primitivioji šaknis, neteisinga.

Pastaba. Tas pats skaičius gali būti įvairaus laipsnio vieneto šaknis. Nesunku įsitikinti, kad, pavyzdžiui, i yra ne tik 4-ojo, bet ir 8-ojo, 12-ojo, 16-ojo ir t. t. laipsnio vieneto šaknis.

Galima įrodyti, kad *visas n -ojo laipsnio šaknies iš kompleksinio skaičiaus z reikšmės z_k galime gauti padauginę kurią nors vieną tos šaknies reikšmę iš visų n -ojo laipsnio vieneto šaknų ε_k , $k=0, 1, \dots, n-1$.*

Iš tikrųjų, remdamiesi (3.12) ir (3.15) formulėmis (laikomės ten vartotų žymėjimų), nesunkiai galime patikrinti, kad

$$z_k = z_0 \cdot \varepsilon_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.16)$$

Aibės $(\varepsilon_k) = \{\varepsilon_k^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ elementų skaičius vadinamas šaknies eile ir žymimas $E(\varepsilon_k)$. Jeigu ε_k – primitivioji vieneto šaknis, tai jos eilė yra n . Jeigu ε_k nėra primitivė, tai pagal 42 teoremą skaičių n ir k bendras didžiausias daliklis $D(n, k) = d > 1$. Tuomet, paėmę skaičių $l = n/d$ bei pažymėję $k = k_1 d$, gauname

$$\varepsilon_k^l = \varepsilon_k^{n/d} = \varepsilon_{\frac{n}{d} k_1 d} = \varepsilon_{k_1 n} = \varepsilon_0 = 1.$$

Taigi tuo atveju $E(\varepsilon_k) = 1 = n/d$.

Matome, kad kiekvienos vieneto šaknies eilė yra šaknies rodiklio daliklis.

Kadangi $(\varepsilon_k)^{E(\varepsilon_k)} = 1$, tai grupė (ε_k) yra $E(\varepsilon_k)$ laipsnio vieneto šaknų grupė.

Pavyzdžiai. 1. 8-ojo laipsnio vieneto šaknis ε_6 yra ir 4-ojo laipsnio vieneto šaknis, nes $\varepsilon_6^4 = \varepsilon_{24} = \varepsilon_0 = 1$. Tą patį galima pasakyti ir apie kitas 8-ojo laipsnio vieneto šaknis $\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_4$.

2. Visų kubinės šaknies iš 8 reikšmių ieškome remdamiesi (3.16) formule:

$$(\sqrt[3]{8})_k = \sqrt[3]{8} \varepsilon_k = 2\varepsilon_k, \quad k=0, 1, 2.$$

Kubines vieneto šaknis jau skaičiavome ankstesniame pavyzdyje. Taigi

$$(\sqrt[3]{8})_0 = 2 - \text{aritmetinė reikšmė,}$$

$$(\sqrt[3]{8})_1 = -1 + i\sqrt{3},$$

$$(\sqrt[3]{8})_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Uždaviniai

16. Įrodykite, kad $\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a} (\sqrt[n]{-1})_k$, kai $a > 0$.

17. Apskaičiuokite:

$$1) \sqrt[3]{1}, \quad 2) \sqrt[4]{1}, \quad 3) \sqrt[6]{1}, \quad 4) \sqrt[8]{1}.$$

18. Raskite visas primityviasias n -ojo laipsnio vieneto šaknis:

1) $n=6$, 2) $n=7$, 3) $n=10$, 4) $n=15$, 5) $n=18$.

19. Raskite 12-ojo laipsnio vieneto šaknų grupės pogrūpį (ε_k) ir jo eilę $E(\varepsilon_k)$, kai:

1) $k=3$, 2) $k=4$, 3) $k=5$, 4) $k=6$, 5) $k=11$.

§45. Antrojo, trečiojo ir ketvirtojo laipsnio lygtys

Antrojo laipsnio lygtis. Ieškosime lygties

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3.17)$$

su kompleksiniais koeficientais sprendinių. Galime laikyti $\alpha \neq 0$. Pažymėkime $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Pirmiausia pertvarkysime šios lygties kairiąją pusę:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left(x^2 + 2x \frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right) - \alpha \left(\left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \\ &= \alpha \left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Kadangi $\alpha \neq 0$, tai (3.17) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2}. \quad (3.18)$$

Šios dvinarės lygties sprendimas jau buvo aptartas. Taigi

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \right)_{1,2}.$$

Kadangi kvadratinės šaknies iš kompleksinio skaičiaus reikšmės skiriasi tik ženklų, tai bet kurią kvadratinę šaknį iš (3.18) lygties dešinėje pusėje parašyto skaičiaus pažymėję $\sqrt{\Delta}/2\alpha$, gauname kvadratinės lygties sprendinių formulę:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}. \quad (3.19)$$

Kvadratinė šaknis $\sqrt{\Delta}$ turi dvi skirtingas reikšmes, todėl šioje formulėje prieš reiškinį $\sqrt{\Delta}$ dviejų ženklų galima būtų ir nerašyti. Tai daroma tik iš tradicijos. Kai pošaknis Δ yra teigiamas realusis skaičius, $\sqrt{\Delta}$ – šaknies aritmetinė reikšmė, tuomet du ženklai prieš $\sqrt{\Delta}$ atitinka dvi skirtingas (kai $\Delta \neq 0$) x reikšmes.

Kvadratinė lygtis su kompleksiniais koeficientais turi du sprendinius, kurie sutampa, kai $\Delta=0$.

Iš vidurinės mokyklos kurso žinome, kad lygtis

$$ax^2 + bx + c = 0$$

su realiaisiais koeficientais ir $a \neq 0$ turi realiuosius sprendinius, kai $b^2 - 4ac \geq 0$.

Čia įrodėme, kad kvadratinė lygtis su realiaisiais koeficientais, kurios diskriminantas $\Delta = b^2 - 4ac$ yra neigiamas, turi du menamuosius sprendinius. Iš tikrųjų

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|} \sqrt{-1} = \pm i \sqrt{|\Delta|}$$

ir iš (3.19) formulės gauname

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

x_1 ir x_2 yra menamieji jungtiniai skaičiai.

Pavyzdžiai. 1. Išspręskime lygtį

$$3x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Turime:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 9}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{6} = \frac{-2 \pm i \sqrt{5}}{3}.$$

Spręsdami kvadratinę lygtį su menamaisiais koeficientais, dažnai naudosimės kvadratinės šaknies traukimo iš algebrinės formos kompleksinių skaičių formulėmis.

2. Išspręskime lygtį

$$2ix^2 - (2-i)x - 1 = 0.$$

Iš (3.19) formulės gauname

$$x_{1,2} = \frac{2-i \pm \sqrt{(2-i)^2 + 8i}}{4i} = \frac{2-i \pm \sqrt{3+4i}}{4i}.$$

Kvadratinę šaknį iš $3+4i$ randame iš (3.13) formulės:

$$\sqrt{3+4i} = \pm \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{25}}{2}} + i \sqrt{\frac{-3+\sqrt{25}}{2}} \right) = \pm (4+i\sqrt{1}) = \pm (2+i).$$

Lygties sprendiniai yra

$$x_1 = \frac{2-i+2+i}{4i} = \frac{4}{4i} = \frac{1}{i} = -i,$$

$$x_2 = \frac{2-i-(2+i)}{4i} = \frac{-2i}{4i} = -\frac{1}{2}.$$

Trečiojo laipsnio lygtis. Išnagrinėkime trečiojo laipsnio lygtį su kompleksiniais koeficientais:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (3.20)$$

($a \neq 0$). Pakeitę šioje lygtyje

$$x = y - \frac{b}{3a},$$

gauname lygtį

$$ay^3 + \frac{-b^2+3ac}{3a} y + \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2} = 0.$$

Padaliję visus lygties narius iš a ir pažymėję

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3},$$

gauname kubinę lygtį, kurią vadinsime normuotąja:

$$y^3 + py + q = 0. \quad (3.21)$$

Šioje lygtyje pakeiskime y dviejų naujų kintamųjų u ir v suma $u+v$:

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Kintamuosius u ir v parinkime taip, kad pastarojoje lygtyje koeficientas prie $u+v$ būtų lygus 0. Gausime sistemą

$$\begin{cases} 3uv + p = 0, \\ u^3 + v^3 + q = 0. \end{cases}$$

Pertvarkę sistemą šitaip:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -(p/3)^3 \end{cases}$$

ir palyginę gautąją sistemą su Vieto formulėmis kvadratinei lygčiai, matome, kad u^3 ir v^3 – kvadratinės lygties

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

šaknys. Todėl

$$u^3 = z_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Pošaknio reiškinys $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ vadinamas (3.20) kubinės lygties *diskriminantu*. Taigi galime rašyti

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}.$$

Formaliai ištraukę trečiojo laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus $-(q/2) + \sqrt{D}$, gausime tris u reikšmes. Panašiai galime rasti tris kintamojo v reikšmes, traukdami trečiojo laipsnio šaknį iš skaičiaus $-(q/2) - \sqrt{D}$. Paėmę visas u ir v reikšmes, gausime devynias sumos $u+v$ reikšmes. Tačiau ne visos tos reikšmės bus (3.21) lygties sprendiniai – iš jų reikia atrinkti tik tas, kurios tenkina lygtį $3uv + p = 0$.

Tokiu būdu gauname, kad normuotos kubinės (3.21) lygties sprendiniai y randami iš formulių

$$y = u + v;$$

čia u ir v turi po tris reikšmes:

$$u_{k+1} = \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \right)_k, \quad v_{k+1} = -\frac{p}{3u_{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (3.22)$$

44 paragrafe matėme, kad visas n -ojo laipsnio šaknies iš kompleksinio skaičiaus reikšmės galime gauti dauginami vieną kurią nors šaknies reikšmę iš visų to paties laipsnio vieneto šaknų.

Pažymėję $\varepsilon_0 = 1$, ε_1 , ε_2 tris kubines vieneto šaknis, galime nesunkiai patikrinti, kad normuotos (3.21) lygties sprendiniai y_i gali būti taip užrašyti:

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = u\varepsilon_1 + v\varepsilon_2, \quad y_3 = u\varepsilon_2 + v\varepsilon_1;$$

čia u ir v – bet kurie sprendiniai, nurodyti (3.22) formulėje (bet atitinkantys tą pačią indeksą k reikšmę). Kitos skaičių u ir v bei vieneto šaknų ε_i kombinacijos nėra sprendiniai.

(3.22) formulėse įrašę p ir q reikšmės bei prisiminę sąryšį $x = y - (b/3a)$, galime gauti tris pilnosios kubinės (3.20) lygties sprendinius. (3.22) formulės vadinamos *Kardano formulėmis* (G. Cardano, 1501–1576, italų matematikas).

Praktiškai Kardano formulės nėra pakankamai efektyvios, nes jomis naudojantis tenka atlikti sudėtingus skaičiavimus.

Kardano formulės tinka ir lygtims su realiaisiais koeficientais spręsti.

Kai $D \geq 0$, kubinė lygtis turi vieną realiąją ir dvi menamąsias jungtines šaknis.

Kai $D < 0$, u ir v pošakniai yra jungtiniai kompleksiniai skaičiai. Parinkę u ir v reikšmėms tą pačią argumento reikšmę, gauname $u = \bar{v}$. Toks parinkimas atitinka sąlygą $3uv + p = 0$, nes $u\bar{u}$ yra realusis skaičius, lygus $-p/3$.

Kadangi $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_2$, tai

$$y_1 = u + v = \bar{v} + v = 2 \operatorname{Re} v,$$

$$y_2 = u\varepsilon_1 + v\varepsilon_2 = \bar{v}\bar{\varepsilon}_2 + v\varepsilon_2 = 2 \operatorname{Re}(v\varepsilon_2),$$

$$y_3 = u\varepsilon_2 + v\varepsilon_1 = \bar{v}\bar{\varepsilon}_1 + v\varepsilon_1 = 2 \operatorname{Re}(v\varepsilon_1).$$

Taigi, kai $D < 0$, visos trys šaknys y_i yra realios. Vadinasi, kubinė lygtis su realiaisiais koeficientais visuomet turi bent vieną realiąją šaknį.

Pavyzdžiai. 1. Nustatysime, kiek realiųjų šaknų turi lygtis $x^3 + x^2 + 1 = 0$.

Randame $p = -\frac{1}{9}$, $q = \frac{1}{27} + \frac{1}{2} = \frac{29}{54}$. Kadangi $D = \frac{1}{4} \left(\frac{29}{54} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(-\frac{1}{9} \right)^3 > 0$ tai lygtis turi vieną realiąją ir dvi menamąsias šaknis.

2. Rasime lygties $x^3 - 3x - 4 = 0$ sprendinius.

$$D = (-2)^2 + (-1)^3 = 3, \quad u = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}}, \quad v = \sqrt[3]{-2 - \sqrt{3}},$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}},$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Nustatėme, kad *kiekviena trečiojo laipsnio lygtis su kompleksiniais koeficientais turi tris sprendinius*.

Ketvirtojo laipsnio lygtis. Nagrinėsime 4-ojo laipsnio lygtį su kompleksiniais koeficientais

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (3.23)$$

Kiekvieną ketvirtojo laipsnio lygtį galime užrašyti (3.23) pavidalu, padaliję visus jos koeficientus iš koeficiento prie x^4 .

Pateiksime vieną tokios lygties sprendimo būdą, vadinamą *Ferario vardu* (L. Ferrari, italų matematikas). Metodo esmė – pilnojo kvadrato sudarymas. Atliekame akivaizdžius pertvarkius:

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= (x^2)^2 + 2x^2 \frac{a}{2} x + \left(\frac{a}{2} x\right)^2 + bx^2 + cx + d - \left(\frac{a}{2} x\right)^2 = \\ &= \left(x^2 + \frac{a}{2} x\right)^2 + 2t \left(x^2 + \frac{a}{2} x\right) + t^2 + bx^2 + cx + \\ &+ d - \left(\frac{a}{2} x\right)^2 - 2t \left(x^2 + \frac{a}{2} x\right) - t^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2} x + t\right)^2 - \\ &- \left(\left(\frac{a^2}{4} + 2t - b\right) x^2 + (at - c)x + (t^2 - d)\right); \end{aligned}$$

čia t – bet koks skaičius. (3.23) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + t\right)^2 = \left(\frac{a}{4} + 2t - b\right)x^2 + (at - c)x + (t^2 - d). \quad (3.24)$$

Kadangi t yra bet koks, tai jį parinksime taip, kad dešinioji (3.24) lygties pusė būtų pilnasis kvadratas. Žinome, kad trinaris $Ax^2 + Bx + C$ yra pilnasis kvadratas, kai $B^2 - 4AC = 0$. Taigi t reikia taip parinkti, kad būtų

$$(at - c)^2 - 4 \left(\frac{a^2}{4} + 2t - b\right) (t^2 - d) = 0.$$

Tai yra trečiojo laipsnio t atžvilgiu lygtis. Ji vadinama (3.23) lygties *rezolvente*. Jau žinome, kad ji turi šaknį kompleksinių skaičių aibėje. Paėmę kurią nors šios lygties sprendinį, kurį žymėsime t_0 , ir įrašę į (3.24) lygtį, gausime

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} x + t_0\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2;$$

čia α ir β priklauso nuo t_0 . Gautoji lygtis ekvivalenti visumai

$$\begin{cases} x^2 + \frac{a}{2} x + t_0 = \alpha x + \beta, \\ x^2 + \frac{a}{2} x + t_0 = -(\alpha x + \beta). \end{cases}$$

Kiekviena šios visumos lygčių yra kvadratinė ir turi po dvi šaknis (atskiru atveju jos gali sutapti). Tos šaknys ir yra ketvirtojo laipsnio (3.23) lygties sprendiniai.

Įsitikiname, kad *kiekviena 4-ojo laipsnio lygtis su kompleksiniais koeficientais turi kompleksinių šaknų*.

Pavyzdys. Išspręskime lygtį $x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4 = 0$.

Lygtį pertvarkome:

$$\begin{aligned}x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 4 &= (x^2)^2 + 2x^2 \cdot \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}x^2 + 2x + 4 = \\&= \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + 2t \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) + t^2 + \frac{15}{4}x^2 + 2x + 4 - 2t \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) - t^2 = \\&= \left(x^2 + \frac{x}{2} + t\right)^2 - \left(\left(2t - \frac{15}{4}\right)x^2 + (t-2)x + (t^2 - 4)\right).\end{aligned}$$

Gauname ekvivalenčią lygtį

$$\left(x^2 + \frac{x}{2} + t\right)^2 = \left(2t - \frac{15}{4}\right)x^2 + (t-2)x + (t^2 - 4).$$

Sudarome rezolventę

$$(t-2)^2 - 4 \left(2t - \frac{15}{4}\right)(t^2 - 4) = 0.$$

Matome, kad viena rezolventės šaknis yra $t=2$. Įrašome ją į lygtį ir gauname lygtį

$$\left(x^2 + \frac{x}{2} + 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2,$$

iš kurios išplaukia lygčių visuma

$$\begin{cases}x^2 + \frac{x}{2} + 2 = \frac{x}{2}, \\x^2 + \frac{x}{2} + 2 = -\frac{x}{2}.\end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių visumą, gauname:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{2}, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Aukštesnio negu ketvirtojo laipsnio lygčių bendruoju atveju išspręsti radikalais negalima. Tai dar 1824 m. įrodė norvegų matematikas *Abelis* (N. H. Abel, 1802–1829). Išsamiau tai bus nagrinėjama 2 dalyje.

Uždaviniai

20. Išspręskite antrojo laipsnio lygtis:

- 1) $x^2 + ix - 1 = 0$,
- 2) $2ix^2 - 3x + i = 0$,
- 3) $x^2 - 4x - i = 0$.

21. Išspręskite kubines lygtis:

- 1) $x^3 + 2x + 1 = 0$,
- 2) $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$,
- 3) $x^3 + 2x^2 + 1 = 0$.

22. Išspręskite lygtis:

- 1) $x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$,
- 2) $x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$,
- 3) $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$,
- 4) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 12x + 4 = 0$.

Tiesinių lygčių sistemos

§46. Pagrindinės sąvokos

Vidurinėje mokykloje mokoma spręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem kintamaisiais ir trijų tiesinių lygčių su trimis kintamaisiais sistemas keliais pagrindiniais būdais: keitimo, algebrinės sudėties, grafiniu. Priminsime jų praktinį taikymą.

Pavyzdys. Spręsdami lygčių sistemą

$$3x + 4y + 3z = 1,$$

$$x - 4y - 3z = 7,$$

$$3x + 2y + 3z = 5$$

keitimo būdu, mažiname kintamųjų ir lygčių skaičių; iš antrosios lygties išreiškiame $x = 7 + 4y + 3z$, šią reikšmę įrašome į pirmąją ir trečiąją lygtis ir gauname sistemą

$$4y + 3z = -5,$$

$$7y + 6z = -8.$$

Dabar iš pirmosios lygties išreiškiame $y = \frac{1}{4}(-5 - 3z)$ ir, šią reikšmę įrašę į antrąją lygtį, gauname $z = 1$. Šią z reikšmę įrašę į reiškinį $y = -\frac{1}{4}(5 + 3z)$, randame $y = -2$, o įrašę rastąsias z ir y reikšmes į $x = 7 + 4y + 3z$, randame $x = 2$.

Taigi gavome sistemos sprendinį

$$x = 2, y = -2, z = 1,$$

kurį trumpiau galime užrašyti $(2, -2, 1)$.

Išspręskime tą pačią sistemą algebrinės sudėties būdu:

$$\begin{array}{rcl} x - 4y - 3z = 7, & & \\ 3x + 4y + 3z = 1, & (-1) & \downarrow \\ 3x + 2y + 3z = 5. & & \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} (-3) \\ \downarrow \end{array}$$

Pirmiausia eliminuojame x iš antrosios ir trečiosios lygčių. Tuo tikslu (kaip parodyta schemoje) antrąją lygtį dauginame iš -1 ir pridame prie trečiosios, po to pirmąją lygtį dauginame iš -3 ir pridame prie antrosios. Suprastinę antrosios lygties abi puses iš 4 , o ketvirtosios iš -2 , gauname sistemą

$$x - 4y - 3z = 7,$$

$$4y + 3z = -5,$$

$$y = -2.$$

Trečiąją lygtį padauginę iš -4 ir pridėję prie antrosios, gausime sistemą

$$x - 4y - 3z = 7,$$

$$y = -2,$$

$$3z = 3,$$

kurios sprendinį $(2, -2, 1)$ lengvai randame.

Tačiau reikia pastebėti, kad kuo daugiau lygčių sistemoje, tuo neparankesnis pirmasis sprendimo būdas. Tuo tarpu algebrinės sudėties būdą (jį vadinsime kintamųjų nuoseklaus eliminavimo, arba Gauso, būdu) lengvai galima apibendrinti sistemoms, kuriose yra bet koks lygčių ir kintamųjų skaičius, spręsti.

Tarkime, kad $(L, +, \cdot)$ yra laukas. Toliau trumpumo dėlei vadinsime tiesiog lauku L .

n-vietį predikatą

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_j \in L, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad b \in L,$$

vadiname n kintamųjų tiesinę lygtimi su koeficientais iš lauko L; $a_1, \dots, a_n$ vadinami lygties koeficientais, b – jos laisvuju nariu.

Tuo atveju, kai koeficientai ir laisvasis narys yra skaičiai, turime lygtį su skaitiniais koeficientais.

Rinkinyse lauko L n elementų $(l_1, l_2, \dots, l_n)$, kuriuos įrašę į predikatą (lygtį) atitinkamai vietoje $x_1, x_2, \dots, x_n$ gauname teisingą teiginį

$$\sum_{j=1}^n a_j l_j = b,$$

vadinamas lygties sprendiniu.

Taip pat sakoma, kad kintamųjų reikšmės $x_1 = l_1, \dots, x_n = l_n$ tenkina lygtį. Aibę

$$S_b = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_j x_j = b \right\}, \quad (4.1)$$

apibrėžtą predikato (lygties), vadinsime *lygties sprendinių aibe*.

Aišku, kad $S_b \subset L \times L \times \dots \times L = L^n$.

Lygties sprendinių aibė yra tuščia tiktai tada, kai $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, $b \neq 0$. Visais kitais atvejais ji nėra tuščia. Pavyzdžiui, kai $a_1 \neq 0$, teiginys

$$a_1 b a_1^{-1} + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = b$$

Aišku, kad sistemos (S) sprendinys yra toks lauko L elementų rinkinys $(l_1, l_2, \dots, l_n)$, su kuriuo teiginys

$$\bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = b_i \right)$$

teisingas.

Aibė

$$S = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \right) \right\} \quad (4.2)$$

yra sistemos (S) sprendinių aibė.

Kadangi

$$S = \bigcap_{i=1}^m \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \right\},$$

tai iš (4.1) ir (4.2) išplaukia

$$S = \bigcap_{i=1}^m S_i; \quad (4.3)$$

čia S_i – sistemos i -osios lygties sprendinių aibė.

Aišku, kad $S \subset L^n$.

Jeigu sistemos sprendinių aibė S yra tuščia (sistema neturi sprendinių), tai ta sistema vadinama nesuderinta.

Jeigu sistemos sprendinių aibė S yra netuščia (sistema turi sprendinių), tai ta sistema vadinama suderinta.

Suderinta sistema vadinama *apibrėžta*, jeigu jos sprendinių aibė turi tik vieną elementą, ir *neapibrėžta*, jeigu jos sprendinių aibė turi daugiau kaip vieną elementą.

Pavyzdžiai. Sistema $\begin{cases} 6x + 5y = 3, \\ 12x + 10y = 0 \end{cases}$ neturi sprendinių – ji nesuderinta.

Sistema $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ 4x + y = 10 \end{cases}$ turi vieną sprendinį $(3, -2)$ – ji suderinta, apibrėžta.

Sistema $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$ turi daugiau kaip vieną sprendinį, pavyzdžiui,

$(1, -1), (-1, -2), (-3, -3)$, todėl ji yra suderinta, neapibrėžta.

Kai bent vienos lygties sprendinių aibė yra tuščia, iš (4.3) gauname $S = \emptyset$. Taigi galime suformuluoti tiesinių lygčių sistemos nesuderintumo požymį.

Jeigu sistemoje (S) yra lygtis su lygiais nuliui koeficientais ir nelygiu nuliui laisvuju nariu, tai ta sistema nesuderinta.

Pažymėsime, kad kiekviena homogeninė tiesinių lygčių sistema yra suderinta, nes

$$(0, 0, \dots, 0) \in \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \right) \right\}.$$

Kituose paragrafuose domėsimės šitokiais klausimais:

1. Kokioms sąlygoms esant tiesinių lygčių sistema suderinta?
2. Kokioms sąlygoms esant tiesinių lygčių sistema apibrėžta, t. y. turi vienintelį sprendinį?
3. Kaip galima rasti tiesinių lygčių sistemos sprendinius, t. y. visų sprendinių aibę?

Pirmieji du klausimai yra daugiau teorinio pobūdžio, o trečiasis „liečia“ tiesinių lygčių sistemų praktinį sprendimą. Pirmiausia (48 paragrafe) „ieškodami atsakymo“ į trečiąjį klausimą, t. y. „ieškodami tiesinių lygčių sistemų sprendimo“ būdų, atsakysime į pirmuosius du klausimus. Kituose šio skyriaus paragrafuose tiesinių lygčių sistemas nagrinėsime vartodami naujas sąvokas (n -mačių vektorių erdvė, vektorių tiesinis priklausomumas, vektorių sistemos ir matricos rangas bei kitas). Dabar visą dėmesį skirsime vienam tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdui – Gauso metodui. Tam tikslui reikalinga tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumo sąvoka.

§47. Tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumas. Elementarieji pertvarkiai

Sprendžiant tiesinių lygčių sistemą, tenka ją keisti kita paprastesne sistema ir spręsti tą paprastesnę. Ar galime būti tikri, kad naujosios ir senosios sistemų sprendiniai yra tie patys? Kaip galime sistemą pakeisti, kad naujai gautos sistemos sprendiniai būtų tie patys?

Norėdami išsiaiškinti šiuos klausimus, įvesime tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumo sąvoką.

Imkime dvi tiesinių lygčių sistemas

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (S)$$

ir

$$\sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j = b'_i \quad (i = 1, \dots, m'). \quad (S')$$

Bendruoju atveju gali būti ir $m \neq m'$.

Dvi tiesinių lygčių sistemos (S) ir (S') su tais pačiais kintamaisiais $x_1, \dots, x_n$ vadinamos ekvivalenčiomis, jeigu jų sprendinių aibės sutampa.

Aišku, vietoj sistemos (S) galime spręsti jai ekvivalenčią sistemą (S'). Kitaip sakant, sprendžiamą tiesinių lygčių sistemą galime pakeisti kita jai ekvivalenčia sistema. Jau vidurinėje mokykloje, sprendžiant tiesinių lygčių sistemas ar ieškant jų sprendimo būdų, atliekami šie *elementarieji pertvarkiai*:

- 1) *sukeičiamos vietomis sistemos lygtys,*
- 2) *sistemos lygtis dauginama iš nelygaus nuliui skaičiaus,*
- 3) *prie vienos sistemos lygties pridedama kuri nors kita tos pačios sistemos lygtis.*

Dažnai atliekamos kelių pertvarkių kombinacijos.

44 teorema. *Jeigu tiesinių lygčių sistemą (S) keisime atlikdami elementariusius pertvarkius, tai gausime tiesinių lygčių sistemas, ekvivalenčias sistemai (S).*

Įrodymas. 1. Sistemos (S) k -ąją lygtį dauginame iš $c \neq 0$. Gauname sistemą

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^n (ca_{kj}) x_j = cb_k. \quad (S'')$$

Tarkime, kad $(l_1, \dots, l_n)$ – sistemos (S) sprendinys ir $(t_1, \dots, t_n)$ – sistemos (S'') sprendinys, t. y.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.4)$$

ir

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = b_i \quad (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^n (ca_{kj}) t_j = cb_k. \quad (4.5)$$

Tačiau, (4.4) lygybių sistemos k -ąją lygybę padauginę iš c , gauname

$$\sum_{j=1}^n (ca_{kj}) l_j = cb_k.$$

Tai reiškia, kad sistemos (S) sprendinys yra ir sistemos (S'') sprendinys.

Kadangi $c \neq 0$, tai lygybę $\sum_{j=1}^n (ca_{kj}) t_j = cb_k$ galime padalyti iš c ; gautoji lygybė

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} t_j = b_k$$

kartu su (4.5) lygybių sistemos pirmosiomis $m-1$ lygybėmis rodo, kad sistemos (S'') sprendinys yra sistemos (S) sprendinys.

Vadinasi, dauginami sistemos lygtį iš nelygaus nuliui skaičiaus, tikrai gauname ekvivalenčią sistemą.

2. Prie sistemos (S) k -osios lygties pridedame r -ąją lygtį ($r \neq k$). Gauname sistemą

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{kj} + a_{rj}) x_j = b_k + b_r. \quad (S'')$$

Sudėję (4.4) lygybių sistemos k -ąją ir r -ąją lygybes, gausime

$$\sum_{j=1}^n (a_{kj} + a_{rj}) l_j = b_k + b_r.$$

Ši lygybė kartu su (4.4) sistemos $1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ lygybių patvirtina, kad sistemos (S) sprendinys ($l_1, \dots, l_n$) yra ir (S'') sprendinys.

Tarkime, kad sistemos (S'') sprendinys yra ($h_1, \dots, h_n$). Tuomet

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} h_j = b_i \quad (i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m),$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{kj} + a_{rj}) h_j = b_k + b_r. \quad (4.6)$$

Iš paskutinės lygybės atėmę r -ąją, gausime

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} h_j = b_k.$$

Ši lygybė kartu su (4.6) sistemos pirmosiomis $m-1$ lygybėmis rodo, kad kiekvienas sistemos (S'') sprendinys yra ir (S) sprendinys.

Akivaizdu, kad, sukeitę lygtis vietomis, taip pat gausime ekvivalenčią sistemą.

Atlikę tam tikrą elementariųjų pertvarkių seką, gauname ekvivalenčių lygčių sistemų seką

$$(S), (S^{(1)}), (S^{(2)}), \dots, (S^{(k)})$$

(pagal įrodymo 1 ir 2 dalis).

§48. Gauso algoritmas. Tiesinių lygčių sistemos suderintumo sąlygos

Tiesinių lygčių sistema

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{rr}x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r,$$

kurioje $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, \dots, r$), vadiname *trapeicine tiesinių lygčių sistema* ($r \leq n$).

Kai $r=n$, sistema vadiname *trikampe*.

45 teorema. Kiekviena trapečinė tiesinių lygčių sistema yra suderinta. Kai $r=n$, sistema apibrėžta, kai $r<n$, sistema neapibrėžta.

Įrodymas. 1. Nagrinėjame trikampę sistemą ($r=n$):

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, r).$$

Kadangi $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, \dots, r$), tai iš paskutinės lygties gauname

$$x_r = \frac{b_r}{a_{rr}} = l_r.$$

Įrašę šią x_r reikšmę į priešpaskutinę lygtį ir atlikę veiksmus, randame

$$x_{r-1} = \frac{1}{a_{r-1}r-1} (b_{r-1} - a_{r-1}r l_r) = l_{r-1}.$$

Reikšmes $x_r = l$, ir $x_{r-1} = l_{r-1}$ įrašę į $(r-2)$ -ąją lygtį, gausime x_{r-2} reikšmę. Šią procedūrą pratęse iki pirmosios lygties, rasime visų kintamųjų reikšmes:

$$x_1 = l_1, \dots, x_r = l_r.$$

Norėdami įrodyti, kad sprendinys yra tik vienas, tarkime, jį egzistuoja dar ir antras sprendinys

$$x_1 = t_1, \dots, x_r = t_r.$$

Įrašę šias x reikšmes į sistemą, gauname lygybes

$$\sum_{j=i}^r a_{ij} t_j = b_i \quad (i = 1, \dots, r).$$

Iš paskutinės lygybės išplaukia:

$$t_r = \frac{b_r}{a_{rr}} = l_r.$$

Įrašę šią reikšmę į $(r-1)$ -ąją lygybę, gauname

$$t_r = l_{r-1}$$

ir t. t., t. y.

$$t_1 = l_1, \dots, t_r = l_r.$$

Tai ir rodo, kad sprendinys yra tik vienas.

2. Tuo atveju, kai $r < n$ ir $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, \dots, r$), perkėlę narius su kintamaisiais $x_{r+1}, \dots, x_n$ į dešiniąsias lygčių puses ir pažymėję $b'_i = b_i - a_{in+1}x_{r+1} - \dots - a_{in}x_n$ ($i = 1, \dots, r$), gausime sistemą

$$\sum_{j=i}^r a_{ij} x_j = b'_i \quad (i = 1, \dots, r),$$

kuri analogiška trikampei sistemai ir sprendžiama tokiu pat būdu, tiktai gautosios reikšmės

$$x_1 = l'_1, \dots, x_r = l'_r$$

yra kintamųjų $x_{r+1}, \dots, x_n$ tiesinės funkcijos. Taigi šiems kintamiesiems galime suteikti bet kokias reikšmes. Vadinasi, sistemos sprendinys yra šitokio pavidalo:

$$(l'_1, \dots, l'_r, t_1, \dots, t_{n-r});$$

čia $t_1, \dots, t_{n-r}$ gali įgyti bet kokias reikšmes iš lauko L , kuriam priklauso koeficientai ir laisvieji nariai. (Atskiru atveju, kai $L = \mathbf{R}$, $t_1, \dots, t_{n-r}$ gali įgyti bet kokias realias reikšmes.) Šiuo atveju tiesinių lygčių sistema neapibrėžta, t. y. turi be galo daug sprendinių. Užrašytasis jos sprendinys vadinamas *bendruoju sprendiniu*, nes sistemos sprendinių aibė yra

$$S = \{(l'_1, \dots, l'_r, t_1, \dots, t_{n-r}) \mid t_1, \dots, t_{n-r} \in L\}.$$

Suteikę $t_1, \dots, t_{n-r}$ reikšmes $t_1^{(0)}, \dots, t_{n-r}^{(0)}$ ir įrašę jas į bendrąjį sprendinį, gausime sprendinį

$$(l_1^{(0)}, \dots, l_r^{(0)}, t_1^{(0)}, \dots, t_{n-r}^{(0)}),$$

kuris vadinamas *atskiruoju sistemos sprendiniu*.

Pavyzdys. Išspręskime sistemą:

$$x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1,$$

$$2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = -10,$$

$$6x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 5.$$

Perkėlę narius su x_4 ir x_5 į kitas lygčių puses ir pažymėję

$$b'_1 = 1 - x_4 - 2x_5,$$

$$b'_2 = -10 + 2x_4 - x_5,$$

$$b'_3 = 5 - 4x_4 + 8x_5,$$

gauname sistema

$$\begin{aligned}x_1 - 6x_2 - x_3 &= b'_1, \\ 2x_2 + 3x_3 &= b'_2, \\ 6x_3 &= b'_3.\end{aligned}$$

Išsprendsime šia sistema. Iš paskutinės lygties

$$x_3 = \frac{1}{6} b'_3,$$

iš antrosios

$$x_2 = \frac{1}{4} (2b'_2 - b'_3),$$

§ pirmosios

$$x_1 = \frac{1}{3} (3b'_1 + 9b'_2 - 4b'_3).$$

Vietoj b'_1, b'_2, b'_3 įrašę jų reikšmes, gauname:

$$x_1 = \frac{1}{3} (-107 + 31x_4 - 47x_5), \quad x_2 = \frac{1}{4} (-25 + 8x_4 - 10x_5),$$

$$x_3 = \frac{1}{6} (5 - 4x_4 + 8x_5).$$

Sistemas sprendinys:

$$\left(-\frac{107}{3} + \frac{31}{3} t_1 - \frac{47}{3} t_2, -\frac{25}{4} + 2t_1 - \frac{5}{2} t_2, \frac{5}{6} - \frac{2}{3} t_1 + \frac{4}{3} t_2, t_1, t_2\right), \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

Paėmę, pavyzdžiui, $t_1=0$, $t_2=-1$, gauname atskirą sprendinį:

$$\left(-20, -\frac{15}{4}, -\frac{1}{2}, 0, -1\right).$$

Kadangi mokame spręsti trapecinę tiesinių lygčių sistemą, tai ir kiekvieną sistemą galėsime išspręsti, radę jai ekvivalenčią trapecinę sistemą.

Toliau pateiksime metodą, kuriuo tiesiniu lygčių sistema

[illegible]

pertvarkoma i trapechine sistema.

Jau nustatėme, kad lygties, kurios visi koeficientai ir laisvasis narys lygūs nuliui, sprendinių aibė sutampa su aibe L^n . Kadangi kiekvienos lygties sprendinių aibė yra aibės L^n poaibis ir sistemos sprendinių aibė yra lygčių sprendinių aibių sankirta, be to, $A \cap B = A$, kai $A \subset B$, tai lygtį su nulinais koeficientais ir nuliniu laisvuju nariu galime atmeti.

Sistema nesuderinta, jeigu joje yra lygtis su nuliniais koeficientais ir nelygiu nuliui laisvuoju nariu. Todėl, jei, atlikdami sistemos elementariusius pertvarkius, gausime tokią lygtį, galėsime konstatuoti, kad sistema nesuderinta.

Iš to išplaukia, kad užtenka nagrinėti tik tokias sistemas, kuriose, imant bent vieną j , kiekvienam i ($i=1, \dots, m$) $a_{ij} \neq 0$. Todėl, keisdami sistemoje lygčių tvarką, o jeigu reikia, ir kintamųjų numeraciją, galime pasiekti, kad būtų $a_{11} \neq 0$.

Sistemos (S) pirmąją lygtį dauginame iš $-a_{11}^{-1} a_{i1}$ ir pridedame prie i -osios lygties ($i=2, \dots, m$). Pažymėję

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1} a_{11}^{-1},$$

$$b'_i = b_i - b_1 a_{i1} a_{11}^{-1} \quad (i=2, \dots, m, j=2, \dots, n),$$

gauname sistemą

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1,$$

$$a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a'_{m2} x_2 + \dots + a'_{mn} x_n = b'_m,$$

kurioje 2-oji, 3-oji, ..., m -oji lygtys neturi nario su x_1 ir kuri yra ekvivalenti sistemai (S). Tolesnį žingsnį atliksime, kai gautoje sistemoje 2-oji, ..., m -oji lygtys turi bent vieną nelygų nuliui koeficientą:

a) jei paskutinėje sistemoje bent vienas $a'_{i2} \neq 0$ ($i \geq 2$), galima laikyti, kad būtent $a'_{22} \neq 0$ (tai galima pasiekti sukeitus lygtis vietomis);

b) jei visi $a'_{i2} = 0$ ($i \geq 2$), tenka keisti kintamųjų numeraciją, įvedant naujus žymėjimus. Tuo siekiame, kad būtų $a'_{22} \neq 0$. Dabar antrąją lygtį padauginame iš $-a'_{i2} (a'_{22})^{-1}$ ir pridedame prie i -osios ($i=3, \dots, m$). Pasirinkę atitinkamus žymėjimus (ir galbūt sukeitę lygtis vietomis ar pakeitę kintamųjų numeraciją), gausime sistemai (S) ekvivalenčią sistemą

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1,$$

$$a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2,$$

$$a''_{33} x_3 + \dots + a''_{3n} x_n = b''_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a''_{m3} x_3 + \dots + a''_{mn} x_n = b''_m,$$

kurioje 3-oji, ..., m -oji lygtys neturi x_1, x_2 (koeficientai prie šių kintamųjų lygūs nuliui) bei $a''_{33} \neq 0$, jei tik tos lygtys turi bent vieną nelygų nuliui koeficientą.

Tą pačią procedūrą atliekame vis su naujomis (gautosiomis) sistemomis. Taip perdirbinėjant, galima a) negauti ir b) gauti lygčių su visais nuliniais koeficientais.

Pirmuoju atveju po $m-1$ žingsnio, kai $m=n$, gauname sistemą

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1m} x_m = b_1,$$

$$a_{22} x_2 + \dots + a_{2m} x_m = b_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{mm} x_m = b_m$$

(S₁)

arba, kai $m < n$, gauname sistemą

[illegible]

Antruoju atveju po r žingsnių, kai $m > n$ ($r = n$), gauname sistemą

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{nn}x_n &= b_n, \\ 0 &= b_{n+1} \end{aligned} \tag{S_3}$$

arba, kai $r < n$, sistema

[illegible]

Visose tose sistemoje $a_{ii} \neq 0$. Be to, patys a_{ij} ir b_i čia jau kitokie negu sistemoje (S).

Sistemose (S_3) ir (S_4) $0=b_{n+1}$ ir $0=b_{r+1}$ yra sutrumpintai užrašytos lygtys $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{n+1}$ ir $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_{r+1}$. Sistemoje (S_3) $b_{n+1} = 0$, kai $(n+1)$ -osios, ..., m -osios lygčių, kurių koeficientai yra nuliai, laisvieji nariai taip pat lygūs nuliams. $b_{n+1} \neq 0$, jei iš tų lygčių su nuliniiais koeficientais bent vienas laisvasis narys nelygus nuliui. Sistemoje (S_4) $b_{r+1} \neq 0$, jei iš $(r+1)$ -osios, ..., m -osios lygčių, kurių visi koeficientai lygūs nuliui, bent vienas laisvasis narys nelygus nuliui; priešingu atveju $b_{r+1} = 0$.

Atliktoji procedūra vadinama *sistemos pertvarkymo į trapecinę algoritmu*.

Iš 45 teoremos išplaukia, kad sistemos (S_1) , (S_2) , taip pat sistema (S_3) , kai $b_{n+1}=0$, ir (S_4) , kai $b_{r+1}=0$, yra suderintos. Kai $b_{n+1} \neq 0$, sistema (S_3) nesuderinta, kai $b_{r+1} \neq 0$, sistema (S_4) nesuderinta, nes tais atvejais šiose sistemose yra lygtis su nuliniiais koeficientais ir nelygiu nuliui laisvuojų nariu. Kadangi elementariaisiais pertvarkiais gaunamos ekvivalenčios sistemos, tai iš mūsų samprotavimų išplaukia, kad teisinga šitokia teorema.

46 teorema. Jeigu, pertvarkydami tiesinių lygčių sistemą (S) į trapecinę, gauname (S_1) arba (S_2) pavidalo tiesinių lygčių sistemą, tai sistema (S) yra suderinta; jeigu gauname (S_3) pavidalo sistemą, tai sistema (S) yra suderinta, kai $b_{n+1}=0$, ir nesuderinta, kai $b_{n+1} \neq 0$; jeigu gauname (S_4) pavidalo sistemą, tai sistema (S) yra suderinta, kai $b_{r+1}=0$, ir priešingu atveju nesuderinta.

Pertvarkydami tiesinių lygčių sistemą į trapecinę ir remdamiesi 46 teorema, nustatome, ar ta sistema yra suderinta, ar ne. Jeigu ji suderinta, tai gautąją ekvivalenčią trapecinę sistemą galime spręsti 45 teoremos įrodyme pateiktu būdu.

Praktiškai sprenddami, kiekvieną lygtį su nuliniaisiais koeficientais ir nuliniu laisvuoju nariu atmetame. Jeigu gavome lygtį su nuliniaisiais koeficientais ir nenuliniu laisvuoju nariu, konstatuojame, kad sistema nesuderinta.

Tiesinių lygčių sistemos sprendimą pertvarkant į trapecinę, vadiname sprendimu Gauso metodu (K. F. Gauss, 1777–1855, vokiečių matematikas).

Pavyzdžiai. 1. Išspręsimė sistemą

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 &= 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= -3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 &= 3, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 &= 1, \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 3x_4 + 8x_5 &= -6. \end{aligned}$$

Sistemos trečiąją lygtį paeiliui padauginę iš -3 , -2 , -6 , -1 ir atitinkamai pridėję prie 1-osios, 2-osios, 4-osios ir 5-osios lygčių, gauname sistemą (trečiąją lygtį perkeliame į pirmąją vietą)

$$\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 & = & 3, & \\ -2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 14x_5 & = & -8, & \\ -7x_2 - 12x_3 + 4x_4 + 13x_5 & = & -9, & (-1) \\ -9x_2 - 16x_3 + 10x_4 + 27x_5 & = & -17, & \\ -7x_2 - 12x_3 + 4x_4 + 13x_5 & = & -9. & \end{array} \quad \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} (-1) \\ (-1) \end{array} \right\} \downarrow \\ \left| \begin{array}{c} (-7) \\ (2) \end{array} \right\} \downarrow \end{array}$$

Atlikę schemoje nurodytus veiksmus, gauname sistemą

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 &= 3, \\ -2x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 14x_5 &= -8, \\ 4x_3 - 34x_4 - 72x_5 &= 38, \end{aligned}$$

kuri ekvivalenti pradinei.

Pažymėję

$$\begin{aligned} b_1 &= 3 + x_4 + 5x_5, \\ b_2 &= 4 + 3x_4 + 7x_5, \\ b_3 &= 19 + 17x_4 + 36x_5, \end{aligned}$$

gauname sistemą

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1, \\ x_2 + 2x_3 &= b_2, \\ 2x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

iš kurios nuosekliai randame

$$x_3 = \frac{1}{2} b_3, \quad x_2 = b_2 - b_3, \quad x_1 = b_1 - 2b_2 + \frac{1}{2} b_3.$$

Įrašę į šias išraiškas b_1, b_2, b_3 reikšmes ir pažymėję $x_4 = t_1, x_5 = t_2$, gauname sistemos bendrąjį sprendinį

$$\left(\frac{9}{2} + \frac{7}{2} t_1 + 9t_2, -15 - 14t_1 - 29t_2, \frac{19}{2} + \frac{17}{2} t_1 + 18t_2, t_1, t_2 \right) \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R}).$$

2. Išspręsimė sistemą:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4, & & \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0, & (-2) & (-1) \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, & & (-2) \downarrow (-3) \downarrow \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 4, & & \downarrow \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 3. & & \downarrow \end{array}$$

Atlikę veiksmus, kaip nurodyta schemeje, gauname

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4, & & \\ -4x_2 + x_3 - 5x_4 - 4x_5 = -8, & (-1) & (3) \downarrow \\ 3x_2 - 10x_3 + 8x_4 + 7x_5 = 1, & (-1) & (4) \downarrow \\ -4x_2 + x_3 - 5x_4 - 4x_5 = -8, & & \downarrow \\ 3x_2 - 10x_3 + 8x_4 + 7x_5 = 3. & & \downarrow \end{array}$$

Vėl atlikę nurodytus veiksmus, gauname sistemą

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 4, \\ -4x_2 + x_3 - 5x_4 - 4x_5 &= -8, \\ -37x_3 + 17x_4 + 16x_5 &= -20, \\ 0 &= 2, \end{aligned}$$

kuri yra nesuderinta. Todėl pradinė sistema neturi sprendinių.

Nagrinėkime homogeninių tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ši sistema turi sprendinį $(0, 0, \dots, 0)$. Reikia nustatyti, ar nėra ir kitų sprendinių.

Kadangi visų lygčių laisvieji nariai yra nuliai, tai elementariaisiais pertvarkiais gausime lygtis, kurių laisvieji nariai irgi bus nuliai. Todėl ir gautoji ekvivalenti trapecinė arba trikampė sistema taip pat bus homogeninė:

$$\sum_{j=i}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (S_5)$$

arba

$$\sum_{j=i}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, r < n), \quad (S_6)$$

be to, $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$) (atitinkamai $i = 1, \dots, r$).

Abi šios sistemos suderintos. Be to, sistema (S_5) turi vienintelį sprendinį $(0, 0, \dots, 0)$, o (S_6) turi neapibrėžtai daug sprendinių, kaip ir kiekviena trapecinė (ne trikampė) tiesinių lygčių sistema. Taigi tuo atveju, kai pertvarę homogeninių tiesinių lygčių sistemą į trapecinę gauname (S_6) pavidalo sistemą, pradinė sistema turi ir nenulinį sprendinių.

Uždaviniai

Išspręskite tiesinių lygčių sistemas.

1. $3x + 2y = 8,$
 $2x - y = 10.$
2. $9x - 5y = 10,$
 $8x - 5y = 6.$
3. $36x - 0,3y = 34,89,$
 $12x + 0,7y = 6,59.$
4. $1,5x - 1,75y = 2,75,$
 $0,12x + 0,2y = 0,12.$
5. $4x + 3y = 1,$
 $x + 0,75y = 0,25.$
6. $x - 3y = 2,$
 $-2x + 6y = 7.$
7. $5x - 7y = 4 \frac{5}{6},$
 $-2x + 3y = -2,$
 $18x - 24y = 17.$
8. $3x - 7y - 13z = -17,$
 $4x + 3y - 8z = -1,$
 $-5x - 4y + 11z = 2,$
 $x - 4y - 5z = -8.$
9. $5x - 7y + 4z = 6,$
 $8x + 25y - 65z = 9,$
 $2x - 39y + 73z = 32.$
10. $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2,$
 $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2,$
 $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
 $-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4.$
11. $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -5,$
 $2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5,$
 $-x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4,$
 $x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -12,$
 $3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8.$
12. $x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 14x_4 = 10,$
 $3x_1 - 16x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -6,$
 $-2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 13x_4 = 3,$
 $6x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 25x_4 = -8.$
13. $13x_1 + 44x_2 + 10x_3 = -7,$
 $4x_1 - 15x_2 - x_3 = 6,$
 $x_1 + 89x_2 + 13x_3 = -25.$
14. $x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 7x_5 = 0,5,$
 $2x_1 + 7x_2 - 13x_3 + 8x_4 - x_5 = -16,$
 $3x_2 + 7x_3 - 4x_5 = 7,$
 $12x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 3x_5 = 7,$
 $8x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 5x_5 = 7.$
15. $x_1 + 7x_2 + 40x_3 = 0,$
 $6x_1 - x_2 - 5x_3 = 0,$
 $5x_1 - 2x_2 + 11x_3 = 0.$
16. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,$
 $-2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0,$
 $3x_1 - 6x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 0.$
17. $6x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0,$
 $4x_1 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0,$
 $3x_2 + 7x_3 = 0,$
 $x_1 + 13x_2 - 17x_3 + 16x_4 - 8x_5 = 0,$
 $x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 8x_4 + 3x_5 = 0.$

§49. n -mačių vektorių-eilučių erdvė R^n . Vektorių-stulpelių erdvė

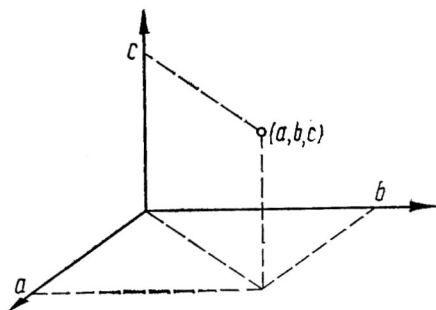
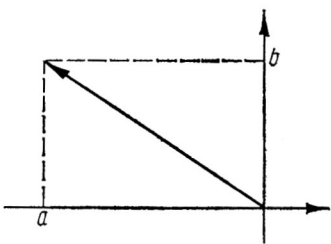
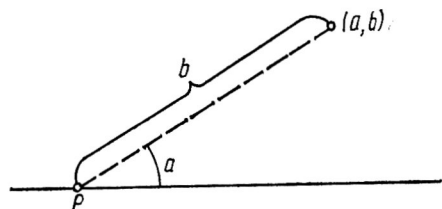
Sprendžiant ekonominius, gamybinius ir kitokio pobūdžio uždavinius, dažnai tenka susidurti su sutvarkytais skaičių rinkiniais, vadinamais vektoriais. Pavyzdžiui, planuojant kokios nors pramonės šakos gamybą metams, to plano rezultatus galima išreikšti skaičių grupe (a, b, c, d) , kurioje a – produkcijos padidėjimas procentais, b – dirbančiųjų skaičiaus padidėjimas procentais, c – darbo našumo padidėjimas procentais, d – gamyklų skaičius. Data nurodoma trimis skaičiais (a, b, c) , iš kurių a – metai, b – mėnuo, c – diena. Kolūkio arba tarybinio ūkio metinėms pajamoms apibūdinti irgi vartojamas rinkinys skaičių, pavyzdžiui (a, b, c) , kurie reiškia pajamas: a – laukininkystės, b – gyvulininkystės, c – sodininkystės ir daržininkystės.

Matematikoje, kaip jau žinome, tiesinių lygčių su realiaisiais koeficientais sistemos sprendinys yra sutvarkytas realiųjų skaičių rinkinys.

Fiksavus kokią nors koordinačių sistemą plokštumoje, sutvarkytas realiųjų skaičių dvejetas (a, b) reiškia plokštumos tašką, o skaičiai a ir b vadinami to taško koordinatėmis duotoje koordinačių sistemoje. Dekarto koordinačių sistemoje koordinatė a vadinama abscese, b – ordinate (žr. 3 pav.).

Polinėje koordinačių sistemoje a yra kampas tarp duotos tiesės ir taško spindulio-vektoriaus, b – taško atstumas nuo pastovaus taško P ($b \geq 0$) (10 pav.).

Be to, kaip jau žinome, sutvarkytas realiųjų skaičių dvejetas (a, b) yra kompleksinis skaičius.



10 pav.

11 pav.

12 pav.

Fiksavus koordinačių sistemą erdvėje, sutvarkytas skaičių trejetas (a, b, c) reiškia tašką, kurio koordinatės yra a, b, c (11 pav.).

Kai nagrinėjami plokštumos vektoriai, prasidedantys viename taške, sutvarkytas skaičių dvejetas reiškia vektorių (12 pav.), kuris prasideda koordinačių pradžioje ir baigiasi taške, kurio koordinatės a, b .

Sutvarkytas skaičių trejetas (a, b, c) gali reikšti erdvės vektorių, kuris prasideda fiksuotame taške (koordinačių pradžioje) ir baigiasi taške, kurio koordinatės yra a, b, c .

Taigi, kaip matome iš šių pavyzdžių ir žinome iš patirties, sutvarkytam dviejų, trijų ir daugiau skaičių rinkiniui gali būti suteikta įvairi prasmė. Algebroje nesvarbu, kokia prasmė suteikiama sutvarkytiems skaičių rinkiniams, o svarbūs tiksliai jų veiksmams ir tų veiksmų savybės. Taigi suteikę pavadinimą sutvarkytiems skaičių rinkiniams ir apibrėžę jų veiksmus, nagrinėsime tokių rinkinių aibes tiksliai veiksmų ir jų savybių atžvilgiu, neteikdami patiems rinkiniams jokios konkrečios prasmės. Jeigu kartais pateiksime pavyzdžių arba paveikslų, tai tik norėdami pagyvinti gana abstraktų dėstymą.

Sutvarkytą realiųjų skaičių rinkinį $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vadiname n -mačiu vektoriumi (n -mačiu vektoriumi-eilute). Skaičiai $a_1, a_2, \dots, a_n$ vadinami vektoriaus komponentėmis.

Nesunku pastebėti, kad n -matis vektorius yra baigtinė skaičių seka, turinti n narių. n -matis vektorius-eilutė yra aibės

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$$

elementas. $\mathbf{R}^n$ yra n -mačių vektorių-eilučių aibė.

Kad būtų trumpiau, n -mačius vektorius žymėsime mažosiomis graikiškomis raidėmis $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Pavyzdžiui, rašysime

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$$\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Visur, kur bus aišku iš konteksto, n -mačius vektorius vadinsime tiesiog vektoriais. Apibrėšime vektorių lygybę.

Du vektoriai yra lygūs tada, kai jų atitinkamos komponentės lygios, t. y. $\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Šis lygybės apibrėžimas atitinka mūsų patirtį.

Pavyzdžiui, jeigu dvimatis vektorius (a, b) reiškia vektorių plokštumoje, t. y. nurodytos krypties atkarpą, tai $(a, b) = (c, d)$ reiškia, kad abi tos atkarpos ir jų kryptys sutampa. Jeigu $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ ir $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ reiškia taškų koordinatas, tai lygybė $\alpha = \beta$ reiškia, kad abu taškai sutampa, ir pan.

Vektorių sudėtis ir daugyba iš skaičiaus.

Dviejų vektorių α ir β suma $\alpha + \beta$ vadinamas vektorius, kurio komponentės yra lygios tų vektorių atitinkamų komponentių sumai, t. y. $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Vektoriaus α ir skaičiaus l sandauga vadinamas vektorius, kuris gaunamas iš vektoriaus α kiekvieną jo komponentę padauginus iš skaičiaus l , t. y. $l\alpha = (la_1, la_2, \dots, la_n)$.

Atkreipkite dėmesį į štai ką: nors vektorių sudėčiai žymėti vartojame ženklą $+$, nereikia jos painioti su skaičių sudėtimi.

Pavyzdys. $\alpha = (-1, 0, 3, 4, 5)$, $\beta = (6, 2, -8, -12, 108)$. Tada

$$\alpha + \beta = ((-1) + 6, 0 + 2, 3 + (-8), 4 + (-12), 5 + 108) = (5, 2, -5, -8, 113),$$

$$\frac{1}{3} \alpha = \left(\frac{1}{3} \cdot (-1), \frac{1}{3} \cdot 0, \frac{1}{3} \cdot 3, \frac{1}{3} \cdot 4, \frac{1}{3} \cdot 5 \right) = \left(-\frac{1}{3}, 0, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right),$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{6} \beta = \left(\sqrt{7}+1, \frac{\sqrt{7}+1}{3}, -\frac{4}{3}(\sqrt{7}+1), -2(\sqrt{7}+1), 18(\sqrt{7}+1) \right).$$

Iš apibrėžimų aišku, kad n -mačių vektorių suma, n -mačio vektoriaus ir skaičiaus sandauga yra taip pat n -mačiai vektoriai. Vadinasi, n -mačių vektorių aibė yra uždara vektorių sudėties ir vektorių daugybos iš skaičiaus atžvilgiu.

Vektorių sudėties savybės. Pažymėkime $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ bet kuriuos n -mačius vektorius-eilutes.

1. Kadangi

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \\ &= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n) = \beta + \alpha,\end{aligned}$$

tai *sudėtis komutatyvi*.

2. Kadangi

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n) = \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n)) = \alpha + (\beta + \gamma),\end{aligned}$$

tai *sudėtis asociatyvi*.

3. Kadangi $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0, 0, \dots, 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, tai, pažymėję $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$, gauname

$$(\forall \alpha \in \mathbf{R}^n) \quad \alpha + O = O + \alpha = \alpha.$$

Taigi O – sudėties neutralusis elementas – aibės $\mathbf{R}^n$ nulis. Jis vadinamas *nulinium vektoriumi-eilute*.

4. Kadangi $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) = (0, 0, \dots, 0)$, tai kiekvienas $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ turi simetrišką sudėties atžvilgiu (priešingąjį) vektorių-eilutę $-\alpha = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in \mathbf{R}^n$.

Iš 1–4 savybių išplaukia šitoks teiginys: *struktūra $(\mathbf{R}^n, +)$ yra komutatyvi grupė*.

Iš to teiginio išeina, kad vektorių-eilučių sudėčiai būdingos visos komutatyviosios grupės operacijos savybės (žr. § 27). Pažymėsime, kad iš tų savybių išplaukia, jog yra galima vektorių-eilučių atimtis ir ji atliekama pagal šitokią taisyklę:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) - (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

Vektorių-eilučių daugybos iš skaičiaus savybės.

1. $(\forall \alpha \in \mathbf{R}^n) \quad 1 \cdot \alpha = \alpha$.

Tai išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned}1 \cdot \alpha &= 1 \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, \dots, 1 \cdot a_n) = \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) = \alpha.\end{aligned}$$

2. $(\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, l \in \mathbf{R}) \quad l\alpha = \alpha l$ – *daugyba komutatyvi*.

Turime $\alpha l = (a_1 l, a_2 l, \dots, a_n l) = (l a_1, l a_2, \dots, l a_n) = l \alpha$.

3. $(\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, l, t \in \mathbf{R}) \quad (lt)\alpha = l(t\alpha)$ – *daugyba asociatyvi*.

Turime

$$\begin{aligned}(lt)\alpha &= ((lt)a_1, (lt)a_2, \dots, (lt)a_n) = \\ &= (l(ta_1), l(ta_2), \dots, l(ta_n)) = l(ta_1, ta_2, \dots, ta_n) = l(t\alpha).\end{aligned}$$

4. $(\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, l, t \in \mathbf{R}) (l+t)\alpha = l\alpha + t\alpha$ – daugyba distributyvi skaičių sudėties atžvilgiu.

Teiginys išplaukia iš lygybių $(l+t)\alpha = ((l+t)a_1, (l+t)a_2, \dots, (l+t)a_n) = (la_1 + ta_1, la_2 + ta_2, \dots, la_n + ta_n) = (la_1, la_2, \dots, la_n) + (ta_1, ta_2, \dots, ta_n) = l\alpha + t\alpha$.

5. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n, l \in \mathbf{R}) l(\alpha + \beta) = l\alpha + l\beta$ – daugyba distributyvi vektorių sudėties atžvilgiu.

Teiginys įrodomas šitaip: $l(\alpha + \beta) = (l(a_1 + b_1), l(a_2 + b_2), \dots, l(a_n + b_n)) = (la_1 + lb_1, la_2 + lb_2, \dots, la_n + lb_n) = (la_1, la_2, \dots, la_n) + (lb_1, lb_2, \dots, lb_n) = l\alpha + l\beta$.

Algebrinė struktūra $(\mathbf{R}^n, +, \text{daugyba iš skaičiaus})$ vadinama n -mačių vektorių-eilučių erdve, sutrumpintai erdve $\mathbf{R}^n$.

Lengvai patikrinamos šios savybės:

$$(\forall \alpha \in \mathbf{R}^n) \quad 0 \cdot \alpha = O,$$

$$(\forall l \in \mathbf{R}) \quad l \cdot O = O,$$

$$(-1)\alpha = -\alpha,$$

$$m\alpha = \underbrace{\alpha + \dots + \alpha}_{m \text{ kartų}}, \quad (-m)\alpha = \underbrace{(-\alpha) + \dots + (-\alpha)}_{m \text{ kartų}},$$

kai m – natūrinis skaičius. Ketvirtoji ir penktoji daugybos savybės, pritaikius matematinės indukcijos principą, lengvai apibendrinamos šia prasme:

$$(\forall l_i \in \mathbf{R} \ (i=1, \dots, k)) (\forall \alpha_j \in \mathbf{R}^n \ (j=1, \dots, m))$$

$$\left(\sum_{i=1}^k l_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m l_i \alpha_j.$$

Erdvėje $\mathbf{R}^n$ vektorių sudėties ir daugybos iš skaičiaus veiksmams galioja tos pačios taisyklės, kaip ir daugianarių sudėties ir jų daugybos iš vienanarių veiksmams algebroje.

k -mačių vektorių-stulpelių erdvė.

Sutvarkytą k realiųjų skaičių stulpelį

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

vadiname k -mačiu vektoriumi-stulpeliu. Skaičius $a_1, \dots, a_k$ vadiname vektoriaus-stulpelio komponentėmis.

Vektorius-stulpelius žymėsime mažosiomis graikiškomis raidėmis su brūkšneliais α' , β' , γ' ir pan. Dažnai, kur nebus pavojaus sumaišyti juos su vektoriiais-eilutėmis, brūkšnelius praleisime.

Du k -mačiai vektoriai

$$\alpha' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}, \quad \beta' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

yra lygūs, kai atitinkamos jų komponentės lygios.

k -mačių vektorių-stulpelių aibėje, panašiai kaip ir n -mačių vektorių-eilučių aibėje, apibrėžiamos vektorių sudėties ir vektoriaus daugybos iš skaičiaus operacijos:

$$\alpha' + \beta' = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_k + b_k \end{pmatrix}, \quad l\alpha' = \begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \vdots \\ la_k \end{pmatrix}.$$

k -mačių vektorių-stulpelių aibė uždara sudėties ir vektoriaus daugybos iš skaičiaus atžvilgiu. Ji vadinama k -mačių vektorių-stulpelių erdve.

k -mačių vektorių-stulpelių sudėtis ir daugyba iš skaičiaus turi tas pačias savybes, kaip ir vektorių-eilučių sudėtis ir daugyba iš skaičiaus.

Ši teiginį įrodysime remdamiesi vadinamosios transponavimo operacijos savybėmis.

Vektoriaus-eilutės pakeitimą vektoriumi-stulpeliu su tomis pačiomis komponentėmis, taip pat ir atvirkščią pakeitimą vadiname vektoriaus transponavimu. Transponuotą vektorių α žymime α^T .

Pagal apibrėžimą, kai $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$,

$$\alpha^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

ir kai

$$\beta' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix},$$

$$(\beta')^T = (b_1, b_2, \dots, b_k).$$

Transponavimo operacija turi šias savybes:

1) $(\alpha + \beta)^T = \alpha^T + \beta^T$,

2) $(l\alpha)^T = l\alpha^T$.

Įrodymas.

1) $(\alpha + \beta)^T = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)^T =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha^T + \beta^T.$$

2) $(l\alpha)^T = (la_1, \dots, la_n)^T = \begin{pmatrix} la_1 \\ \vdots \\ la_n \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = l\alpha^T.$

Dabar įrodysime anksčiau suformuluotą teiginį.

Sakykime, kad $n=k$, ir transponuokime visus erdvės $\mathbf{R}^k$ ($n=k$) vektorius-eilutes. Gausime k -mačių vektorių-stulpelių aibę $(\mathbf{R}^k)^T$. Kadangi $(\alpha + \beta)^T = \alpha^T + \beta^T$, $(l\alpha)^T = l\alpha^T$, be to, $\alpha^T = \beta^T$, jeigu $\alpha = \beta$, tai erdvė $(\mathbf{R}^k)^T$ turi visas erdvės $\mathbf{R}^k$ savybes.

Tai rodo, jog tvirtinimas teisingas.

Dažnai vektorių-stulpelius, kaip ir vektorių-eilutes, vadinsime vektoriais. Apie ką kalbama, apie vektorių-eilutę ar vektorių-stulpelį, bus aišku iš konteksto.

Toliau nagrinėsime n -mačius vektorius (neskirsime atskirai vektorių-eilučių ir vektorių-stulpelių). Visos sąvokos, visi apibrėžimai ir visos įrodomos teoremos galioja tiek vektoriams-eilutėms, tiek ir vektoriams-stulpeliams.

Uždaviniai

18. Apskaičiuokite $4\alpha - 5\beta$, kai $\alpha = (0, 3, 4, 6, -7)$, $\beta = (1, -1, 13, 0, 15)$.

19. Apskaičiuokite $\alpha - \beta$, $7\alpha + 3\beta$, $-3\beta + 6\alpha$, kai

a) $\alpha = (1, 0, 1, -3, -5)$, $\beta = (-5, -6, 1, 1, -6)$;

b) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$;

c) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

20. Raskite nežinomą vektorių ξ iš lygties:

a) $3\xi + \alpha = \beta$, $\alpha = (0, 1, 3, -4)$, $\beta = (-2, 1, -3, 5)$;

b) $2\alpha - 5\xi = 4\beta$, $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

21. Suformuluokite vektorių-eilučių (vektorių-stulpelių) sudėties savybes, atitinkančias komutatyviosios grupės 1–9 savybes (žr. II skyr., § 27). Įrodykite jas dviem būdais: 1) remdamiesi tuo, kad $(\mathbb{R}^n, +)$ – komutatyvioji grupė (kaip II skyriaus 27 paragrafe), 2) tiesiogiai remdamiesi vektorių-eilučių (vektorių-stulpelių) sudėties apibrėžimu. Kuo skiriasi šie įrodymai?

§50. Vektorių tiesinė priklausomybė

Jeigu turime bet koki n -mačių vektorių rinkinį $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ir bet koki realiųjų skaičių rinkinį $l_1, \dots, l_m$, tai reiškini

$$\alpha = \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i, \quad (4.7)$$

kuris taip pat yra n -matis vektorius, vadiname *vektorių* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *tiesine kombinacija*. Jeigu šioje išraiškoje $l_1 = \dots = l_m = 0$, tai $\alpha = 0$, kad ir koks būtų n -mačių vektorių rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Kita vertus, egzistuoja ir tokie vektorių rinkiniai, kuriems (4.7) suma yra nulinis vektorius, kai ne visi koeficientai $l_1, \dots, l_m$ lygūs nuliui.

Pavyzdžiai. 1. Tarkime, kad $\alpha_1 = (1, 3, 2, -1)$, $\alpha_2 = (0, 2, -1, 1)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1, 5)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 3)$.

Sudarome vektorinę lygtį

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4 = 0,$$

t. y.

$$x_1(1, 3, 2, -1) + x_2(0, 2, -1, 1) + x_3(0, 0, 1, 5) + x_4(0, 0, 0, 3) = (0, 0, 0, 0),$$

iš kurios, atlikę veiksmus su vektoriais ir sulyginę atitinkamas komponentes, gauname tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Ši trikampė sistema turi tiktai vieną sprendinį $(0, 0, 0, 0)$. Todėl vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tiesinė kombinacija $\alpha = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l_4 \alpha_4$ lygi nuliniam vektoriumi tiktai tada, kai visi $l_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

2. Sakykime,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (3, 1, 1, 0), \\ \alpha_2 &= (0, 2, -1, 1), \\ \alpha_3 &= (0, 0, 3, -1), \\ \alpha_4 &= (3, 3, 3, 0). \end{aligned}$$

Nesunku pastebėti, kad $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$. Vadinasi, $l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l_4 \alpha_4 = 0$, kai $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, $l_4 = -1$. Be to, paėmę $l_1 = l_2 = l_3 = l$ ir $l_4 = -l$ (l – bet koks realusis skaičius), gausime

$$l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 + l_4 \alpha_4 = l(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = l \cdot 0 = 0.$$

Vektorių rinkinys $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ vadinamas tiesiškai nepriklausomu, jeigu

$$\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = O$$

tik tada, kai $l_1 = \dots = l_m = 0$.

Jeigu ši lygybė galima ir kai $(l_1, \dots, l_m) \neq O$, t. y. kai bent vienas iš l_i nelygus nuliui, tai vektorių rinkinys $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ vadinamas tiesiškai priklausomu.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad norint patikrinti, ar vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai priklausomi ar nepriklausomi, reikia nagrinėti lygtį

$$\sum_{i=1}^m x_i \alpha_i = O.$$

Jeigu ta lygtis turi tik nulinį sprendinį, tai vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — nepriklausomi, jeigu ta lygtis turi ir nenulinių sprendinių, vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — tiesiškai priklausomi.

Pirmajame pavyzdyje vektorių sistema yra tiesiškai nepriklausoma, o antrajame — tiesiškai priklausoma.

Išnagrinėkime kai kurias tiesinės priklausomybės savybes.

47 teorema. Jeigu rinkinyje $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra nulinis vektorius, tai tas rinkinys tiesiškai priklausomas.

Irodymas. Sakykime, $\alpha_1 = O$. Paėmę $l_1 = 1, l_2 = \dots = l_m = 0$, gauname

$$1 \cdot \alpha_1 + \sum_{i=2}^m 0 \cdot \alpha_i = 1 \cdot O = O.$$

48 teorema. Jeigu rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai nepriklausomas, tai ir kiekviena jo dalis $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \leq m$) taip pat tiesiškai nepriklausoma.

Irodymas. Sakykime, dalis $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ tiesiškai priklausoma, t. y. egzistuoja tokie $(l_{i_1}, \dots, l_{i_k}) \neq O$, kad

$$\sum_{j=1}^k l_{i_j} \alpha_{i_j} = O.$$

Paėmę $l_i = 0$, kai $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, gauname $(l_1, \dots, l_m) \neq O$ ir

$$\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = \sum_{j=1}^k l_{i_j} \alpha_{i_j} = O.$$

Išeina, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai priklausomi, o tai prieštarauja teoremos sąlygai.

49 teorema. Vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai priklausomi tada ir tik tada, kai bent vienas vektorius yra kitų vektorių tiesinė kombinacija.

Irodymas. Būtinumas. Tarkime, kad

$$\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = 0 \quad \text{ir} \quad l_j \neq 0.$$

Tada

$$\alpha_j = \sum_{i \neq j} (-l_i l_j^{-1}) \alpha_i.$$

Pakankamumas. Sakykime,

$$\alpha_j = \sum_{i \neq j} l_i \alpha_i.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad

$$\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = 0;$$

čia $l_j = -1$.

50 teorema. Jeigu prie vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ prijungsime vektorių $\alpha = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i$,

t. y. jų tiesinę kombinaciją, tai gausime rinkinį $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m$, kuris bus tiesiškai priklausomas.

Irodymas. Paėmę $l=1$, $l_i = -c_i$ ($i=1, \dots, m$), gausime

$$\alpha + \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i + \sum_{i=1}^m (-c_i) \alpha_i = \sum_{i=1}^m (c_i - c_i) \alpha_i = 0.$$

51 teorema. Jeigu kiekvienas iš vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_k$ tiesinė kombinacija ir $k < m$, tai vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai priklausomi.

Irodymas. Galima laikyti $\alpha_i \neq 0$ ($i=1, \dots, m$), nes priešingu atveju pagal 47 teoremą $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ būtų tiesiškai priklausomi.

Prie vektorių $\beta_1, \dots, \beta_k$ prijungiame α_1 . Pagal 50 teoremą vektoriai $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_k$ yra tiesiškai priklausomi. Išraiškoje

$$\alpha_1 + \sum_{i=1}^k c_i \beta_i = 0$$

bent vienas iš c_i nelygus nuliui (priešingu atveju gautume $\alpha_1 = 0$). Tegul $c_1 \neq 0$. Tada pagal 49 teoremą β_1 yra vektorių $\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ tiesinė kombinacija, taigi ir vektoriai $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ tiesinės kombinacijos.

Dabar prie vektorių $\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ prijunkime α_2 . Gausime rinkinį $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \beta_k$, kuris pagal 49 teoremą yra tiesiškai priklausomas.

Jeigu išraiškoje $\alpha_2 + l_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^k c_i \beta_i = 0$ visi $c_i = 0$ ($i=2, \dots, k$), tai

vektoriai α_1, α_2 , kartu ir visi $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ būtų tiesiškai priklausomi. Todėl bent vienas iš c_i nelygus nuliui. Sakykime, $c_2 \neq 0$. Vadinasi, vektorius β_2

yra vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ tiesinė kombinacija, kartu ir vektoriai $\alpha_3, \dots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ tiesinės kombinacijos.

Po r ($r \geq 2$) žingsnių gausime: a) arba vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra tiesiškai priklausomi, taigi ir $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tiesiškai priklausomi (šiuo atveju teorema įrodyta); b) arba vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra tiesiškai nepriklausomi, ir vektoriai $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_k$ tiesinės kombinacijos.

Vadinasi, kai $r=k$, vektoriai $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tiesinės kombinacijos. Tada pagal 49 teoremą $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ (juo labiau $\alpha_1, \dots, \alpha_m$) yra tiesiškai priklausomi.

Uždaviniai

22. Nustatykite, ar vektorių rinkiniai yra tiesiškai priklausomi:

- a) $\alpha_1 = (1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (1, 2, 0), \quad \alpha_3 = (0, 3, 1), \quad \alpha_4 = (0, 3, 1);$
 b) $\alpha_1 = (4, 3, 2), \quad \alpha_2 = (0, -1, -2), \quad \alpha_3 = (4, 1, 0), \quad \alpha_4 = (0, 1, 1);$

c) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$

d) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

e) $\alpha_1 = (l, 0, \dots, 0), \alpha_2 = (0, l, \dots, 0), \dots, \alpha_n = (0, 0, \dots, l) \quad (l \neq 0);$

f) $\beta_1 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \beta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} \quad (b \neq 0).$

§51. Erdvės $\mathbf{R}^n$ bazė

Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra kokie nors erdvės $\mathbf{R}^n$ vektoriai-eilutės. Kai išraiškoje

$$\alpha = \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i$$

skaičiai $l_1, \dots, l_m$ laisvai, t. y. nepriklausomai vienas nuo kito, „perbėga“ visą realiųjų skaičių aibę $\mathbf{R}$, vektorius α perbėga tam tikrą aibę, kurią žymėkime $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, t. y.

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i \mid l_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, m \right\}.$$

Aišku, kad ta aibė yra aibės $\mathbf{R}^n$ poaibis. Kai kuriems vektorių rinkiniams toji aibė sutampa su aibe $\mathbf{R}^n$.

Pavyzdžiui, nagrinėkime vektorių rinkinį

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ \varepsilon_2 &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n &= (0, 0, \dots, 1).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Šis vektorių rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas. Iš tikrųjų imkime lygtį

$$\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i = 0.$$

Turime

$$\begin{aligned}x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) = \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0).\end{aligned}$$

Kad ir koki vektorių $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ imtume, visada gausime

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n.$$

Vadinasi,

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \mid a_i \in \mathbf{R} \ (i=1, \dots, n) \right\} = \mathbf{R}^n.$$

Ar yra ir daugiau vektorių rinkinių, turinčių tą pačią savybę? Jeigu yra, tai kokie jų požymiai?

Erdvės $\mathbf{R}^n$ nepriklausomą vektorių rinkinį $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vadiname erdvės $\mathbf{R}^n$ baze, jeigu kiekvienas vektorius iš $\mathbf{R}^n$ yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tiesinė kombinacija.

Pavyzdžiui, vektoriai $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra erdvės $\mathbf{R}^n$ bazė.

52 teorema. Kiekvieną bazę sudaro n vektorių (t. y. bazės vektorių skaičius lygus vektoriaus komponentų skaičiui).

Įrodymas. Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra bazė. Pirmiausia įrodysime, kad $m \leq n$. Kadangi kiekvienas α_i ($i=1, \dots, m$) yra vektorių $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tiesinė kombinacija, tai, tarę, kad $m > n$, iš 51 teoremos gausime, jog rinkinys yra tiesiškai priklausomas. To negali būti, todėl $m \leq n$.

Kadangi $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – bazė, tai kiekvienas iš vektorių $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tiesinė kombinacija. Jeigu $n > m$, tai pagal 51 teoremą vektoriai $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra tiesiškai priklausomi. Gautasis prieštaravimas rodo, kad prielaida $m < n$ neteisinga.

Taigi $m=n$. Tą ir tvirtina teorema.

53 teorema. Kiekvienas n tiesiškai nepriklausomų n -mačių vektorių rinkinys yra erdvės $\mathbf{R}^n$ bazė.

Irodymas. Kai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra tiesiškai nepriklausomi, paėmę bet koki n -matį vektorių ir prijungę jį prie duotųjų vektorių, gausime tiesiškai priklausomus vektorius

$$\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Taigi yra tokie skaičiai $l, c_1, \dots, c_n$, kad

$$l\alpha + \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j = 0$$

ir $l \neq 0$. (Tare, kad $l=0$, gautume

$$\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j = 0$$

ir bent vieną c_j nelygų nuliui. Tai reikštų, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra tiesiškai priklausomi, kas prieštarauja teoremos sąlygai.)

Todėl gauname

$$\alpha = \sum_{j=1}^n (-c_j l^{-1}) \alpha_j.$$

Taigi kiekvienas n -matis vektorius yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tiesinė kombinacija. Vadinasi, minėtasis rinkinys yra erdvės bazė.

Erdvės bazė – labai svarbi sąvoka. Todėl reikia gerai žinoti, kad erdvės $\mathbf{R}^n$ bazė yra kiekvienas vektorių rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, turintis šias savybes:

1) lygtis $\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = 0$ turi tik nulinį sprendinį;

2) $(\forall \alpha \in \mathbf{R}^n) (\exists l_1, \dots, l_n \in \mathbf{R}) \alpha = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i$ – kiekvienas n -matis vektorius-eilutė yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tiesinė kombinacija.

Iš 53 teoremos išplaukia, kad antroji sąlyga yra tenkinama tada, kai išpildyta pirmoji sąlyga – vektorių skaičius lygus n ir jie yra tiesiškai nepriklausomi.

Kai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra bazė, skaičiai $l_1, \dots, l_n$ išraiškoje

$$\alpha = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i$$

vadinami vektoriaus α koordinatėmis bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Be abejo, vektoriaus koordinatės priklauso nuo bazės. Į klausimą, koks yra ryšys tarp vektoriaus koordinatinių skirtingose bazėse, atsakysime bendrojoje vektorinių erdvių teorijoje. Dabar įrodysime tik vieną teoremą.

54 teorema. *Vektoriaus koordinatės duotoje bazėje nustatomos vienareikšmiškai.*

Įrodymas. Tarkime, kad bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ galimos dvi skirtingos vektoriaus išraiškos

$$\alpha = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n l'_i \alpha_i.$$

Panariui jas atėmę, gauname

$$0 = \sum_{i=1}^n (l_i - l'_i) \alpha_i.$$

Kadangi bazės vektoriai yra nepriklausomi, tai pastaroji lygybė galima tik tai tada, kai $l_i - l'_i = 0$ ($i=1, \dots, n$).

Vektoriaus α koordinatės bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ rasime išsprendę lygtį

$$x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n = \alpha. \quad (4.9)$$

Vienintelis jos sprendinys ($l_1, \dots, l_n$) ir yra vektoriaus α koordinatės, nes

$$l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n = \alpha$$

teisingas teiginys, o iš 54 teoremos išplaukia, kad kitų sprendinių (4.9) lygtis neturi.

Kitame paragrafe aiškinsimės, kaip tokia lygtis susijusi su tiesinių lygčių sistema.

Uždaviniai

23. Patikrinkite, ar vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sudaro bazę ir tuo atveju, kai jie sudaro bazę, raskite vektoriaus α koordinates toje bazėje:

a) $\alpha_1 = (3, -2), \alpha_2 = (-5, 4), \alpha = (1, 0);$

b) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \frac{1}{2} \end{pmatrix};$

c) $\alpha_1 = (3, 0, 1), \alpha_2 = (0, 1, 1), \alpha_3 = (2, 0, 0), \alpha = (1, 1, 2);$

d) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};$

e) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix};$

f) $\alpha_1 = (3, 2, 1, 4),$
 $\alpha_2 = (2, -1, -2, 0),$
 $\alpha_3 = (1, 0, 0, 0),$
 $\alpha_4 = (-2, 3, 0, 0),$
 $\alpha = (13, -11, 5, 4).$

§52. Vektorių tiesinės kombinacijos ir tiesinių lygčių sistemos

Vektorių tiesinės kombinacijos glaudžiai susijusios su tiesinių lygčių sistemomis.

Imkime $(n+1)$ vektorių-stulpeli

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \beta_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

ir n kintamųjų $x_1, x_2, \dots, x_n$. Sudarykite vektorių tiesinę kombinaciją

$$\sum_{j=1}^n x_j \beta_j.$$

Šią tiesinę kombinaciją prilyginę vektoriui β , gausime vektorinę lygtį

$$\sum_{j=1}^n x_j \beta_j = \beta, \quad (\text{V})$$

arba

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Kaip žinome, vektoriai yra lygūs tada ir tik tada, kai jų atitinkamos komponentės lygios, t. y. kai

$$\begin{aligned} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1, \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2, \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m. \end{aligned} \tag{S}$$

Taigi vektorinė lygtis reiškia tiesinių lygčių sistemą. Ir atvirkščiai, pasinaudoję (4.10) žymėjimais ir vektorių lygybės apibrėžimu, tiesinių lygčių sistema (S) galime užrašyti kaip vektorinę lygtį (V).

Vadinasi, vietoj tiesinių lygčių sistemos (S) galime nagrinėti vektoringą lygtį (V).

Vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_n$ ir β turi konkrečią prasmę. Kad ją išsiaiškintume, imkime tiesinių lygčių sistemos (S) koeficientų lentelę A , vadinamą *sistemos matrica*, ir lentelę B , vadinamą *sistemos išplėstąja matrica*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

168

ir $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, tai (4.9) lygtis

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = \alpha$$

yra šitokia:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Sulyginę atitinkamas komponentes, gauname tiesinių lygčių sistemą

$$\bigwedge_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_i \right), \quad (4.12)$$

kurios išplėstoji matrica yra

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_n \end{pmatrix} = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_n^T, \alpha^T) -$$

tai matrica, kurios pirmieji stulpeliai yra transponuoti bazės vektoriai atitinkamai $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \dots, \alpha_n^T$, o $(n+1)$ -asis stulpelis – transponuotas vektorius α .

Taigi matome, kad, ieškodami vektoriaus α koordinačių bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, turime spręsti (4.12) tiesinių lygčių sistemą, turinčią n lygčių ir n kintamųjų. Šios sistemos sprendinys ir yra vektoriaus α koordinatės pasirinktoje bazėje.

Lygtis $x_1 \alpha_1 + \dots + x_m \alpha_m = O$, kurią reikia spręsti norint nustatyti, ar vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai nepriklausomi ar priklausomi, irgi yra tiesinių lygčių sistema, be to, homogeninė.

Pavyzdžiai. 1. Nustatysime, ar vektoriai

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

yra tiesiškai priklausomi.

Sudarome vektorinę lygtį

$$x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3 = O$$

ir užrašome jai ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0,$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,$$

$$5x_3 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

Pertvarę šią sistemą į trapecinę, gauname trikampę sistemą

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

$$x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_3 = 0.$$

Vadinasi, vektoriai $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ yra tiesiškai nepriklausomi.

2. Nustatysime, ar vektoriai

$$\alpha_1 = (1, 2, 3), \quad \alpha_2 = (0, 4, -1), \quad \alpha_3 = (-2, 0, -7)$$

yra tiesiškai priklausomi.

Sudarome lygtį $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$, t. y. $x_1(1, 2, 3) + x_2(0, 4, -1) + x_3(-2, 0, -7) = (0, 0, 0)$.

Atlikę veiksmus ir sulyginę komponentes, gauname sistemą

$$x_1 - 2x_3 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0,$$

$$3x_1 - x_2 - 7x_3 = 0,$$

kuriai ekvivalenti trapecinė sistema

$$x_1 - 2x_3 = 0,$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

turi sprendinį

$$(2t, -t, t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Todėl ir $2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, kad ir koks būtų skaičius $t \in \mathbb{R}$.

Vadinasi, vektoriai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yra tiesiškai priklausomi.

Ryšys tarp vektorių tiesinės priklausomybės ir tiesinių lygčių sistemos suderintumo išaiškėja iš šių dviejų teoremų.

55 teorema. *Tiesinių lygčių sistema (S) yra suderinta tada ir tik tada, kai jos išplėtosios matricos B paskutinis stulpelis β yra pirmųjų n stulpelių $\beta_1, \dots, \beta_n$ tiesinė kombinacija.*

Irodymas. Pakankamumas. Sakysime,

$$\beta = \sum_{j=1}^n l_j \beta_j.$$

Pasinaudoję vektorių lygybės apibrėžimu ir veiksmų savybėmis, gauname lygybes

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j \quad (i = 1, \dots, m),$$

kurios reiškia, kad skaičių rinkinys $(l_1, \dots, l_n)$ yra sistemos (S) sprendinys.

Būtinumas. Tarkime, kad sistema (S) turi sprendinį $(t_1, \dots, t_n)$, t. y.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Šios lygybės reiškia, kad

$$\sum_{j=1}^n \beta_j t_j = \beta,$$

t. y. β yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ tiesinė kombinacija.

56 teorema. *Tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos matricos A stulpeliai yra tiesiškai priklausomi.*

Irodymas. Kai matricos A stulpeliai tiesiškai priklausomi, t. y.

$$\sum_{j=1}^n l_j \beta_j = O, \quad (l_1, \dots, l_n) \neq O,$$

skaičių rinkinys $(l_1, \dots, l_n)$ yra sistemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

nenulinis sprendinys. Taigi sąlyga yra pakankama.

Jeigu sistema turi nenulinį sprendinį $(t_1, \dots, t_n) \neq O$, tai teisingos lygybės

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

kurios reiškia, kad

$$\sum_{j=1}^n t_j \beta_j = O,$$

t. y. vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_n$ yra tiesiškai priklausomi.

Remdamiesi šia teorema, galime iš tiesinių homogeninių lygčių sistemos nustatyti, ar duotieji vektoriai yra tiesiškai priklausomi, ar ne. Kai nagrinėjame vektorių-stulpelius, sudarome homogeninių lygčių sistemą kaip anksčiau ir ją pertvarkome į trapecinę. Jeigu gauname trikampę sistemą, tai ta vektorių sistema yra tiesiškai nepriklausoma.

Nagrinėdami vektorių-eilutes, viską darome analogiškai.

§53. Tiesinių homogeninių lygčių sistemos sprendinių savybės

Nagrinėsime tiesinių homogeninių lygčių sistemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \tag{H}$$

sprendinių savybes, taip pat homogeninės ir ją atitinkančios nehomogeninės sistemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (S)$$

sprendinių sąryšius.

Tarkime, kad sistema (H) neapibrėžta (priešingu atveju jos sprendinių aibė būtų $S_H = \{(0, \dots, 0)\}$) ir kad ją atitinkanti sistema (S) suderinta.

Pasirėmę žiniomis apie vektorius-eilutes, apibrėšime homogeninės tiesinių lygčių sistemos (H) sprendinių sumą, skirtumą, tiesinę kombinaciją.

Tarkime, kad $\gamma_t = (h_1^{(t)}, h_2^{(t)}, \dots, h_n^{(t)})$, $t = 1, 2, \dots, k$, yra sistemos (H) sprendiniai. Tada su kiekvienu realiųjų skaičių rinkiniu $c_1, c_2, \dots, c_k$ reiškinyse

$$\alpha = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + \dots + c_k \gamma_k$$

vadinamas tų sprendinių tiesine kombinacija, kuri lygi

$$\alpha = \left(\sum_{t=1}^k c_t h_1^{(t)}, \sum_{t=1}^k c_t h_2^{(t)}, \dots, \sum_{t=1}^k c_t h_n^{(t)} \right).$$

Atskiru atveju, kai $c_1 = c_2 = 1$, gauname dviejų sprendinių sumą

$$\gamma_1 + \gamma_2 = (h_1^{(1)} + h_1^{(2)}, h_2^{(1)} + h_2^{(2)}, \dots, h_n^{(1)} + h_n^{(2)}),$$

o kai $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, gauname skirtumą

$$\gamma_1 - \gamma_2 = (h_1^{(1)} - h_1^{(2)}, h_2^{(1)} - h_2^{(2)}, \dots, h_n^{(1)} - h_n^{(2)}).$$

57 teorema. Homogeninės sistemos sprendinių tiesinė kombinacija yra tos sistemos sprendinys.

Irodymas. Tarkime, kad $(h_1^{(t)}, \dots, h_n^{(t)})$ ($t = 1, \dots, k$) yra sistemos sprendiniai. Iš sprendinių apibrėžimo išplaukia lygybės

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} h_j^{(t)} = 0 \quad (i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, k).$$

Padauginę tas lygybes atitinkamai iš $c_1, c_2, \dots, c_k$ ir sudėję, gauname lygybes

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{t=1}^k c_t h_j^{(t)} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

kurios ir reiškia teoremos tvirtinimą.

Iš šios teoremos išplaukia tokios išvados:

1) jeigu γ yra sistemos (H) sprendinys, tai su kiekvienu $c \in \mathbf{R}$ $c\gamma$ yra sistemos (H) sprendinys;

2) jeigu γ_1, γ_2 — du sistemos (H) sprendiniai, tai $\gamma_1 + \gamma_2$ ir $\gamma_1 - \gamma_2$ yra sistemos (H) sprendinys.

Jų įrodymą remiantis 57 teorema paliekame skaitytojiui.

58 teorema. *Nehomogeninės sistemos dviejų sprendinių skirtumas yra ją atitinkančios homogeninės sistemos sprendinys.*

Irodymas. Tarkime, kad $(l_1, \dots, l_n)$ ir $(t_1, \dots, t_n)$ yra sistemos (S) sprendiniai, t. y.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = b_i, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją ir atlikę akivaizdžius pertvarkius, gauname lygybes

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (l_j - t_j) = 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

kurios ir reiškia teoremos tvirtinimą.

59 teorema. *Jeigu γ yra sistemos (H) sprendinys, o α – sistemos (S) sprendinys, tai $\gamma + \alpha$ yra sistemos (S) sprendinys.*

Irodymas. Tarkime, kad $\alpha = (l_1, l_2, \dots, l_n)$, $\bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = b_i \right)$,

$$\gamma = (h_1, h_2, \dots, h_n), \quad \bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} h_j = 0 \right).$$

Sudėję šias lygybes ir jas pertvarkę, gauname teiginį

$$\bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (h_j + l_j) = b_i \right),$$

kuris reiškia, kad

$$\gamma + \alpha = (h_1 + l_1, h_2 + l_2, \dots, h_n + l_n) \in S.$$

Iš pastarosios teoremos išplaukia, kad, žinodami homogeninės sistemos (H) sprendinius ir bent vieną nehomogeninės sistemos (S) sprendinį, galime gauti visus nehomogeninės sistemos sprendinius.

§54. Vektorių rinkinio rangas

Remiantis vektorių tiesinės priklausomybės savybėmis, lengva suvokti, kad vienas vektorius α tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai jis lygus nuliniam vektoriui. Nenulinių vektorių rinkinys

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

yra tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai bent vienas to rinkinio vektorius yra kitų vektorių tiesinė kombinacija. Be to, iš 52 teoremos išplaukia, kad kiekvienas n -mačių vektorių rinkinys, turintis daugiau kaip n vektorių, yra tiesiškai priklausomas. Kita vertus, tarp nenulinių vektorių yra tiesiškai nepriklausoma dalis, nes kiekvienas vektorius atskirai yra tiesiškai nepriklausomas. Tarp vektorių rinkinio tiesiškai nepriklausomų dalių yra, be abejo, tokia dalis, kuri turi daugiausia vektorių, nes kiekviena vektorių rinkinio dalis turi ne daugiau vektorių kaip pats rinkinys.

Pavyzdys. Nagrinėkime vektorių rinkinį

$$\alpha_1 = (0, 1, 1), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (1, 1, 2), \alpha_4 = (-1, 1, 0).$$

Vektoriai α_1 ir α_2 yra tiesiškai nepriklausomi. Prie jų prijungę vektorius α_3 , gausime jau priklausomą rinkinį, nes $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Rinkinys $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ taip pat tiesiškai priklausomas, nes $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$.

Išitikinome, kad rinkinio $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ vektoriai α_1, α_2 yra tiesiškai nepriklausomi ir jais tiesiškai išreiškiami visi rinkinio vektoriai.

Apibrėškime vektorių rinkinio rango sąvoką.

Skaičius r vadinamas vektorių rinkinio $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ rangų, jeigu rinkinyje yra r tiesiškai nepriklausomų vektorių ir bet kurie $r+1$ šio rinkinio vektoriai yra tiesiškai priklausomi.

Pavyzdyje nagrinėto rinkinio rangas lygus 2, nes vektoriai α_1 ir α_2 yra nepriklausomi, o bet kurie trys vektoriai jau yra tiesiškai priklausomi.

Kiekvieno nenulinių n -mačių vektorių rinkinio $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ rangas r yra natūrinis skaičius, ne didesnis už $\min \{m, n\}$.

Pagal 52 teoremą kiekvienas n -mačių vektorių rinkinys negali turėti daugiau kaip n tiesiškai nepriklausomų vektorių. Taigi $r \leq n$. Kita vertus, $r \leq m$. Todėl

$$r \leq \min \{n, m\}.$$

Tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinio rangas lygus vektorių skaičiui.

60 teorema. *Jeigu vektorių rinkinio $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ rangas yra r , tai rinkinyje yra r tiesiškai nepriklausomų vektorių, kuriais tiesiškai išreiškiamas kiekvienas iš vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.*

Irodymas. Pagal rango apibrėžimą yra r tiesiškai nepriklausomų vektorių

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r$$

jeigu jie nebūtų pirmieji, galėtume pakeisti vektorių numeraciją). Prie jų prijunkime vektorius $\alpha_{r+i}, i=1, \dots, m-r$. Gausime $r+1$ vektorių, kurie jau bus tiesiškai priklausomi. Remdamiesi 49 teorema, gauname teoremos tvirtinimą.

Du n -mačių vektorių rinkiniai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ir $\beta_1, \dots, \beta_k$ vadinami ekvivalenčiais, jeigu kiekvienas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_k$ tiesinė kombinacija ir kiekvienas $\beta_1, \dots, \beta_k$ yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tiesinė kombinacija.

61 teorema. *Ekvivalenčių vektorių rinkinių rangai yra lygūs.*

Irodymas. Tarkime, kad r yra rinkinio $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ rangas ir vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra tiesiškai nepriklausomi. Tada, remdamiesi 60 teorema, gauname

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^r c_{ij} \alpha_j \quad (i=1, \dots, m).$$

Analogiškai r_1 yra rinkinio $\beta_1, \dots, \beta_k$ rangas, ir vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_{r_1}$ yra tiesiškai nepriklausomi. Kadangi

$$\beta_s = \sum_{i=1}^m b_{si} \alpha_i \quad (s=1, \dots, k),$$

tai, pakeitę α_i ($i=1, \dots, m$) jų išraiškomis, gauname lygybes

$$\beta_s = \sum_{i=1}^m b_{si} \sum_{j=1}^r c_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^m b_{si} c_{ij} \right) \alpha_j \quad (s=1, \dots, k),$$

kurios reiškia, kad tiesiškai nepriklausomi vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_{r_1}$ yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tiesinės kombinacijos. Tare, kad $r < r_1$, pagal 51 teoremą gausime, kad vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_{r_1}$ yra tiesiškai priklausomi. Tai prieštaraua vektorių parinkimui. Todėl

$$r_1 \leq r.$$

Kita vertus, turime (60 teorema)

$$\beta_s = \sum_{j=1}^{r_1} d_{sj} \beta_j \quad (s=1, \dots, k).$$

Kadangi

$$\alpha_i = \sum_{s=1}^k l_{is} \beta_s \quad (i=1, \dots, m),$$

tai, pasinaudoję β_s ($s=1, \dots, k$) išraiškomis, gausime lygybes

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r_1} \left(\sum_{s=1}^k l_{is} d_{sj} \right) \beta_j \quad (i=1, \dots, m),$$

kurios reiškia, kad vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_{r_1}$ tiesinės kombinacijos. Jei tarsime, kad $r_1 < r$, tai, remdamiesi 51 teorema, gausime, kad vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ yra tiesiškai priklausomi. To negali būti. Todėl

$$r_1 \geq r.$$

Iš nelygybių $r_1 \leq r$ ir $r_1 \geq r$ išplaukia, kad $r = r_1$.

Kadangi tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinio rangas lygus vektorių skaičiui, tai iš paskutinės teoremos išplaukia, *jog dviejuose tiesiškai nepriklausomuose ekvivalenčiuose vektorių rinkiniuose yra vienodas vektorių skaičius.*

Kadangi ekvivalenčių vektorių rinkinių rangai sutampa, tai ieškodami vektorių rinkinio rango ir remsimės šia savybe.

Surašę n -mačius vektorius-eilutes $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vieną po kitu arba m -mačius vektorius-stulpelius $\beta_1, \dots, \beta_n$ vieną po kito, gauname stačiakampę lentelę – matricą. Kiekviena matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yra n -mačių vektorių-eilučių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ rinkinys (stulpelis), t. y.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix};$$

čia $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ($i=1, \dots, m$) – matricos eilutės.

Matrica A taip pat yra m -mačių vektorių-stulpelių $\beta_1, \dots, \beta_n$ rinkinys (eilutė), t. y. $A = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$; čia

$$\beta_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

yra matricos stulpeliai. Todėl visai logiška apibrėžti matricos stulpelių rangą ir jos eilučių rangą.

*Matricos A eilučių rangą vadiname vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ rinkinio rangą.
Matricos A stulpelių rangą vadiname vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ rinkinio rangą.*

Kai kurių vektorių rinkinių rangą, kartu ir kai kurių matricų eilučių arba stulpelių rangą galima iš karto nustatyti. Tai pasakytina apie vadinamąsias (trapecijos formos rinkinius) trapezines matricas.

rangas ir jį atitinkančios matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

stulpelių rangas lygus r .

Šis teiginys įrodomas visiškai analogiškai. Iš suformuluotų teiginių išplaukia, kad *matricos*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kurioje $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, \dots, r$), eilučių ir stulpelių rangai sutampa ir yra lygūs r .

Pažymėsime, kad, prirašę prie matricos nulinę eilutę arba nulinę stulpelį, nei eilučių, nei stulpelių rango nepakeisime. Atmetę nulinę eilutę arba nulinę stulpelį, taip pat nepakeisime nei eilučių, nei stulpelių rango.

§55. Vektorių rinkinių ir matricų elementarieji pertvarkiai

Vektorių rinkinių elementariaisiais pertvarkiais vadiname šitokius veiksmus:

- 1) *vektorių sukeitimą vietomis;*
- 2) *kurio nors vektoriaus dauginimą iš nelygaus nuliui skaičiaus;*
- 3) *prie vieno vektoriaus pridėjimą kurio nors kito vektoriaus, padauginto iš skaičiaus.*

Analogiškus veiksmus, atliekamus su matricos eilutėmis (stulpeliais), vadiname matricos eilučių (stulpelių) elementariaisiais pertvarkiais.

Elementariai pertvarkius vektorių rinkinį, gaunami ekvivalentūs vektorių rinkiniai.

Akivaizdu, kad, sukeitę vektorius vietomis, gauname ekvivalentų rinkinį. Rinkinio $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vektorių α_i padauginsime iš $c \neq 0$; gausime

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, c\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m.$$

Pastarasis vektorių rinkinys ekvivalentus pradiniam, nes $\alpha_i = c^{-1}(c\alpha_i)$, o kiti vektoriai sutampa.

Prie rinkinio $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vektoriaus α_i pridėję $c\alpha_j$ ($j \neq i$), gausime $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + c\alpha_j, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$.

Kadangi $\alpha_i = (\alpha_i + c\alpha_j) - c\alpha_j$, tai pirmojo vektorių rinkinio kiekvienas vektorius yra antrojo rinkinio vektorių tiesinė kombinacija, ir atvirkščiai. Taigi rinkiniai yra ekvivalentūs.

Panašius teiginius galime suformuluoti ir apie matricas:

1. *Matricos eilučių elementarieji pertvarkiai nekeičia jos eilučių rango;*
2. *Matricos stulpelių elementarieji pertvarkiai nekeičia jos stulpelių rango.*

Matricos eilučių arba stulpelių elementariusius pertvarkius vadiname matricos elementariaisiais pertvarkiais.

62 teorema. *Matricos elementarieji pertvarkiai nekeičia nei jos eilučių rango, nei stulpelių rango.*

Įrodymas. Matricos eilučių elementarieji pertvarkiai nekeičia jos eilučių rango, o stulpelių elementarieji pertvarkiai nekeičia stulpelių rango, todėl reikia įrodyti, kad:

- 1) *matricos stulpelių elementarieji pertvarkiai nekeičia jos eilučių rango;*
- 2) *matricos eilučių elementarieji pertvarkiai nekeičia jos stulpelių rango.*

Įrodysime pirmąjį tvirtinimą (antrasis įrodomas analogiškai).

I. Sakykime, matricos eilutės yra $\alpha_1, \dots, \alpha_m$; čia

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Sukeitę j -ąją ir k -ąją ($j < k$) stulpelius vietomis, gauname naujus vektorius-eilutes:

$$\bar{\alpha}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ij-1}, a_{ik}, a_{ij+1}, \dots, a_{ik-1}, a_{ij}, a_{ik+1}, \dots, a_{in}) \\ (i = 1, \dots, m).$$

Jeigu su kokiais nors skaičiais $l_1, \dots, l_m$

$$\sum_{i=1}^m l_i \bar{\alpha}_i = O,$$

tai su tais pačiais skaičiais ir

$$\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = O;$$

ir atvirkščiai: jeigu antroji lygybė galioja su kokiais nors $l_1, \dots, l_m$, tai ir pirmoji lygybė taip pat galioja su tais pačiais $l_1, \dots, l_m$. Vadinasi, abu šie rinkiniai kartu yra arba priklausomi, arba nepriklausomi.

Paėmę bet kurią matricos eilučių dalį $\alpha_i, \dots, \alpha_r$ po stulpelių j ar k sukeitimo vietomis, gausime vektorius $\bar{\alpha}_i, \dots, \bar{\alpha}_r$. Vėl taip pat samprotaudami, įsitikinsime, kad šie rinkiniai kartu yra arba priklausomi, arba nepriklausomi.

Vadinasi, stulpelių sukeitimas vietomis nekeičia matricos eilučių rango.

II. Padauginkime matricos j -ąjį stulpelį iš nelygaus nuliui skaičiaus c . Gausime eilutes

$$\tilde{\alpha}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ij-1}, ca_{ij}, a_{ij+1}, \dots, a_{in}) \quad (i=1, \dots, m).$$

Jeigu su kokiais nors skaičiais $l_i, \dots, l_r$,

$$\sum_{k=1}^r l_k \alpha_{i_k} = O,$$

tai su tais pačiais skaičiais ir

$$\sum_{k=1}^r l_k \tilde{\alpha}_{i_k} = O,$$

ir atvirkščiai. Paėmę bet kurį r eilučių rinkinį $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$, gauname r eilučių rinkinį $\tilde{\alpha}_{i_1}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$. Jie yra kartu tiesiškai priklausomi arba nepriklausomi. Taigi matricos stulpelio dauginimas iš nelygaus nuliui skaičiaus nekeičia matricos eilučių rango.

III. Prie matricos j -ojo stulpelio pridėję k -ąjį stulpelį ($j \neq k$), padauginą iš c , gauname matricos eilutes

$$\hat{\alpha}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ij-1}, a_{ij} + ca_{ik}, a_{ij+1}, \dots, a_{in}) \quad (i=1, \dots, m).$$

Sakykime, su kokiais nors $l_i, \dots, l_r$,

$$\sum_{s=1}^r l_s \alpha_{i_s} = O, \quad (4.13)$$

t. y.

$$\sum_{s=1}^r l_s a_{i_s, t} = 0 \quad (t=1, \dots, n). \quad (4.14)$$

Kai $t=j$, $t=k$, gauname

$$\sum_{s=1}^r l_s a_{i_s, j} = 0, \quad \sum_{s=1}^r l_s a_{i_s, k} = 0.$$

Antrąją lygybę padauginę iš c ir pridėję prie pirmosios, gauname

$$\sum_{s=1}^r l_s (a_{i_s, j} + ca_{i_s, k}) = 0.$$

Vektorių-eilučių $\hat{\alpha}_i$ visos komponentės, išskyrus j -ąją, sutampa su vektorių-eilučių α_i komponentėmis, o j -oji komponentė yra $a_{ij} + ca_{ik}$ ($i=1, \dots, m$), todėl (4.14) lygybės, imant $t=1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$, kartu su pastarąja lygybe reiškia, kad

$$\sum_{s=1}^r l_s \hat{\alpha}_{i_s} = O. \quad (4.15)$$

Be to, jeigu su kokiais nors $d_{i_1}, \dots, d_{i_r}$

$$\sum_{s=1}^r d_{i_s} \hat{\alpha}_{i_s} = 0, \quad (4.16)$$

tai

$$\sum_{s=1}^r d_{i_s} a_{i_s, t} = 0 \quad (t = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n)$$

ir

$$\sum_{s=1}^r d_{i_s} (a_{i_s, j} + c a_{i_s, k}) = 0.$$

Tačiau tada

$$\sum_{s=1}^r d_{i_s} a_{i_s, j} = -c \sum_{s=1}^r d_{i_s} a_{i_s, k} = 0,$$

todėl ir

$$\sum_{s=1}^r d_{i_s} \alpha_{i_s} = 0. \quad (4.17)$$

Sugretinę (4.13) ir (4.15), taip pat (4.16) ir (4.17) lygybes, matome, kad vektorių rinkinys $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ ir jį atitinkantis rinkinys $\hat{\alpha}_{i_1}, \dots, \hat{\alpha}_{i_r}$ yra kartu tiesiškai priklausomi arba tiesiškai nepriklausomi. Vadinasi, prie vieno matricos stulpelio pridėję kitą jos stulpelį, padaugintą iš skaičiaus, matricos eilučių rango nepakeisime.

Ar skiriasi matricos eilučių rangas nuo jos stulpelių rango? Kaip skaičiuojami vektorių rinkinio ir matricos rangai? Į tuos klausimus padės atsakyti ši teorema.

63 teorema. *Kiekvieną m eilučių ir n stulpelių matricą elementariaisiais pertvarkiais galima pakeisti matrica*

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_r \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n-r} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}} \right\} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} ; \quad (4.18)$$

čia r — sveikasis neneigiamas skaičius, priklausantis nuo matricos ir tenkinantis nelygybę $r \leq \min \{m, n\}$.

Irodysime dviem etapais.

1. Duotąją matricą pertvarkysime taip, kad gautume šitokios formos matricą:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (b_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, r). \quad (4.19)$$

Tuo tikslu matricoje

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

keisdami eilutes ir stulpelius vietomis, pasiekiame, kad būtų $a_{11} \neq 0$. (Jei visi matricos elementai – nuliai, tai ji yra (4.18) formos ir $r=0$; tada teoremos tvirtinimas trivialus.) Matricos 1-ąją eilutę dauginame iš $-a_{11}^{-1}$ ir pridėdami prie i -osios eilutės ($i=2, \dots, m$). Kadangi $a_{i1} + (-a_{11}^{-1})a_{i1} = 0$, tai gauname matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Jeigu pastarojoje visi $a'_{ij} = 0$ ($i=2, \dots, m; j=2, \dots, n$), tai turime (4.19) formos matricą, kai $r=1$. Jei bent vienas $a'_{ij} \neq 0$ ($i \geq 2, j \geq 2$), tai, sukeisdami eilutes ir stulpelius vietomis, pasiekiame, kad būtų $a'_{22} \neq 0$. Tada 2-ąją eilutę dauginame iš $-a'_{12}(a'_{22})^{-1}$ ir pridėdami prie i -osios eilutės ($i=3, \dots, m$). Gauiname matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}.$$

Jeigu pastarojoje $a_{ij} = 0$ ($i \geq 3, j \geq 3$), tai turime (4.14) formos matricą, kai $r=2$. Priešingu atveju vėl viską kartojame. Po $r-1$ žingsnio ($r \leq m, r \leq n$) gausime matricą

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (b_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, r).$$

Šioje matricoje nebus nulinių eilučių, kai $r=m$. (Jų gali būti tik tada, kai $r < m$.)

2. (4.19) formos matricą pertvarkysime taip, kad gautume (4.18) formos matricą.

(4.19) matricoje j -ąjį stulpelį, pradėdami nuo $j=1$ ($j=1, 2, \dots, n$), dauginame iš $-b_{jk}b_{jj}^{-1}$ ir pridedame prie k -ojo stulpelio ($k=j+1, \dots, n$).

Pakartoję viską r kartų, kai $r < n$, ir $r-1$ kartą, kai $r=n$, gausime matricą

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabar i -ąją eilutę padauginsime atitinkamai iš $-b_{ii}^{-1}$ ($i=1, \dots, r$) ir gausime (4.18) formos matricą.

Remdamiesi 63 teorema, galime daryti išvadą: *matricos eilučių rangas lygus jos stulpelių rangui*.

Iš tikrųjų (4.18) formos matricos eilučių ir stulpelių rangai yra vienodi ir lygūs r . Kadangi pagal 62 teoremą elementarieji pertvarkiai nekeičia nei eilučių, nei stulpelių rango, tai iš 63 teoremos išplaukia, kad bet kurios matricos eilučių ir stulpelių rangai sutampa.

Matricos A eilučių rangą ir stulpelių rangą vadinsime matricos rangu ir žymėsime $\text{rang } A$.

Matricos rangą galime rasti elementariaisiais pertvarkiais suteikdami jai trapecijos formą.

Pavyzdys. Apskaičiuosime matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (-1) \\ \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} (1) \\ (1) \\ (1) \\ (1) \end{array} \right| \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{l} (-4) \\ \\ \\ \end{array}$$

rangą.

Viską galima daryti kaip 63 teoremos įrodyme, bet tam reikės daug darbo. Atlikę nurodytus veiksmus, gausime matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -10 & 1 & -5 & -5 & -18 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prie antrosios eilutės pridėję trečiąją, padauginą iš 10, po to sukeitę šias eilutes vietomis, gausime matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 31 & 45 & 35 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Šioje matricoje yra 3 nenulinės eilutės, todėl $\text{rang } A = 3$.

Matricos rango radimo algoritmą galima suformuluoti šitaip.

Elementariaisiais pertvarkiais matricai suteikiame trapecijos formą, atmetame nulines eilutes ir nulinius stulpelius. Matricos rangas lygus gautosios trapecinės matricos eilučių skaičiui.

Uždaviniai

24. Apskaičiuokite vektorių rinkinių rangus:

a) $\alpha_1 = (0, 1)$, $\alpha_2 = (3, 4)$, $\alpha_3 = (7, -8)$;

b) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $\alpha_1 = (2, 3, 1)$, $\alpha_2 = (-3, 2, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 8, 2)$;

d) $\alpha_1 = (3, -7, -13)$, $\alpha_2 = (4, 3, -8)$, $\alpha_3 = (-5, -4, 11)$, $\alpha_4 = (1, -4, -5)$;

e) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -13 \\ -8 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$;

f) $\alpha_1 = (13, 44, 10, -7)$,
 $\alpha_2 = (17, 29, 9, -1)$,
 $\alpha_3 = (1, 89, 13, -25)$;

g) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 32 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

25. Apskaičiuokite matricų rangus:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 8 \\ 1 & -5 & -5 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 2 \\ 10 & 17 & 6 & 1 \\ -11 & -19 & -9 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 & -2 & -10 & -10 \\ 1 & 6 & 8 & 7 & 4 & 11 \\ 2 & -1 & -7 & -18 & -13 & -12 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 18 & 13 \\ 3 & 5 & 1 & -11 & -9 & -1 \end{pmatrix}$.

26. Apskaičiuokite matricų, kuriose a – parametras, rangus:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1-a & a-1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & a+2 & 3 \\ -9 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

§56. Tiesinių lygčių sistemos suderintumo sąlyga

Matricos rangą ir jo savybėmis remsimės nagrinėdami tiesinių lygčių sistemas.

Tiesinių lygčių sistemai

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (S)$$

yra ekvivalenti vektorinė lygtis

$$\sum_{j=1}^n x_j \beta_j = \beta, \quad (V)$$

kurioje β_j – sistemos matricos A j -asis stulpelis ($j=1, \dots, n$), o β – sistemos išplėtosios matricos B paskutinis stulpelis,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Įrodysime teoremą, vadinamą tiesinių lygčių sistemos *suderintumo kriterijumi*, arba *Kronekerio–Kapelio teorema* (L. Kronecker, 1823–1891, vokiečių matematikas, A. Capelli, 1855–1910, italų matematikas).

64 teorema. *Tiesinių lygčių sistema (S) yra suderinta tada ir tik tada, kai $\text{rang} A = \text{rang} B$.*

Įrodymas. Tarkime, kad sistema (S) yra suderinta. Vadinasi, vektorius β yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ tiesinė kombinacija, t. y.

$$\beta = \sum_{j=1}^n l_j \beta_j. \quad (4.20)$$

Jeigu $\text{rang} A = r$, tai matricoje A yra r tiesiškai nepriklausomų stulpelių, o kiekvienai $r+1$ stulpeliai jau yra tiesiškai priklausomi. Jeigu tiesiškai nepriklausomi yra stulpeliai

$$\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r},$$

tai

$$\beta_j = \sum_{k=1}^r c_{j j_k} \beta_{j_k} \quad (j \neq j_k).$$

Todėl, įrašę šias išraiškas į (4.20) lygybę, gauname

$$\beta = \sum_{j \neq j_k} l_j \left(\sum_{k=1}^r c_{j j_k} \beta_{j_k} \right) + \sum_{k=1}^r l_{j_k} \beta_{j_k} = \sum_{k=1}^r t_k \beta_{j_k};$$

čia

$$t_k = l_{j_k} + \sum_{j \neq j_k} l_j c_{jj_k} \quad (k=1, \dots, r).$$

Taigi vektorius β yra tų pačių r vektorių

$$\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$$

tiesinė kombinacija. Šie vektoriai-stulpeliai ir matricoje B yra tiesiškai nepriklausomi.

Todėl $\text{rang} A = \text{rang} B = r$. Vadinasi, teoremos sąlyga būtina.

Tarkime, kad $\text{rang} A = \text{rang} B = r$.

Matricoje A imkime r tiesiškai nepriklausomų stulpelių

$$\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}.$$

Tie patys stulpeliai, aišku, bus nepriklausomi ir matricoje B . Kadangi $\text{rang} B = r$, tai vektoriai $\beta, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ jau bus tiesiškai priklausomi, t. y.

$$l\beta + \sum_{k=1}^r c_{j_k} \beta_{j_k} = 0.$$

Jeigu tarsime, kad $l=0$, tai bent vienas iš c_{j_k} turės būti nelygus nuliui. Vadinasi, vektoriai $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ būtų tiesiškai priklausomi. Tai prieštarauja jų parinkimui. Todėl $l \neq 0$. Padaliję abi puses iš l ir atlikę akivaizdžius pertvarkius, gauname

$$\beta = \sum_{j=1}^n l_j \beta_j;$$

čia

$$l_j = \begin{cases} 0, & j \neq j_k \\ -c_{j_k} l^{-1}, & j = j_k. \end{cases} \quad (k=1, \dots, r),$$

Ši lygybė reiškia, kad sistema (S) yra suderinta. Taigi teoremos sąlyga pakankama.

65 teorema. *Tiesinių lygčių sistema (S) yra apibrėžta, kai $\text{rang} A = \text{rang} B = n$, ir neapibrėžta, kai $\text{rang} A = \text{rang} B < n$.*

Irodymas. Kai $\text{rang} A = \text{rang} B = n$ (tai gali būti tik tuo atveju, kai $m \geq n$), matricos A stulpeliai yra tiesiškai nepriklausomi.

Tarę, kad sistema turi du sprendinius $(l_1, \dots, l_n)$ ir $(t_1, \dots, t_n)$, t. y.

$$\sum_{j=1}^n l_j \beta_j = \beta, \quad \sum_{j=1}^n t_j \beta_j = \beta,$$

ir atėmę panariui šias lygybes, gauname

$$\sum_{j=1}^n (l_j - t_j) \beta_j = 0.$$

Kadangi $\beta_1, \dots, \beta_n$ yra tiesiškai nepriklausomi, tai pastaroji lygybė galima tikrai tada, kai $l_j = t_j$ ($j=1, \dots, n$), t. y.

$$(l_1, \dots, l_n) = (t_1, \dots, t_n).$$

Kai $\text{rang} A = \text{rang} B < n$, vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_n$ yra tiesiškai priklausomi. Tada galima rasti tokius skaičius $h_1, \dots, h_n$, kad būtų $(h_1, \dots, h_n) \neq 0$ ir

$$\sum_{j=1}^n h_j \beta_j = 0.$$

Tarkime, jog $l_1, \dots, l_n$ yra sistemos (S) sprendinys, t. y.

$$\sum_{j=1}^n l_j \beta_j = \beta.$$

Sudėję tas lygybes, gauname lygybę

$$\sum_{j=1}^n (l_j + h_j) \beta_j = \beta,$$

kuri reiškia, kad $(l_1 + h_1, \dots, l_n + h_n)$ yra sistemos (S) sprendinys.

Tačiau $(l_1, \dots, l_n) \neq (l_1 + h_1, \dots, l_n + h_n)$, todėl sistema turi ne mažiau kaip du skirtingus sprendinius ir yra neapibrėžta.

66 teorema. *Tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinių sprendinių tada ir tik tada, kai jos matricos rangas r mažesnis už kintamųjų skaičių.*

Irodymas. Homogeninių lygčių sistema suderinta. Pagal 65 teoremą, kai $\text{rang} A = r < n$, sistema neapibrėžta, taigi turi nenulinių sprendinių. Sąlyga pakankama.

Jeigu homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį $(t_1, \dots, t_n) \neq 0$, tai $\sum_{j=1}^n t_j \beta_j = 0$. Tai reiškia, kad matricos stulpeliai $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ yra tiesiškai priklausomi. Taigi $\text{rang} A < n$.

Iš 66 teoremos išplaukia šitokios išvados:

1. Homogeninių lygčių sistema, kurioje lygčių yra mažiau negu kintamųjų, turi nenulinių sprendinių.
2. Homogeninių lygčių sistema turi nenulinių sprendinių tada ir tik tada, kai jos matricos stulpeliai yra tiesiškai priklausomi.

Pirmąją išvadą gauname iš 66 teoremos, pastebėję, kad

$$\text{rang } A \leq \min \{ m, n \} < n,$$

kai $m < n$.

Antrąją išvadą gauname iš 66 teoremos, pastebėję, kad matricos rangas mažesnis už jos stulpelių skaičių tada ir tik tada, kai stulpeliai yra tiesiškai priklausomi.

Remdamiesi matricų elementariaisiais pertvarkiais, galime šiek tiek modifikuoti lygčių sistemos sprendimą Gauso metodu.

Sudarykime sistemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (S)$$

išplėstąją matricą

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Sistemos elementarieji pertvarkiai sutampa su matricos B eilučių elementariaisiais pertvarkiais. Pakeisti sistemos kintamųjų numeraciją — reiškia sukeisti vietomis matricos B atitinkamus stulpelius. Vadinasi, jeigu, atlikę matricos B eilučių elementariusius pertvarkius ir sukeitę vietomis pirmuosius n stulpelių, gausime matricą

$$B' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & b'_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & b'_m \end{pmatrix},$$

tai sistema

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} y_j = b'_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (S')$$

kurios išplėtoji matrica yra B' , bus ekvivalenti sistemai (S) (čia reikia atsižvelgti į kintamųjų numeracijos pakeitimus).

Atlikdami matricos B eilučių elementariusius pertvarkius ir sukeisdami vietomis (jeigu reikia) pirmuosius n stulpelių, visada galime gauti matricą B' (nuliųjų eilučių nerašome):

$$B' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & b'_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \end{pmatrix},$$

kurioje $c_{ii} \neq 0$ ($i=1, \dots, r$). Šią matricą atitinkanti sistema

$$\begin{cases} \sum_{j=i}^n c_{ij} y_j = b'_i & (i=1, \dots, r), \\ 0 = b'_{r+1} \end{cases}$$

ekvivalenti sistemai (S).

Iš sistemos suderintumo kriterijaus išplaukia, kad sistema yra:

suderinta, kai $b'_{r+1}=0$,

nesuderinta, kai $b'_{r+1} \neq 0$,

apibrėžta, kai $r=n$ ir $b'_{r+1}=0$,

neapibrėžta, kai $r < n$ ir $b'_{r+1}=0$.

Taigi nereikia atlikinėti tiesinių lygčių sistemos elementariųjų pertvarkių, galima juos atlikti su matrica B , po to spręsti sistemai (S) ekvivalenčią sistemą (S'), jeigu ji suderinta, t. y. $b'_{r+1}=0$, arba konstatuoti, kad sistema (S) neturi sprendinių, jeigu $b'_{r+1} \neq 0$. Matricoje B' visi $c_{ii} \neq 0$ ($i=1, \dots, r$). Todėl, kai $b'_{r+1}=0$, 2-ąją eilutę padauginę iš $-c_{12}c_{22}^{-1}$ ir pridėję prie 1-osios, po to 3-ąją eilutę padauginę iš atitinkamų daugiklių ir atitinkamai pridėję prie 1-osios ir 2-osios eilučių ir t. t., matricą B' galime pertvarkyti į šitokios formos matricą:

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 & c'_{1r+1} & \dots & c'_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 & c'_{2r+1} & \dots & c'_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & c'_{rr+1} & \dots & c'_{rn} & d_r \end{pmatrix}.$$

Ją atitinkanti sistema

$$c_{ii} y_i + \sum_{j=r+1}^n c'_{ij} y_j = d_i \quad (i=1, \dots, r)$$

ekvivalenti sistemai (S'), kartu ir sistemai (S).

Pastarosios sistemos sprendinį galime užrašyti iš karto, t. y.

$$y_i = c_{ii}^{-1} \left(d_i - \sum_{j=r+1}^n c'_{ij} t_{j-r} \right) \quad (i=1, \dots, r),$$

$$y_{r+k} = t_k \quad (t_k \in \mathbf{R}) \quad (k=1, \dots, n-r).$$

Kad gautume (S) sistemos sprendinį, užtenka grįžti prie senųjų žymėjimų

Pavyzdys. Išspręsimė sistemą

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 9,$$

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -11,$$

$$-3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 13,$$

$$-3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 11.$$

Užrašome išplėstąją sistemos matricą

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 4 & -6 & 9 & (1) \\ 2 & 4 & -5 & 3 & -11 & (1) \\ -3 & -5 & 6 & 1 & 13 & \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 11 & \end{array} \right) \downarrow \left(\begin{array}{c} (-2) \uparrow \\ (1) \uparrow \end{array} \right).$$

Atliekame jos eilučių elementariusius pertvarkius, kaip nurodyta schemeje,

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 4 & -6 & 9 \\ 0 & 8 & -13 & 15 & -29 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 11 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (-1) \downarrow \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} (3) \uparrow \\ (8) \uparrow \end{array} \right.$$

Atmetę nulinę eilutę ir sukeitę 2-ąją ir 3-ąją eilutes vietomis, gauname matricą

$$B' = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 4 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 29 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (3) \uparrow \\ (-2) \uparrow \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ (-2) \uparrow \\ (-5) \uparrow \end{array} \right.$$

Atlikę veiksmus, kaip nurodyta schemeje, gauname matricą

$$D = \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 0 & 0 & -72 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -147 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 29 & 1 \end{array} \right).$$

Pasinaudoję formulėmis, užrašome sistemos bendrąjį sprendinį:

$$x_1 = 1 + 24t, \quad x_2 = -2 - 49t, \quad x_3 = 1 - 29t, \quad x_4 = t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

arba $(1 + 24t, -2 - 49t, 1 - 29t, t)$; čia t – laisvai pasirinktas parametras.

§57. Parametrinių tiesinių lygčių sistemų sprendimas

Dažnai tenka spręsti tiesinių lygčių sistemas, kuriose kai kurie koeficientai arba laisvieji nariai yra ne konkretūs skaičiai, o laisvi kintamieji, vadinami parametrais. Sprendžiant parametrinių lygčių sistemas, pirmiausia, remiantis tiesinių lygčių sistemų suderintumo kriterijumi, reikia išsiaiškinti (jeigu iš anksto nežinoma), su kokiomis parametru reikšmėmis sistema yra suderinta, t. y. kada

$$\text{rang } A = \text{rang } B.$$

Išsiaiškinus, kada sistema yra suderinta, dar reikia nustatyti, su kokiomis parametru reikšmėmis ji apibrėžta, ir rasti visus sprendinius. Taigi teorija nesudėtinga, bet, praktiškai sprendžiant tokias sistemas, kartais iškyla daug sunkumų.

Išnagrinėkime sistemos

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = a,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 1,$$

$$x_1 + ax_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1,$$

$$ax_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1,$$

kurioje a yra parametras, sprendimą.

Sistemos išplėstąją matricą

$$B = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 4 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ (-1) \uparrow \\ \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ (-1) \downarrow \\ (-a) \downarrow \end{array} \right.$$

keičiame atlikdami nurodytus schemeje eilučių elementariusius pertvarkius, be to, gautoje matricoje pirmąją eilutę perkeliame į trečiąją vietą. Gauname matricą

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & a-1 \\ 0 & 1-a & 2-a & 3-4a & 1-a \end{array} \right) (1) \quad \left| \begin{array}{c} \downarrow \\ \left(-\frac{4-a}{3} \right) \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right|,$$

kurią vėl keičiame pagal nurodytą schemą ir gauname trapecinę matricą

$$B' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 5(1-a) & \frac{(1-a)(7-a)}{3} \end{array} \right).$$

Tiesinių lygčių sistema, kurios išplėstoji matrica yra B' , ekvivalenti pradinėi sistemai.

Reikia nagrinėti du atvejus.

1. Jeigu $a \neq 1$, tai $\text{rang } B = 4$, ir matricos iki brūkšnio rangas taip pat lygus 4. Todėl sistema apibrėžta. Jos sprendinį randame išsprendę sistemą

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1, \\ (a-1)x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 3x_3 - 3x_4 &= a-1, \\ 5(1-a)x_4 &= \frac{(1-a)(7-a)}{3}. \end{aligned}$$

Gauname

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{4a+2}{15}, \quad x_4 = \frac{7-a}{15}.$$

2. Jeigu $a = 1$, tai matrica B' yra šitokio pavidalo:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Joje 2-oji ir 3-oji eilutės proporcingos, todėl $\text{rang } B' = 2$.

Atmetę paskutinį stulpelį, taip pat gausime matricą, kurios rangas lygus 2. Todėl sistema suderinta. Jos sprendinį randame spęsdami sistemą

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1, \\ 2x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_1 &= 1 - t_1 - 5t_2, \quad x_2 = t_1, \quad x_3 = x_4 = t_2 \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

Taigi sistema yra suderinta su visomis parametro reikšmėmis. Be to, kai $a=1$, sistema neapibrėžta ir jos bendrasis sprendinys yra

$$(1 - t_1 - 5t_2, t_1, t_2, t_2) \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}),$$

o kai $a \neq 1$, sistema apibrėžta ir jos sprendinys yra

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4a+2}{15}, \frac{7-a}{15} \right).$$

Uždaviniai

Išspręskite parametrinių tiesinių lygčių sistemas.

27. $ax + by = a,$

$$x - y = b.$$

28. $a^2x - b^2y = a^2 + b^2,$

$$2a^2x + b(a-b)y = 3a^2 + b^2.$$

29. $x + y = a,$

$$x + z = b,$$

$$y + z = c.$$

30. $ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$

$$ax_1 + (1+b)x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 3,$$

$$(a-b)x_3 + 3x_4 = b,$$

$$2ax_1 + (2-b)x_2 - (a-b)x_3 + (a+b)x_4 = a-b.$$

31. $2x_1 + 2x_2 + (a+1)x_3 + (a+1)x_4 = 2b,$

$$x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = b,$$

$$x_1 + bx_2 + x_3 + x_4 = a,$$

$$(b+1)x_1 + (b+1)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2a.$$

32. $x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 3,$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 18,$$

$$-x_1 + 9x_2 + x_3 - ax_4 = 1-a.$$

Matricos ir determinantai

§58. Pagrindinės sąvokos

Su matricomis susipažinome nagrinėdami tiesinių lygčių sistemas. Tada išmokome atlikti matricų elementariuosius pertvarkius ir rasti jų rangus. Šiame skyriuje plačiau susipažinsime su matricų teorija.

Stačiakampę lentelę, sudarytą iš lauko L elementų, vadiname matrica (stačiakampe).

Matricas žymėsime didžiosiomis raidėmis. Stačiakampę lentelę apskliausime lenktais skliaustais

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Elementai a_{ik} vadinami *matricos elementais*. Indeksas ik rodo, kad tas elementas yra i -ojoje eilutėje ir k -ajame stulpelyje, t. y. i -osios eilutės ir k -ojo stulpelio sankirtoje. Vartojamas ir sutrumpintas lentelės užrašas: suskliaudžiamas tik elementas a_{ik} ir nurodoma, kokias reikšmes įgyja i ir k :

$$A = (a_{ik}) \quad (i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n).$$

Tuo atveju, kai m ir n , t. y. eilučių ir stulpelių skaičius, yra iš anksto fiksuoti, rašoma tiesiog

$$A = (a_{ik}).$$

Be šių žymėjimų, kur tai bus patogiu, vartosime dar vieną:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n);$$

čia $\alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ ($i=1, \dots, m$) – matricos i -oji eilutė, t. y. n -matis vektorius-eilutė, o

$$\beta_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \quad (k=1, \dots, n)$$

– matricos k -asis stulpelis, t. y. m -matis vektorius-stulpelis.

Taigi aiškiai matome, kad matrica yra m n -mačių vektorių-eilučių rinkinys arba n m -mačių vektorių-stulpelių rinkinys.

Kai matricoje A yra m eilučių ir n stulpelių, ji vadinama $[m \times n]$ eilės matrica. Matricos eilę žymėsime simboliu $\tau(A)$, t. y. $\tau(A) = [m \times n]$.

Pavyzdys.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 7 & 10 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = (2, 1, 3, 0), \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\tau(A) = [4 \times 3], \quad \tau(B) = [2 \times 5], \quad \tau(C) = [1 \times 4], \quad \tau(D) = [3 \times 1].$$

Lengva pastebėti, kad vektorius-eilutė $(a_1, \dots, a_n)$ yra $[1 \times n]$ eilės matrica, o vektorius-stulpelis

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

yra $[m \times 1]$ eilės matrica.

Matrica, kurios eilučių ir stulpelių skaičius yra vienodas (t. y. $m=n$), vadinama kvadratine n -osios eilės matrica. Matricos

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

yra atitinkamai 2-osios, 4-osios ir n -osios eilės kvadratinės matricos.

Kvadratinės matricos elementai $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ sudaro pagrindinę įstrižainę. Elementai $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ sudaro antrąją įstrižainę, vadinamą šalutine įstrižaine.

Matricoms, kaip ir vektoriams, įvedama transponavimo operacija. Jeigu matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eilutes transponuosime ir, nekeisdami jų tvarkos, vėl sudarysime matricą, tai gausime *transponuotąją matricą*

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kai $\tau(A)=[m \times n]$, tai, aišku, $\tau(A^T)=[n \times m]$.

Transponuojant kvadratinės matricos, pagrindinės įstrižainės elementai lieka savo vietose.

Pavyzdys. Jeigu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 19 \end{pmatrix}, \text{ tai } A^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 3 & 19 \end{pmatrix}.$$

Abiejų matricų pagrindinę įstrižainę sudaro skaičiai 2, 1, 0, 19.

Kvadratinė matrica, kurios elementai turi savybę

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

vadinama simetrine.

Kvadratinė matrica, kurios elementai turi savybę

$$a_{ik} = -a_{ki} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

vadinama antisimetrine.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad $a_{ii} = -a_{ii}$, kai $i=k$, o iš pastarųjų lygybių $-a_{ii}=0$ ($i=1, \dots, n$), t. y. antisimetrinės matricos pagrindinės įstrižainės elementai yra nuliai.

Pavyzdys. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

simetrinė, o matrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ -6 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

antisimetrinė.

Dvi vienodos eilės matricos vadinamos lygiomis, kai jų atitinkami elementai yra lygūs.

Tarkime, kad $A=(a_{ik})$, $B=(b_{ik})$ ir $\tau(A)=\tau(B)=[m \times n]$. $A=B$ tada ir tik tada, kai

$$a_{ik}=b_{ik} \quad (i=1, \dots, m, k=1, \dots, n).$$

Kai A yra simetrinė,

$$A^T=A.$$

Kita vertus, su kiekviena matrica A

$$(A^T)^T=A,$$

t. y. transponavę matricą du kartus, vėl gauname tą pačią matricą.

$[m \times n]$ eilės matrica, kurios visi elementai yra nuliai, vadinama $[m \times n]$ eilės nuline matrica arba tiesiog nuline matrica ir žymima O .

Kvadratinę n -osios eilės matricą, kurios pagrindinės įstrižainės elementai yra vienetai, o visi kiti elementai – nuliai, vadiname vienetine n -osios eilės matrica ir žymime E_n .

Pavyzdys.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ stulpelių}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\} n \text{ eilučių}$$

§59. Matricų sudėtis ir daugyba iš lauko elementų

Šiame paragrafe nagrinėsime vienodos eilės matricas, todėl jų eilės kiekvieną atvejį nenurodinsime.

Aibę $[m \times n]$ eilės matricų, kurių elementai yra lauko L elementai, žymėsime

$$\mathfrak{M}_{[m \times n]}(L) = \{ (a_{ik}) (i=1, \dots, m, k=1, \dots, n) \mid a_{ik} \in L \}.$$

Šios aibės elementų, t. y. matricų, lygybę jau esame apibrėžę. Dabar apibrėšime matricų sudėtis ir daugybos iš lauko L elementų veiksmus ir nustatysime tų veiksmų savybes.

Dviejų matricų $A=(a_{ik})$ ir $B=(b_{ik})$ suma vadiname matricą $C=(c_{ik})$, kurios kiekvienas elementas yra matricų A ir B atitinkamų elementų suma, t. y.

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \quad (i=1, \dots, m, k=1, \dots, n).$$

Pavyzdys. Apskaičiuokime $A+B$, kai

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 8 & 15 & -23 & -41 \end{pmatrix}.$$

Turime:

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+(-2) & 2+1 & 1+(-4) & 4+5 \\ 0+6 & -1+3 & 2+2 & -3+(-1) \\ 5+8 & 6+15 & -7+(-23) & 0+(-41) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 9 \\ 6 & 2 & 4 & -4 \\ 13 & 21 & -30 & -41 \end{pmatrix}.$$

Sakykime, kad $A=(a_{ik})$ yra matrica su elementais iš lauko L , o $l \in L$ – bet kuris lauko elementas.

Padauginti matricą A iš l – reiškia kiekvieną jos elementą padauginti iš l , t. y. $lA=(la_{ik})$.

Pavyzdys. Matricos

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

ir skaičiaus $l=\frac{1}{3}$ sandauga yra

$$lA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

Kokios šių veiksmų savybės? Matysime, kad jų savybės analogiškos n -mačių vektorių sudėties ir daugybos iš skaičiaus savybėms.

67 teorema. *Matricų aibė $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(L)$ yra uždara matricų sudėties ir daugybos iš lauko L elementų atžvilgiu.*

Irodymas. Kadangi yra teisingi teiginiai

$$(\forall a, b \in L) a+b \in L \quad \text{ir} \quad (\forall a \in L, l \in L) la \in L,$$

tai teisingi ir teiginiai

$$(\forall A, B \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{L})) \quad A + B \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{L}),$$

$$(\forall A \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{L}), l \in L) \quad lA \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{L}),$$

kurie reiškia teoremos tvirtinimą.

Matricų sudėties pagrindinės savybės išplaukia iš šios teoremos.

68 teorema. *Struktūra $(\mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{L}), +)$ yra komutatyvi grupė.*

Įrodymas. Užtenka įsitikinti, kad matricų sudėtis komutatyvi, asociatyvi, turi neutralųjį elementą ir kad kiekviena matrica turi simetrišką sudėties atžvilgiu matricą (priešingą).

Tarkime, kad $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ yra $[m \times n]$ eilės matricos, kurių elementai yra iš lauko L .

1. Kadangi teisingas teiginys

$$(\forall a, b \in L) \quad a + b = b + a,$$

tai $A + B = B + A$ – matricų sudėtis komutatyvi.

2. Kadangi teisingas teiginys

$$(\forall a, b, c \in L) \quad (a + b) + c = a + (b + c),$$

tai ir $(A + B) + C = A + (B + C)$ – matricų sudėtis asociatyvi.

3. Kadangi teisingas teiginys

$$(\forall a \in L) \quad a + 0_L = a,$$

tai, pažymėję $O = (0_L)$ $[m \times n]$ eilės matricą, kurios visi elementai yra lauko L nuliai, gauname teisingą teiginį:

$$(\forall A \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{L})) \quad A + O = O + A = A.$$

Tai rodo, kad nulinė matrica O yra matricų sudėties neutralusis elementas.

4. Paėmę lygtį $A + X = O$, kurioje X – $[m \times n]$ eilės matrica su nežinomaisiais elementais

$$X = (x_{ij}),$$

gauname $(a_{ij} + x_{ij}) = 0$ arba jai ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą $a_{ij} + x_{ij} = 0_L$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). Išsprendę šią sistemą, gauname

$$x_{ij} = -a_{ij} \in L \quad (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n).$$

Taigi

$$-A = (-a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{L}).$$

Teorema įrodyta.

Iš tų keturių savybių išplaukia, kad matricų sudėties savybės analogiškos komutatyviosios grupės 1–9 savybėms (žr. II skyr., § 27).

Matricų daugybos iš lauko L elementų savybės.

1. $(\forall A \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(L)) \quad 1_L \cdot A = A$; čia 1_L – lauko L vienetas.

Ši savybė išplaukia iš to, kad su kiekvienu $a \in L$, $1_L \cdot a = a$.

2. $(\forall A \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(L), \quad l \in L) \quad lA = Al$ – daugyba komutatyvi.

Savybė išplaukia iš lauko L daugybos komutatyvumo.

3. $(\forall A \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(L), \quad l, t \in L) \quad (lt)A = l(tA)$ – daugyba asociatyvi.

Ši savybė išplaukia iš lauko L daugybos asociatyvumo.

4. $(\forall A \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(L), \quad l, t \in L) \quad (l+t)A = lA + tA$ – daugyba iš lauko L elemento distributyvi lauko elementų sudėties atžvilgiu.

5. $(\forall A, B \in \mathfrak{M}_{[m \times n]}(L), \quad l \in L) \quad l(A+B) = lA + lB$ – daugyba distributyvi matricių sudėties atžvilgiu.

4 ir 5 savybės yra lauko L daugybos distributyvumo sudėties atžvilgiu išvados.

4 ir 5 savybes galima apibendrinti šitaip:

$$6. \quad a) \quad \left(\sum_{i=1}^k l_i \right) A = \sum_{i=1}^k l_i A,$$

$$b) \quad l \sum_{j=1}^s A_j = \sum_{j=1}^s lA_j,$$

$$c) \quad \left(\sum_{i=1}^k l_i \right) \left(\sum_{j=1}^s A_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s l_i A_j;$$

čia $l_1, \dots, l_k$ – lauko L elementai, $A_1, \dots, A_s$ – $[m \times n]$ eilės matricos su elementais iš lauko L .

Pastarosios lygybės įrodomos matematinės indukcijos metodu.

Kadangi išvardytos matricių sudėties ir matricių daugybos iš lauko elementų savybės yra analogiškos vektorių-eilučių sudėties ir daugybos iš skaičiaus savybėms, tai tuo atveju, kai L yra realiųjų skaičių laukas, visas tas savybes galime išreikšti šitaip.

Matriciai $A = (a_{ik})$ ($i = 1, \dots, m, \quad k = r, \dots, n$) priskirkime mn -matį vektorių-eilutę

$$\alpha_A = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}).$$

Tokia atitiktis yra abipus vienareikšmė, t. y. skirtingas $[m \times n]$ eilės matricas atitinka skirtingi mn -mačiai vektoriai-eilutės ir atvirkščiai.

Taigi $A \leftrightarrow \alpha_A$. Be to, $A+B \leftrightarrow \alpha_A + \alpha_B$, nes

$$\alpha_{A+B} = (a_{11} + b_{11}, \dots, a_{1n} + b_{1n}, \dots, a_{m1} + b_{m1}, \dots, a_{mn} + b_{mn})$$

ir $lA \leftrightarrow l\alpha_A$.

Todėl visos mn -mačių vektorių erdvės R^{mn} savybės būdingos ir matricių erdvei $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(R)$.

Priminsime, kad iš sudėties 4 savybės išplaukia, jog matricos atimamos pagal šitokią taisyklę:

$$B - A = B + (-A) = (b_{ij} - a_{ij}).$$

Uždaviniai

1. Raskite matricų

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 18 \\ 2 & 0 & -7 \\ -33 & 5 & 9 \\ 1 & -14 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 57 & -18 & 16 & 27 \\ 0 & -1 & 23 & 136 & -84 \\ -4 & 7 & -15 & 9 & 56 \\ 13 & 14 & 17 & 285 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 418 & 31 & 5 & 0 \\ 3 & 18 & -27 & 1 \\ -2 & 342 & 16 & -3 \\ 15 & -10 & -32 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 14 & -19 & 27 & -485 \end{pmatrix}$$

elementus $a_{23}, a_{44}, a_{53}, a_{63}, a_{25}, a_{11}, a_{34}, a_{51}$ ir nustatykite tų matricų eiles.

2. Raskite pirmojo uždavinio matricų transponuotąsias matricas.

3. Raskite kvadratinę matricų

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -14 & 23 \\ -6 & 5 & -3 \\ -9 & 19 & -27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & -5 & 2 \\ 7 & 18 & -17 & 3 & 0 \\ 0 & 29 & 0 & 1 & 1 \\ 13 & 14 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

pagrindinės ir šalutinės įstrižinės elementus. Transponuokite tas matricas ir išsiaiškinkite, ar jos yra simetrinės.

4. Užrašykite po vieną 2-osios, 3-osios, 4-osios, 5-osios ir 7-osios eilės simetrinių ir antisimetrinių matricų pavyzdį.

5. Duotos matricos:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -8 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 5 \\ -6 & 14 & 2 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$c) A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ -b & a & c \\ -c & b & -a \\ b & -c & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -a & -b & c \\ b & -a & -c \\ c & -b & a \\ -b & -c & -a \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuokite: 1) $(-1)A$, 2) $5A$, 3) $-3B$, 4) $A+B$, 5) $A-B$, 6) $4A+3B$, 7) $-7A-5B$.

6. Įrodykite:

$$a) (A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$b) (cA)^T = cA^T;$$

$$c) (c_1A + c_2B)^T = c_1A^T + c_2B^T;$$

čia c, c_1 ir c_2 – bet kokie skaičiai, o A ir B – vienodos eilės matricos.

7. Suformuluokite matricų sudėties savybes, atitinkančias komutatyviosios grupės 1–9 savybes (žr. II skyr., § 27). Įrodykite jas dviem būdais: 1) remdamiesi 68 teorema, 2) remdamiesi matricų sudėties apibrėžimu. Paaiškinkite, kuo šie įrodymai skiriasi.

8. Įrodykite šiuos teiginius:

$$a) 0_L \cdot A = O, b) I \cdot O = O, c) kA = \underbrace{A + \dots + A}_k, (-k)A = \underbrace{-A - \dots - A}_k;$$

čia 0_L – lauko nulis, O – nulinė matrica, A – bet kokia $[m \times n]$ eilės matrica, k – natūrinis skaičius.

9. Įrodykite suformuluotas matricų daugybos iš lauko elementų 6, a–c, savybes.

§60. Matricų daugyba ir jos savybės

Matricų sudėties ir daugybos iš lauko L elementų veiksmai paprastai apibrėžiami, lengvai atliekami ir turi įprastas savybes. Sudėtingesnis ir sunkiau išmokstamas matricų daugybos veiksmas. Todėl šį paragrafą reikia studijuoti ypač atidžiai.

Matricų daugybos prasmė išaiškės vėliau, nagrinėjant tiesinius operatorius, bazės keitimą ir kt. Dabar apibrėšime matricų daugybą bendriausiu atveju, išmoksime atlikti praktiškai ir išnagrinėsime jos savybes.

Jeigu $A=(a_{ij})$ yra $[m \times s]$ eilės matrica ir $B=(b_{jk})$ yra $[s \times n]$ eilės matrica, tai matricų A ir B sandauga vadinama $\tau(C)=[m \times n]$ eilės matrica $AB=C=(c_{ik})$, kurios kiekvienas elementas apskaičiuojamas iš formulės

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^s a_{ij} b_{jk} \quad (i=1, \dots, m, k=1, \dots, n). \quad (5.1)$$

Pavyzdys. Jeigu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

tai $\tau(A)=[3 \times 4]$, $\tau(B)=[4 \times 2]$, ir šias matricas galime sudauginti. Gausime matricą C , kuri bus $\tau(C)=[3 \times 2]$ eilės.

Formulė $c_{ik} = \sum_{j=1}^s a_{ij} b_{jk}$ reiškia: norint apskaičiuoti sandaugos AB elementą c_{ik} , esantį i -ojoje eilutėje ir k -ajame stulpelyje, reikia imti matricos A i -ąją eilutę ir matricos B k -ąjį stulpelį, sudauginti jų atitinkamus elementus ir gautąsias sandaugas sudėti.

Šiuo atveju nesunkiai gauname:

$$c_{11} = 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 = 11,$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8,$$

$$c_{21} = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = 4,$$

$$c_{22} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3,$$

$$c_{31} = 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = -6,$$

$$c_{32} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5.$$

Taigi

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Iš apibrėžimo aišku, kad sudauginti galima tik tokias dvi matricas, kurių pirmosios stulpelių skaičius lygus antrosios eilučių skaičiui. Todėl, jeigu A ir B yra tos pačios eilės kvadratinės matricos, tai jas galima sudauginti, t. y. apskaičiuoti sandaugą AB , taip pat ir sandaugą BA . Kvadratinėms n -osios eilės matricoms (5.1) formulė bus šitokia:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad (i, k = 1, \dots, n). \quad (5.2)$$

Kokias savybes turi matricų daugyba, taip pat matricų daugyba ir matricų sudėtis kartu?

69 teorema. *Kvadratinų n -osios eilės matricų su elementais iš lauko L aibė uždara matricų daugybos atžvilgiu.*

Irodymas. Jeigu $A=(a_{ij})$ ir $B=(b_{jk})$ yra kvadratinės n -osios eilės matricos ir $a_{ij} \in L$, $b_{jk} \in L$, tai

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \in L \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Taigi matricos AB elementai priklauso laukui L .

Matricų daugyba nekomutatyvi – yra tokių matricų A ir B , kurių

$$AB \neq BA.$$

Kad tuo įsitikintume, imkime matricas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ir apskaičiuokime AB ir BA . Gausime

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

t. y. $AB \neq BA$.

Tačiau yra ir tokių matricų, kurių $AB=BA$. Jas vadiname *komutuojančiomis*. Kadangi $AA=AA$, tai kiekviena matrica pati su savimi komutuoja.

70 teorema. *Su kiekviena kvadratine n -osios eilės matrica A teisinga lygybė*

$$AE_n = E_n A = A.$$

Šią savybę turi vienintelė matrica E_n .

Irodymas. Sakysime,

$$A = (a_{ij}), \quad E_n = (\delta_{jk});$$

čia

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Tada

$$AE_n = (c_{ik}), \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} \delta_{kk} = a_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Kita vertus,

$$E_n A = (d_{ik}), \quad d_{ik} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} a_{jk} = \delta_{ii} a_{ik} = a_{ik} \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Todėl $E_n A = AE_n = A$. Vadinasi, matrica E_n yra *vienetinis elementas* n -osios eilės kvadratinų matricų aibėje.

Irodysime, kad nėra kitos tokios matricos, kuri turėtų tą pačią savybę. Tarkime, kad tokia matrica yra $E = (e_{ij})$, t. y. $AE = EA = A$ su kiekviena matrica A . Fiksuokime s . Paėmę matricą $A = (a_{ik})$, kurioje tik $a_{ss} \neq 0$, o visi kiti elementai yra nuliai, iš lygybės $AE = A$ gausime

$$a_{sk} = \sum_{j=1}^n a_{sj} e_{jk} = \begin{cases} a_{ss} e_{sk} = 0, & s \neq k, \\ a_{ss} e_{ss} = a_{ss}, & s = k. \end{cases}$$

Todėl $e_{sk} = 0$, kai $s \neq k$ ir $e_{ss} = 1$.

Iš lygybės $EA = A$ gauname

$$a_{is} = \sum_{j=1}^n e_{ij} a_{js} = \begin{cases} e_{ss} a_{is} = 0, & i \neq s, \\ e_{ss} a_{ss} = a_{ss}, & i = s. \end{cases}$$

Todėl $e_{is} = 0$, kai $i \neq s$.

Imdami $s = 1, \dots, n$, matome, kad matricos E visi pagrindinės įstrižinės elementai yra vienetai, o visi kiti elementai – nuliai.

Vadinasi, tarę, kad galioja lygybė $AE = EA = A$ su kiekviena matrica A , įsitikinome, jog $E = E_n$.

Teisingas ir šitoks teiginys.

Su kiekviena $[m \times n]$ eilės matrica A teisingos lygybės

$$AE_n = A, \quad E_m A = A.$$

Teiginys įrodomas visiškai taip pat, kaip 70 teoremos pirmoji dalis.

70 teorema rodo, kad n -osios eilės kvadratinų matricų daugyba turi neutralųjį elementą – vienetinę matricą E_n . Jos antroji dalis reiškia, kad n -osios eilės kvadratinų matricų daugybos vienetinis elementas yra vienintelis.

71 teorema. *Matricų daugyba yra asociatyvi, t. y. su visomis n -osios eilės kvadratinėmis matricomis A, B ir C teisinga lygybė $(AB)C = A(BC)$.*

Irodymas. Kai

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{jl}), \quad C = (c_{lk}),$$

pažymėję $AB=(d_{il})$, $(AB)C=H=(h_{ik})$, pagal daugybos apibrėžimą gauname

$$d_{il} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jl},$$

$$h_{ik} = \sum_{l=1}^n d_{il} c_{lk} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} b_{jl} c_{lk}. \quad (5.3)$$

Pažymėję $BC=(g_{jk})$, $A(BC)=\tilde{H}=(\tilde{h}_{ik})$, analogiškai gauname

$$g_{jk} = \sum_{l=1}^n b_{jl} c_{lk},$$

$$\tilde{h}_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} g_{jk} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij} b_{jl} c_{lk}. \quad (5.4)$$

Iš (5.3) ir (5.4) lygybių $h_{ik}=\tilde{h}_{ik}$ ($i, k=1, \dots, n$), t. y. $H=\tilde{H}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

72 teorema. *Matricų daugyba ir sudėtis turi distributyvumo savybę, t. y. kad ir kokios būtų n -osios eilės kvadratinės matricos A, B ir C , yra teisingos lygybės $(A+B)C=AC+BC$, $C(A+B)=CA+CB$.*

Įrodymas. Jeigu $(A+B)C=D=(d_{ik})$ ir $AC+BC=H=(h_{ik})$, tai

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) c_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} c_{jk},$$

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij} c_{jk}.$$

Taigi $d_{ik}=h_{ik}$ ($i, k=1, \dots, n$), t. y. $D=H$.

Antrasis tvirtinimas įrodomas analogiškai.

Šios teoremos lengvai apibendrinamos: 71 teorema – bet kokiam baigtiniam dauginamųjų skaičiui, 72 teorema – bet kokiam baigtiniam dėmenų skaičiui. Taigi kelių matricų sandauga nepriklauso nuo dauginimo tvarkos, svarbu nesukeisti dauginamųjų vietomis. Be to, atliekant sudėtį ir daugybą, galima grupuoti dėmenis.

Įsitikinome, kad $(\mathfrak{M}_{[m \times n]}(L), +)$ yra komutatyvioji grupė, kad kvadratinų matricų daugyba asociatyvi ir turi distributyvumo savybę (71 ir 72 teoremos), be to, kvadratinų matricų daugyba turi neutralųjį elementą – vienetinę matricą. Taigi teisinga šitokia teorema.

73 teorema. *n-osios eilės kvadratinų matricų su elementais iš lauko L aibė yra žiedas su vienetu matricų sudėties ir daugybos atžvilgiu, t. y. algebrinės struktūros*

$$(\mathfrak{M}_{[n \times n]}(L), +, \cdot)$$

yra žiedai su vienetu.

Kadangi matricų daugyba nekomutatyvi, tai tie žiedai yra nekomutatyvūs. Pateiksime dar keletą matricų (nebūtinai kvadratinų) daugybos savybių.

74 teorema. *Matricų sandaugos transponuota matrica lygi transponuotų dauginamųjų matricų, paimtų atvirkščia tvarka, sandaugai, t. y.*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Irodymas. Šią teoremą įrodome bendruoju atveju, t. y. stačiakampėms matricoms. Tarkime, kad $A = (a_{ij})$ yra $[m \times s]$ eilės matrica ir $B = (b_{jk})$ yra $[s \times n]$ eilės matrica. Jeigu

$$(AB)^T = D = (d_{ik}) \quad \text{ir} \quad AB = C = (c_{ik}),$$

tai

$$d_{ik} = c_{ki} \quad (i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m).$$

Kadangi

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^s a_{kj} b_{ji},$$

tai ir

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^s b_{ji} a_{kj} \quad (i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m). \quad (5.5)$$

Matricas B^T ir A^T galima sudauginti, nes $\tau(B^T) = [n \times s]$, $\tau(A^T) = [s \times m]$.

Pažymėję $A^T = (\bar{a}_{jk})$, $B^T = (\bar{b}_{ij})$ ir $B^T A^T = H = (h_{ik})$, gauname $h_{ik} = \sum_{j=1}^s \bar{b}_{ij} \bar{a}_{jk}$.

Pagal transponavimo apibrėžimą

$$\bar{b}_{ij} = b_{ji}, \quad \bar{a}_{jk} = a_{kj}, \quad \text{t. y.} \quad h_{ik} = \sum_{j=1}^s b_{ji} a_{kj}. \quad (5.6)$$

(5.5) ir (5.6) lygybės rodo, kad $D = H$.

75 teorema. *Matricų sandaugos rangas ne didesnis už dauginamųjų rangus, t. y. $\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$.*

Irodymas. Jeigu $A = (a_{ij})$ ir $\tau(A) = [m \times s]$, $B = (b_{jk})$ ir $\tau(B) = [s \times n]$, tai

$$AB = (c_{ik}) \quad \text{ir} \quad \tau(AB) = [m \times n].$$

Pažymėkime $\text{rang}(AB)=r$, $\text{rang } A=r_A$, $\text{rang } B=r_B$. Kadangi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^s a_{ij} b_{jk} \quad (i=1, \dots, m, k=1, \dots, n),$$

tai

$$\begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s a_{1j} b_{jk} \\ \sum_{j=1}^s a_{2j} b_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^s a_{mj} b_{jk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^s b_{jk} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (k=1, \dots, n).$$

Ši lygybė reiškia, kad matricos AB stulpeliai yra matricos A stulpelių tiesinės kombinacijos. Kadangi matricos A rangas lygus r_A , o visi matricos AB stulpeliai yra matricos A stulpelių tiesinės kombinacijos, tai iš rango apibrėžimo ir 51 teoremos išplaukia, kad bet kurie r_A+1 matricos AB stulpeliai yra tiesiškai priklausomi. Todėl $r \leq r_A$.

Kadangi

$$\begin{aligned} (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}) &= \left(\sum_{j=1}^s a_{ij} b_{j1}, \sum_{j=1}^s a_{ij} b_{j2}, \dots, \sum_{j=1}^s a_{ij} b_{jn} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^s a_{ij} (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn}) \quad (i=1, \dots, m), \end{aligned}$$

tai matricos AB eilutės yra matricos B eilučių tiesinės kombinacijos. Todėl $r \leq r_B$.

Uždaviniai

10. Apskaičiuokite sandaugas AB ir BA , kai duotos matricos:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Apskaičiuokite sandaugas AB , kai duotos matricos

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = (1, -5, 3, 4)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Kvadratinės matricos pėdsaku vadinama jos pagrindinės įstrižinės elementų suma. Įrodykite, kad matricų AB ir BA pėdsakai lygūs.

13. Matricos A ir B simetrinės. Įrodykite, kad AB taip pat simetrinė, kai $AB=BA$.

14. Apskaičiuokite $A+BX+CX^2$, kai

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Raskite visas antrosios eilės kvadratinės matricas, kurių kvadratas yra nulinė matrica.

16. Raskite visas antrosios eilės matricas, kurių kvadratas yra vienetinė matrica.

17. Įrodykite, kad su bet kokiomis matricomis A, B, C teisinga lygybė $(AB)C=A(BC)$, jei tik $\tau(A)=[m \times s]$, $\tau(B)=[s \times k]$, $\tau(C)=[k \times n]$.

18. Įrodykite, kad su bet kokiomis matricomis A, B, C teisingos lygybės $(A+B)C=AC+BC$, $C(A+B)=CA+CB$, jei tik užrašytieji reiškiniai turi prasmę.

19. Įrodykite šiuos teiginius:

1) jeigu su kiekviena $[m \times n]$ eilės matrica A teisinga lygybė $EA=A$, tai

$$E=E_m.$$

2) jeigu su kiekviena $[m \times n]$ eilės matrica A teisinga lygybė $AE=A$, tai

$$E=E_n.$$

§61. Matricai atvirkštinės matricos egzistavimo sąlygos ir jos radimas

59 paragrafe nustatėme, kad kiekviena (kvadratinė) matrica turi priešingąją matricą – matricą, simetrišką sudėties atžvilgiu. Kokios kvadratinės matricos turi simetriškas daugybos atžvilgiu matricas, t. y. atvirkštines?

Kvadratinei matricai A atvirkštine matrica vadiname matricą A^{-1} , su kuria teisingos lygybės

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n.$$

Norint rasti matricai A atvirkštinę matricą A^{-1} , reikia spręsti lygtis

$$AX = E_n \quad \text{ir} \quad YA = E_n;$$

čia X, Y – nežinomos, tos pačios eilės kaip ir A , kvadratinės matricos. Jeigu tos lygtys turi sprendinių ir jie sutampa, tai matrica A turi atvirkštinę matricą A^{-1} , kuri yra tų lygčių sprendinys. Įrodinėjant, kad matrica A turi atvirkštinę, užtenka parodyti, kad šios lygtys turi sprendinių ir tie sprendiniai sutampa.

Nagrinėdami užrašytąsias lygtis, rasime sąlygą, kuriai esant matrica A turi atvirkštinę matricą. Kartu išsiaiškinsime, koku būdu randama matricos A atvirkštinė matrica.

Pirmiausia įrodysime šitokį teiginį.

Jeigu lygtis $AX = E_n$ turi sprendinį, tai ir lygtis $YA = E_n$ turi sprendinį; abiejų lygčių sprendiniai sutampa.

Įrodymas. Pažymėkime lygties $AX = E_n$ sprendinį A' . Lygtį

$$YA = E_n$$

padauginę iš dešinės iš A' , gauname

$$Y = A',$$

nes $AA' = E_n$, o $YE_n = Y$, $E_nA' = A'$.

Analogiškai galime įrodyti teiginį: *jeigu lygtis $YA = E_n$ turi sprendinį, tai ir lygtis $AX = E_n$ turi tą patį sprendinį.*

Iš viso to išplaukia, kad, ieškant kvadratinei matricai A atvirkštinės, užtenka spręsti vieną lygtį, pavyzdžiui, $AX = E_n$.

Nesunku įsitikinti, kad kai kurios matricos turi atvirkštinės.

Pavyzdys. 1) $E^{-1} = E$, nes $EE = E$;

2) matricai $D = (d_{ij})$,

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i \neq 0, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$$

atvirkštinė yra matrica

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Kokios matricos turi atvirkštinės matricas? Kaip susijęs atvirkštinės matricos egzistavimas su matricos rangu?

Kvadratinė n -osios eilės matrica A vadinama reguli trijja, jei $\text{rang} A = n$, ir singuliarijja, jei $\text{rang} A < n$.

Praeitame skyriuje įsitikinome, kad egzistuoja kvadratinės matricos, kurių rangas lygus matricos eilei, ir tokios kvadratinės matricos, kurių rangas mažesnis už matricos eilę. Taigi egzistuoja tiek regu iariosios, tiek ir singuliariosios matricos.

76 teorema. *Kad matrica A turėtų atvirkštinę, būtina ir pakanka, jog ji būtų reguliari.*

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, kad egzistuoja tokia matrica A^{-1} , jog $AA^{-1} = E$. Kadangi $\text{rang} E = n$, o $\text{rang} (AA^{-1}) \leq \text{rang} A$, tai $n = \text{rang} E \leq \text{rang} A$. Kvadratinės matricos rangas ne didesnis už matricos eilę, t. y. $\text{rang} A \leq n$. Iš šių nelygybių išplaukia, kad $\text{rang} A = n$, t. y. A – reguliarioji matrica.

Pakankamumas. Tare, kad $\text{rang} A = n$, $A = (a_{ij})$, $X = (x_{jk})$, lygtį $AX = E$ užrašome šitaip:

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j} x_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j} x_{jn} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j} x_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{2j} x_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{nj} x_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj} x_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remdamiesi matricų lygybės apibrėžimu, gauname n tiesinių lygčių sistemų su kintamaisiais $x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jk} &= 0 \quad (i \neq k, i = 1, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n a_{kj} x_{jk} &= 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (S_k)$$

Visos šios tiesinių lygčių sistemos turi bendrą matricą A . Kadangi $\text{rang} A = n$, tai pagal 65 teoremą kiekviena sistema (S_k) turi vienintelį sprendinį. Todėl ir lygtis $AX = E$ taip pat turi vienintelį sprendinį. Tą ir reikėjo įrodyti.

77 teorema. *Padauginus matricą B iš reguliariosios matricos, gaunama to paties rango matrica: jeigu A reguliari, tai*

- 1) $\text{rang} B = \text{rang} (AB)$,
- 2) $\text{rang} B = \text{rang} (BA)$.

Įrodymas. Įrodysime tik pirmąjį teiginį. Antrasis įrodomas analogiškai. Sakykime, B yra $[m \times n]$ eilės matrica, o A – n -osios eilės kvadratinė reguliari matrica. Lygybę $AB=C$ padauginę iš A^{-1} , gauname $B = A^{-1}C$. Tačiau $\text{rang}(AB) \leq \text{rang } B$ ir $\text{rang } B \leq \text{rang } C$. Šios nelygybės ir reiškia, kad $\text{rang}(AB) = \text{rang } B$.

Remiantis 77 teorema, lengvai išvedamas teiginys: *n -osios eilės reguliariųjų kvadratinųjų matricų aibė yra (nekomutatyvi) grupė daugybos atžvilgiu.*

Įrodymas. Pagal 77 teoremą reguliariųjų matricų sandauga yra reguliari. Todėl reguliariųjų matricų aibėje galima daugyba. Reikia patikrinti, ar tenkinamos grupės apibrėžimo aksiomos G.1–G.3.

G.1. Kadangi matricų daugyba asociatyvi, tai ir reguliariųjų matricų daugyba asociatyvi.

G.2. E_n – vienetinė matrica reguliari.

G.3. Jeigu A reguliari, tai yra tokia A^{-1} , kad $AA^{-1} = E_n$. Tačiau tada $(A^{-1})^{-1} = A$, o tai reiškia, kad A^{-1} – reguliarioji matrica.

Iš 76 teoremos įrodymo antrosios dalies paaiškėja, kaip galima apskaičiuoti matricai A atvirkštinę matricą. Pirmiausia reikia nustatyti, ar matrica A yra reguliari. Po to reikia sudaryti sistemas (S_k) ir jas išspręsti, o gautus sprendinius surašyti stulpeliais į matricą k didėjimo tvarka ($k=1, 2, \dots, n$). Tokiu būdu gauta matrica ir yra atvirkštinė duotajai.

Pavyzdys. Rasime matricai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę matricą A^{-1} .

Sprendimas. Sudarome sistemas (S_1), (S_2), (S_3):

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{21} - x_{31} &= 1, \\ -2x_{11} &+ x_{31} = 0, \end{aligned} \quad (S_1)$$

$$4x_{11} + 6x_{21} - x_{31} = 0;$$

$$\begin{aligned} 2x_{12} + 3x_{22} - x_{32} &= 0, \\ -2x_{12} &+ x_{32} = 1, \end{aligned} \quad (S_2)$$

$$4x_{12} + 6x_{22} - x_{32} = 0;$$

$$\begin{aligned} 2x_{13} + 3x_{23} - x_{33} &= 0, \\ -2x_{13} &+ x_{33} = 0, \end{aligned} \quad (S_3)$$

$$4x_{13} + 6x_{23} - x_{33} = 1.$$

Šias sistemas jų išplėstųjų matricų eilučių elementariaisiais pertvarkiais suvedame į įstrižainines. Kadangi visų trijų sistemų matrica vienoda, tai, kad nereikėtų atlikti daug veiksmų, visų sistemų laisvuosius narius surašome kartu, atskirdami juos brūkšniais, t. y. prie matricos A iš dešinės prirašome vienetinę matricą E_3 :

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}}_A \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_E \right) \begin{matrix} (1) \downarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} (-2) \downarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} (-1) \uparrow \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \uparrow \end{matrix}$$

Pastaba. Sistemų (S_1), (S_2), (S_3) nereikia rašyti. Čia jos išrašytos tik kad būtų aiškiau. Iš karto galima pradėti nuo antrojo žingsnio – gautąją matricą eilučių elementariaisiais pertvarkiais pakeisti taip, kad ji būtų šitokia:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array} \right).$$

Nuosekliai atlikę schemeje nurodytus veiksmus, gauname matricą

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Sudarome matricą

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Išnagrinėjus pavyzdį, bus lengvai suprantama ši teorema.

78 teorema. *Jei prie reguliariosios matricos*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

iš dešinės pusės prirašysime vienetinę matricą E_n , po to gautą matricą

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

eilučių elementariaisiais pertvarkiais pakeisime matricą

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array} \right),$$

tai matrica

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

bus atvirkštinė matricai A .

Įrodymas. Jeigu sistemos (S_k) elementariaisiais pertvarkiais pakeisime įstrižaininėmis, tai gausime joms ekvivalenčias sistemas

$$x_{ik} = c_{ik} \quad (i = 1, \dots, n)$$

su visais $k = 1, \dots, n$. Vadinasi, matrica (c_{ik}) yra lygties $AX = E$ sprendinys.

Įrodytoji teorema faktiškai kartu yra ir algoritmas kvadratinės matricos A atvirkštinei matricai A^{-1} rasti. Tas algoritmas gali būti užrašytas šitaip:

$$A | E_n \xrightarrow{\text{eilučių elementarieji pertvarkiai}} E_n | A^{-1}.$$

79 teorema. Jeigu matricos A ir B turi atvirkštines, tai jų sandauga AB irgi turi atvirkštinę; be to, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Įrodymas. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$. Matrica $B^{-1}A^{-1}$ yra lygties $(AB)X = E_n$ sprendinys, t. y. $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.

80 teorema. Jeigu matrica A turi atvirkštinę, tai jos transponuotoji matrica A^T irgi turi atvirkštinę, ir

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Įrodymas. Transponuokime abi lygybės

$$AA^{-1} = E$$

puses. Gausime lygybę

$$(A^{-1})^T A^T = E^T = E,$$

kuri ir reiškia teoremos tvirtinimą.

Trumpai aptarkime matricines lygtis

$$AX = B \quad \text{ir} \quad YA = B,$$

kai A, X, Y, B yra tos pačios eilės n kvadratinės matricos ir matrica A turi atvirkštinę (yra reguliari). Padauginę tas lygtis atitinkamai iš kairės ir iš dešinės iš matricos A^{-1} , gauname jų sprendinius:

$$X = A^{-1}B, \quad Y = BA^{-1}.$$

Tokių matricinių lygčių, kai egzistuoja A^{-1} , sprendiniai primena pirmojo laipsnio lygties $ax = b$, kai $a \neq 0$, sprendinį $x = ba^{-1} = a^{-1}b$.

§62. Tiesinių lygčių sistemos matricinė forma. Matricinės lygtys

Matricinėse lygtyse $AX = B$ ir $YA = B$ A, X, Y ir B nebūtinai turi būti kvadratinės n -osios eilės matricos. Pirmoji lygtis turi prasmę, kai $A = (a_{ij})$ yra $[m \times n]$ eilės, $X = (x_{jk})$ – $[n \times s]$ eilės ir $B = (b_{ik})$ – $[m \times s]$ eilės matricos. Antroji lygtis turi prasmę, kai $Y = (y_{ij})$ yra $[s \times m]$ eilės, A – $[m \times n]$ eilės ir B – $[s \times n]$ eilės matricos.

Sudarykime matricinę lygtį, kuri būtų ekvivalenti (t. y. turėtų tą patį sprendinį – vektorių-eilutę arba vektorių-stulpelį) tiesinių lygčių sistemai

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (S)$$

Tos sistemos matrica yra $A=(a_{ij})$ ir laisvųjų narių vektorius-stulpelis

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Pažymėję X kintamųjų vektorių-stulpelį, t. y.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ir pasinaudoję matricų daugybos ir jų lygybės apibrėžimais, sistemą (S) pakeičiame viena matricine lygtimi

$$AX = \beta. \quad (M)$$

Remdamiesi 74 teorema apie matricų sandaugos transponuotąją matricą, lygtį (M) galime užrašyti šitaip:

$$X^T A^T = \beta^T. \quad (M')$$

Taigi vietoj sistemos (S) gauname dvi matricines lygtis

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ir

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Lygčių sistema (S) ir matricinės lygtys (M) ir (M') yra ekvivalenčios – tai išplaukia iš matricų daugybos ir matricų lygybės apibrėžimo. Todėl vietoj tiesinių lygčių sistemos (S) galime nagrinėti matricinę lygtį (M) arba (M').

Tuo atveju, kai sistemos matrica yra reguliari kvadratinė n -osios eilės matrica, t. y. $m=n=\text{rang } A$, tiesinių lygčių sistemos sprendiniui rasti gauname gražią ir paprastą formulę.

81 teorema. Jei n tiesinių lygčių su n kintamųjų sistemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

matrica A yra reguliari, tai jos sprendinys $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ apskaičiuojamas pagal formules

$$X^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)(A^{-1})^T, \quad \text{arba} \quad X = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Įrodymas. Kadangi A yra reguliari matrica, tai egzistuoja jai atvirkštinė matrica A^{-1} ir transponuotajai atvirkštinė matrica $(A^{-1})^T$. Sistemai ekvivalenčios matricinės lygties $(x_1, x_2, \dots, x_n)A^T = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ abi puses padauginę iš dešinės iš matricos $(A^{-1})^T$, gauname

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m)(A^{-1})^T.$$

Lygties

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

abi puses padauginę iš kairės iš matricos A^{-1} , gauname

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys. Išspręskime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ -2x_1 &+ x_3 = -7, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Remkimės ką tik įrodyta teorema. Sistemos matricai atvirkštinę matricą esame apskaičiavę:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Todėl sprendinys yra

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reikia pažymėti, kad naudotis šiomis formulėmis patogų tik iš anksto žinant atvirkštinę matricą. Bendroju atveju sistemos sprendinio ieškoti Gauso metodu paprasčiau negu skaičiuojant atvirkštinę matricą. Šios formulės efektyvios tada, kai tenka spręsti daug lygčių sistemų, kurios turi tą pačią reguliariąją sistemos matricą ir skiriasi tik laisvaisiais nariais. Be to, šios formulės naudojamos teoriniams tyrimams.

Tuo atveju, kai tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (S)$$

yra suderinta ir $\text{rang} A = r < n$, vietoj matricinių lygčių (M) ir (M') galime gauti šiek tiek kitokias lygtis.

Kadangi sistemos (S) rangas lygus r , tai jos matricoje A yra r nepriklausomų eilučių ir r nepriklausomų stulpelių. Jeigu reikia, tai galime pakeisti kintamųjų numeraciją ir lygčių tvarką ir pasiekti, kad pirmieji r stulpelių ir pirmosios r eilučių būtų tiesiškai nepriklausomi. Atmetę paskutines $n-r$ lygčių, kurios yra pirmųjų r lygčių tiesinės kombinacijos, gauname sistemai (S) ekvivalentią sistemą

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} x_j = b_i - \sum_{k=1}^{n-r} a_{ir+k} x_{r+k} \quad (i = 1, \dots, r)$$

arba, pažymėję

$$b'_i = b_i - \sum_{k=1}^{n-r} a_{ir+k} x_{r+k},$$

gauname sistemą

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} x_j = b'_i \quad (i = 1, \dots, r),$$

kurios matrica

$$A_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

yra reguliari.

Tada su kiekvienu konkrečiu skaičių $x_{r+1}, \dots, x_n$ rinkiniu gauname sistemą, kuri tenkina 81 teoremos sąlygas ir kurios sprendinys išreiškiamas tomis pačiomis formulėmis. Todėl sistemos (S) sprendinys yra

$$(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_{n-r});$$

čia $t_1, \dots, t_{n-r}$ — laisvi kintamieji, o

$$(x_1, \dots, x_r) = (b'_1, \dots, b'_r) (A_r^{-1})^T. \quad (R)$$

Pavyzdys. Iškime sistemą

$$\begin{aligned} 4x_1 + 9x_2 - x_3 + 5x_4 &= 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 &= -7, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 &= 9. \end{aligned}$$

Jos išplėstojoje matricioje

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 9 & -1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & -1 & 2 & 9 \end{array} \right)$$

iš pirmosios eilutės atėmę visų kitų eilučių sumą, gauname matricą

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & -1 & 2 & 9 \end{array} \right).$$

Todėl pradinė lygčių sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 - x_4, \\ -2x_1 + x_3 &= -7 - 2x_4, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 9 - 2x_4, \end{aligned}$$

kurios matricai

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę matricą jau žinome:

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pasinaudoję išraiška (R), gauname

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-t \\ -7-2t \\ 9-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+t \\ -\frac{2}{3}-t \\ -1 \end{pmatrix}$$

ir $x_4 = t$, t. y.

$$\left(3+t, -\frac{2}{3}-t, -1, t \right) (t \in \mathbf{R})$$

yra sistemos sprendinys.

Paragrafo pradžioje matėme, kad matricinėje lygtyje

$$AX=B$$

matricos gali būti: $A=(a_{ij})$, $\tau(A)=[m \times n]$, $X=(x_{jk})$, $\tau(X)=[n \times s]$, $B=(b_{ik})$, $\tau(B)=[m \times s]$. Matricinė lygtis ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jk} = b_{ik}, \quad i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, s,$$

turinčiai ms lygčių ir ns kintamųjų x_{jk} , $j=1, \dots, n$, $k=1, \dots, s$. Akivaizdu, kad šios ms lygčių suskyla į s sistemų

$$\bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{jk} = b_{ik} \right), \quad (S_k)$$

turinčių tą pačią matricą A , kintamuosius $x_{1k}, \dots, x_{nk}$ ir laisvuosius narius $b_{1k}, \dots, b_{mk}$, kurie yra matricos B k -ojo stulpelio elementai ($k=1, 2, \dots, s$). Aišku, kad kiekviena sistema (S_k) gali būti užrašyta matricine lygtimi

$$A \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} \quad (k=1, \dots, s). \quad (M_k)$$

Matricinė lygtis $AX=B$ turės sprendinių, kai kiekviena iš lygčių sistemų (S_k) (atitinkamai (M_k)) bus suderinta; sprendinių neturės, kai bent viena iš tų sistemų bus nesuderinta.

Iš viso to išplaukia matricinės lygties sprendimo būdas — *reikia sudaryti sistemas (S_k) ir jas spręsti*.

Analogiškai matricinė lygtis

$$YA=B,$$

kai $Y=(y_{ij})$, $\tau(Y)=[s \times m]$, $A=(a_{jk})$, $\tau(A)=[m \times n]$, $B=(b_{ik})$, $\tau(B)=[s \times n]$, ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai, turinčiai sn lygčių ir sm kintamųjų y_{ij} ($i=1, \dots, s$, $j=1, \dots, m$). Aišku, kad ta sistema suskyla į s sistemų

$$\bigwedge_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m y_{ij} a_{jk} = b_{ik} \right), \quad (S_i)$$

kurias galima užrašyti matricine forma

$$(y_{i1}, \dots, y_{im})A = (b_{i1}, \dots, b_{in}) \quad (i=1, \dots, s)$$

ir kurių kintamieji yra matricos Y i -oji eilutė. Iš to išplaukia, kad lygtis $YA=B$ turės sprendinį tik tada, kai visos sistemos (S_i) bus suderintos, ir neturės sprendinio, kai bent viena iš jų bus nesuderinta. Sprendžiant matricinę lygtį, reikės spręsti visas sistemas (S_i) .

Uždaviniai

20. Naudodamiesi 78 teoremoje pateiktu metodu, raskite matricas, atvirkštines šioms matricoms:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}$;
 d) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & -7 & -1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;
 g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

21. Apskaičiuokite (tuo pačiu būdu kaip ir 20 uždavinyje) matricas, atvirkštines n -osios eilės matricoms:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
 c) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$, $a_i \neq 0$ ($i=1, \dots, n$);
 d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & \dots & a \\ a & a & 0 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ($a \neq 0$).

22. Kvadratinė matrica A vadinama ortogonalia, jei $A^T = A^{-1}$. Įrodykite, kad dviejų arba kelių ortogonalų matricų sandauga yra ortogonalioji matrica.

23. Įrodykite, kad įstrižaininė matrica

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

yra ortogonalioji tik tada, kai $d_i = \pm 1$ ($i=1, \dots, n$).

24. Išsprendite matricines lygtis $AX=B$ ir $YA=B$, kai:

- a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;
 b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$;
 c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$;
 d) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

25. Naudodamiesi 20 uždavinio sprendiniais, išspręskite šias tiesinių lygčių sistemas:

- a) $x_1 - 4x_2 = 18$, $x_1 - x_2 = 3$,
 $-3x_1 + 9x_2 = -15$; $3x_1 + 4x_2 = -5$;
- c) $-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 13$, d) $x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$,
 $3x_1 + 3x_2 + x_3 = -7$, $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11$,
 $7x_1 - 7x_2 - x_3 = 5$; $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -15$;
- e) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$,
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -5$,
 $-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -13$,
 $-2x_1 - 2x_2 - x_3 = 7$.

§63. Elementariosios matricos

Šiame paragrafe stengsimės išaiškinti tai, kad stačiakampių matricų elementarieji pertvarkiai yra ne kas kita, kaip tų matricų daugyba iš specialiai parinktų kvadratinų matricų, vadinamų elementariosiomis.

Elementariosiomis vadiname matricas, kurios gaunamos iš vienetinės matricos E_n , atlikus su jos eilutėmis vieną iš elementariųjų pertvarkių.

Pertvarkydami eilutes, gauname trijų tipų elementariasias matricas:

1. Matricoje E_n sukeitę vietomis l -ąją ir s -ąją ($l < s$) eilutes, gauname matricą, kurią žymėsime $E_{n,ls}$;
2. Matricos E_n eilutes padauginę iš skaičių $c_1, \dots, c_n$, $c_j \neq 0$ ($j=1, \dots, n$), gauname matricą, kurią atitinkamai žymėsime $E(c_1, \dots, c_n)$;
3. Prie matricos E_n l -osios eilutės pridėję jos s -ąją eilutę, padaugintą iš skaičiaus c ($l \neq s$), gauname matricą, kurią žymėsime $E_{n,ls}(c)$.

Pavyzdžiai.

$$E(c_1, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix},$$

$$E_{4,13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{5,24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{4,23}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{5,31}(-7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kai A yra $[m \times n]$ eilės matrica, teisingi šitokie tvirtinimai:

1) $AE_{n,ls}$ yra matrica, gauta iš matricos A , sukeitus vietomis l -ąją ir s -ąją stulpelius;

2) $AE(c_1, \dots, c_n)$ yra matrica, gauta iš matricos A , padauginus j -ąją stulpelį iš $c_j \neq 0$ ($j=1, \dots, n$);

3) $AE_{n,ls}(c)$ yra matrica, gauta iš matricos A , prie s -ojo stulpelio pridėjus l -ąją stulpelį, padauginantį iš c .

Įrodykime pirmąjį ir trečiąjį teiginius, nes antrasis akivaizdus. Tarkime, kad $A=(a_{ij})$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$). Pažymėkime $E_{n,ls}=(e_{jk})$. Tada $e_{ls}=e_{sl}=1$, $e_{kk}=1$ ($k \neq l, k \neq s$). Visi kiti šios matricos elementai lygūs nuliui. Kadangi sandaugos $AE_{n,ls}$ elementas c_{ik} apskaičiuojamas pagal formulę

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_{jk} \quad (i=1, \dots, m; k=1, \dots, n),$$

tai $c_{ik}=a_{ik}$, kai $k \neq l, k \neq s$; $c_{il}=a_{ls}$, $c_{ls}=a_{ll}$. Tai įrodo pirmąjį tvirtinimą.

Įrodysime trečiąjį tvirtinimą. Pažymėkime E_{ls} -osios eilės matricą, kurios visi elementai lygūs nuliui, išskyrus vieną, esantį l -ojoje eilutėje ir s -ajame stulpelyje; pastarasis lygus vienetui. Tada $AE_{ls}=(O, \dots, O, \beta_l, O, \dots, O)$; čia β_l – matricos A l -asis stulpelis ir jis yra s -ojoje vietoje, visi kiti stulpeliai – nuliniai. Kadangi $E_{n,ls}(c)=E_n+cE_{ls}$, $AE_{n,ls}(c)=AE_n+cAE_{ls}$, tai iš to ir išplaukia trečiasis tvirtinimas.

Kai $[m \times n]$ eilės matrica dauginama iš kairės iš elementariųjų m -osios eilės matricų, yra teisingi analogiški teiginiai apie eilutes.

Iš viso to galima daryti išvadą, kad matricos eilučių (stulpelių) elementariųjų pertvarkių seką galima pakeisti daugyba iš atitinkamų elementariųjų matricų sekų iš kairės (iš dešinės).

Elementariosios matricos yra reguliarios ir

$$E_{n,ls}^{-1}=E_{n,ls}, \quad (E(c_1, \dots, c_n))^{-1}=E(c_1^{-1}, \dots, c_n^{-1}),$$

kai $c_j \neq 0$ ($j=1, \dots, n$),

$$(E_{n,ls}(c))^{-1}=E_{n,ls}(-c),$$

kai $l \neq s$.

Visi šie teiginiai išplaukia iš atitinkamų elementariųjų matricų ir atvirkštinės matricos apibrėžimų.

Naudodamiesi elementariosiomis matricomis ir 63 teorema, įsitikiname, kad teisingas šitoks teiginys.

Kiekvieną $[m \times n]$ eilės matricą A , kurios rangas lygus r , galima išreikšti šitaip:

$$A=UI_rV;$$

čia U – reguliarioji m -osios eilės matrica, V – reguliarioji n -osios eilės matrica, o I_r – šitokia $[m \times n]$ eilės matrica:

$$I_r = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \Bigg\} r.$$

Pagal 63 teoremą elementariaisiais pertvarkiais matricai A galima suteikti pavidalą I_r . Matricai I_r pavidalą A galima suteikti atliekant atvirkštinius elementariusius pertvarkius. Tuo būdu išsiaiškinsime, kad matricos U ir V yra atitinkamai m -osios ir n -osios eilės elementariųjų matricų sandaugos – taigi reguliariosios matricos.

Iš čia taip pat išplaukia išvada, kad kiekviena reguliarioji n -osios eilės matrica yra elementariųjų n -osios eilės matricų sandauga. Tai nesunkiai gauname paėmę $m=n=r$ ir užrašę išraišką $A = UE_n V$.

§64. Keitiniai

Įvairiose matematikos srityse – algebroje, matematinėje analizėje, diferencialinių lygčių teorijoje ir kitose, be pačių matricų, yra labai svarbi tam tikras savybes turinti matricų funkcija, vadinama *determinantu*. Jį toliau ir nagrinėsime: susipažinsime su vienu determinanto apibrėžimo būdu – Leibnico apibrėžimu (G. W. Leibniz, 1646–1716, vokiečių matematikas), su determinanto savybėmis ir skaičiavimo būdais, taip pat su jo taikymais tiesinių lygčių sistemoms spręsti, matricos rangui bei atvirkštinei matricai rasti.

Nagrinėjant determinantus, reikės remtis keitiniais.

Pirmajame skyriuje nagrinėjome kėlinius: kėliniu iš n elementų vadinome kiekvieną aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ sutvarkymą $k_1, k_2, \dots, k_n$; įrodėme, kad skirtingų kėlinių iš n elementų yra $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

n elementų aibės bijekciją į save vadiname n -ojo laipsnio keitiniu.

Keitinį galime nusakyti nurodydami, kokį skaičių m_i reikia įrašyti kėlinyje $k_1, k_2, \dots, k_n$ skaičiaus k_i vietoje; naująjį skaičių m_i patogiau rašyti po tuo skaičiumi k_i , kurio vietą jis turi užimti. Tokiu būdu gauname kėlinių dvejetą

$$\begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \dots, & k_n \\ m_1, & m_2, & \dots, & m_n \end{pmatrix},$$

kuris ir apibrėžia n -ojo laipsnio keitinį. Toks kėlinių dvejetas, apibrėžiantis n -ojo laipsnio keitinį, toliau taip pat vadinamas n -ojo laipsnio keitiniu.

Pavyzdžiai.

$$\begin{pmatrix} 1, 3, 2 \\ 3, 2, 1 \end{pmatrix} \text{ yra 3-ojo laipsnio keitinys;}$$

$$\begin{pmatrix} 1, 7, 3, 5, 4, 6, 2 \\ 3, 2, 1, 7, 6, 5, 4 \end{pmatrix} - 7-ojo laipsnio keitinys.$$

Kadangi keitinys yra bijekcija, tai jį visiškai nusako skaičių dvejetaini

$$\begin{pmatrix} k_i \\ m_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Todėl keitinių lygybę apibrėžiame šitaip.

Du n -ojo laipsnio keitiniai

$$\begin{pmatrix} k_1, k_2, \dots, k_n \\ m_1, m_2, \dots, m_n \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} u_1, u_2, \dots, u_n \\ v_1, v_2, \dots, v_n \end{pmatrix}$$

yra lygūs, jei kiekvienam pirmojo keitinio dvejetaini

$$\begin{pmatrix} k_i \\ m_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n)$$

randamas toks dvejetas $\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}$, kad $k_i = u_j$, $m_i = v_j$.

Pavyzdys. Keitiniai

$$\begin{pmatrix} 1, 3, 5, 4, 2 \\ 5, 3, 2, 1, 4 \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} 3, 5, 2, 4, 1 \\ 3, 2, 4, 1, 5 \end{pmatrix}$$

yra lygūs.

Remdamiesi keitinių lygybės apibrėžimu, kiekvieną keitinį galime užrašyti šitaip:

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{pmatrix};$$

čia pirmoji eilutė yra skaičių $1, 2, \dots, n$ eilutė.

Pavyzdys.

$$\begin{pmatrix} 1, 3, 5, 4, 2 \\ 5, 3, 2, 1, 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5, 4, 3, 1, 2 \end{pmatrix}.$$

Kiekvieną n -ojo laipsnio keitinį galime užrašyti $n!$ skirtingų būdų: skirtingų užrašymo būdų yra tiek, kiek yra kėlinių iš n pirmosios eilutės elementų. Kita vertus, tarp keitinių su pirmąja eilute $1, 2, \dots, n$ skirtingi bus tik tie, kuriuose bus skirtingos antrosios eilutės. Todėl *skirtingų n -ojo laipsnio keitinių yra $n!$*

Pavyzdys. Yra 2 skirtingi antrojo laipsnio keitiniai:

$$\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix},$$

6 skirtingi trečiojo laipsnio keitiniai:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}.$$

n -ojo laipsnio keitinių aibę žymėsime P_n . Šioje aibėje apibrėšime veiksmą, vadinamą keitinių daugyba.

Keitinių

$$\begin{pmatrix} k_1, & \dots, & k_n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ s_1, & \dots, & s_n \end{pmatrix}$$

sandauga vadinamas keitinys

$$\begin{pmatrix} k_1, & \dots, & k_n \\ s_1, & \dots, & s_n \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 3, & 2 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}.$$

Remiantis šiuo apibrėžimu, galima sudauginti bet kuriuos du n -ojo laipsnio keitinius

$$\begin{pmatrix} k_1, & \dots, & k_n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1, & \dots, & u_n \\ v_1, & \dots, & v_n \end{pmatrix}.$$

Naudodamiesi lygybės apibrėžimu, antrąjį keitinį užrašome šitaip:

$$\begin{pmatrix} u_1, & \dots, & u_n \\ v_1, & \dots, & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ s_1, & \dots, & s_n \end{pmatrix},$$

po to sandaugą randame pagal apibrėžimą.

Pavyzdys.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 5, & 1, & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 4, & 3, & 2, & 5, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 5, & 1, & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2, & 3, & 5, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & 1, & 4, & 5 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 2, & 1, & 4, & 5 \end{pmatrix}.$$

Keitinių daugybos savybės.

1. Kai $n \geq 3$, n -ojo laipsnio keitinių daugyba yra nekomutatyvi.

Kad tai įrodytume, tik ką sudaugintus keitinius dauginame sukeitę dauginamųjų tvarką. Gauname keitinį

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 4, & 3, & 2, & 5, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 5, & 1, & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 5, & 3, & 4, & 2 \end{pmatrix},$$

nelygų keitiniai

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 2, & 1, & 4, & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Keitinių daugyba asociatyvi: jeigu M , U , V yra n -ojo laipsnio keitiniai, tai $(MU)V = M(UV)$.

Sakykime,

$$M = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ u_1, & \dots, & u_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} u_1, & \dots, & u_n \\ v_1, & \dots, & v_n \end{pmatrix}.$$

Tada

$$(MU)V = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ u_1, & \dots, & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1, & \dots, & u_n \\ v_1, & \dots, & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ v_1, & \dots, & v_n \end{pmatrix},$$

ir

$$M(UV) = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ v_1, & \dots, & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ v_1, & \dots, & v_n \end{pmatrix}.$$

3. Kiekvieną keitinį padauginę iš bet kurios pusės iš keitinio

$$I = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ 1, & 2, & \dots, & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix},$$

gausime keitinį, lygų pradiniam.

Iš tikrųjų

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ 1, & 2, & \dots, & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ m_1, & m_2, & \dots, & m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ m_1, & m_2, & \dots, & m_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Keitinį I vadiname vienetiniu, arba tapačiuoju, keitiniu.

4. Kiekvienam n -ojo laipsnio keitiniui galima sudaryti atvirkštinį keitinį, t. y.

$$(\forall M \in P_n) (\exists M^{-1} \in P_n) \quad MM^{-1} = M^{-1}M = I.$$

Iš tikrųjų

$$\begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ 1, & \dots, & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ 1, & \dots, & n \end{pmatrix},$$

ir

$$\begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ 1, & \dots, & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1, & \dots, & m_n \\ m_1, & \dots, & m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ 1, & \dots, & n \end{pmatrix}.$$

Iš keitinių daugybos 1–4 savybių išplaukia, kad *algebrinė struktūra* $(P_n, \cdot)$ yra *nekomutatyvi grupė*.

Tai n -ojo laipsnio keitinių grupė. Ji dažnai vadinama n -ojo laipsnio *simetrine grupe* ir žymima σ_n . Kadangi n čia bet koks natūrinis skaičius, tai yra be galo daug baigtinių nekomutatyvių grupių, kurių bazinės aibės P_n turi 1, 2, 6, 24, ..., $n!$, ... elementų.

Nesunku pastebėti, kad apibrėžtoji keitinių daugyba yra tų keitinių nuoseklus atlikimas.

Kiekvieną n -ojo laipsnio keitinį galima išreikšti paprastesnių keitinių, vadinamų *ciklais*, sandauga.

Pirmiausia išaiškinsime ciklo sąvoką. Kiekvienas keitinyš arba visus elementus pakeičia kitais, arba pakeičia tik kai kuriuos, o kitus palieka savo vietose.

Pavyzdžiui, keitinyš

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 3, 2, 1, 4, 6, 7, 5 \end{pmatrix}$$

palieka savo vietose tiksliai 2 ir 4, o visų kitų elementų vietas pakeičia. Keitimo procesą šiuo atveju galime atlikti taip: 1 keičiame į 3, o 3 – į 1. Šią keitinio dalį žymime (1, 3). Po to keičiame 5 į 6, 6 į 7, 7 į 5. Šią keitinio dalį užrašome (5, 6, 7). Prisiminę, kad keitinių daugyba reiškia nuosekliai atliekamus keitinius, galime užrašyti

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ 3, 2, 1, 4, 6, 7, 5 \end{pmatrix} = (1, 3)(2)(4)(5, 6, 7).$$

Užrašai (2) ir (4) reiškia, kad 2 ir 4 lieka savo vietose.

(i, j, k, ..., s) pavidalo keitiniai, kurie reiškia, kad į elemento i vietą reikia įrašyti j, į j vietą – k ir t. t., į s vietą – i ($i \neq j \neq \dots \neq s$), vadinami ciklais. Du ciklai, neturintys bendrų elementų, vadinami nepriklausomais.

Kiekvieną n -ojo laipsnio keitinį galima išreikšti nepriklausomų ciklų sandauga.

Keitinyje

$$\begin{pmatrix} k_1, k_2, \dots, k_n \\ m_1, m_2, \dots, m_n \end{pmatrix}$$

imame elementą k_1 . Jei $m_1 = k_1$, tai gauname ciklą (k_1) iš vieno elemento ir nagrinėjame k_2 . Jei $m_1 \neq k_1$, tai pirmojoje eilutėje randame $k_i = m_1$ ir žiūrime m_i . Jei $m_i = k_1$, tai ciklas (k_1, m_1) uždarytas. Jei $m_i \neq k_1$, tai pirmoje eilutėje randame $k_j = m_i$ ir žiūrime m_j . Jei $m_j = k_1$, ciklą (k_1, m_1, m_i) uždaramė, o jei $m_j \neq k_1$, procesą tęsiame.

Po baigtinio žingsnių skaičiaus gausime ne daugiau kaip n ciklų, neturinčių bendrų elementų.

Be abejo, (i) pavidalo ciklus galime praleisti. Tada nagrinėtame pavyzdyje rašysime: $(1, 3) (2) (4) (5, 6, 7) = (1, 3) (5, 6, 7)$.

Ciklą iš dviejų elementų (i, j) vadiname transpozicija.

Kitaip tariant, transpozicija reiškia dviejų elementų i ir j sukeitimą vietomis kėlinyje.

Pavyzdžiui, kėlinį $(1, 3, 4, 6, 5, 2)$ transpozicija $(4, 5)$ atvaizduojame į kėlinį $(1, 3, 5, 6, 4, 2)$.

Iki šiol nagrinėjome n -ojo laipsnio keitinių aibę P_n daugybos veiksmo savybių požiūriu. Determinanto sąvokai aiškinti reikalingos kitokios keitinių savybės.

Sakysime, kad skaičiai k_i ir k_j sudaro *inversiją* (netvarką) kėlinyje

$$k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots, k_n,$$

jei $k_i > k_j$, o k_i yra prieš k_j . Kėlinio $k_1, \dots, k_n$ *inversijų* skaičių žymėsime $I(k_1, \dots, k_n)$.

Pavyzdžiai. 1. Kėlinyje $(3, 2, 1, 6, 5, 4)$ yra 6 inversijos:

$$32, 31, 21, 65, 64, 54.$$

Taigi

$$I(3, 2, 1, 6, 5, 4) = 6.$$

2. Kėlinyje $n, (n-1), \dots, 3, 2, 1$ yra $n(n-1)/2$ inversijų. Skaičius n yra prieš $n-1$ mažesnių skaičių, todėl sudaro $n-1$ inversiją,

skaičius $n-1$ sudaro $n-2$ inversijas

$$\begin{array}{ccccccc} & & n-2 & & n-3 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 3 & & 2 & & \\ & & 2 & & 1 & & \text{inversiją} \end{array}$$

Iš viso

$$I(n, n-1, \dots, 2, 1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Kėlinys $k_1, \dots, k_n$ vadinamas *lyginiu*, jei $I(k_1, \dots, k_n)$ yra lyginis, ir *nelyginiu*, jei $I(k_1, \dots, k_n)$ yra nelyginis. Skaičius $(-1)^{I(k_1, \dots, k_n)}$ vadinamas kėlinio ženklu ir žymimas

$$\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) = (-1)^{I(k_1, \dots, k_n)}.$$

82 teorema. Dviejų kėlinio elementų sukeitimas vietomis keičia kėlinio ženklą.

Irodymas. Jeigu k_i ir k_j yra šalia vienas kito, t. y. turime kėlinį

$$k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_j, k_{j+1}, \dots, k_n \quad (j = i + 1),$$

ta, sukeitę vietomis k_i ir k_j , gauname kėlinį

$$k_1, \dots, k_{i-1}, k_j, k_i, k_{j+1}, \dots, k_n.$$

Elementų k_i ir k_j padėtis kitų elementų atžvilgiu nepasikeitė. Todėl nepasikeitė ir skaičius inversijų, kurias jie sudarė su kitais elementais. Jei $k_i > k_j$, tai antrajame kėlinyje yra viena inversija mažiau. Jei $k_i < k_j$, tai antrajame kėlinyje yra viena inversija daugiau. Abiem atvejais

$$\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_n) = -\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_{i-1}, k_j, k_i, k_{j+1}, \dots, k_n).$$

Jei k_i ir k_j nėra gretimi elementai, t. y. jei turime kėlinį

$$k_1, \dots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_{j-1}, k_j, k_{j+1}, \dots, k_n,$$

tai elementus k_i ir k_j galime sukeisti vietomis šitaip: k_j sukeičiame vietomis su $k_{j-1}, \dots, k_{i+1}, k_i$. Atlikame $j-i$ transpozicijų. Po to k_i sukeičiame vietomis su $k_{i+1}, \dots, k_{j-1}$. Atlikame dar $j-i-1$ transpozicijų. Taigi kėlinio ženklas keitėsi $(j-i) + (j-i-1) = 2(j-i) - 1$ kartą. Todėl ir šiuo atveju

$$\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots, k_n) = -\operatorname{sgn}(k_1, \dots, k_j, \dots, k_i, \dots, k_n).$$

Iš viso yra $n!$ kėlinių iš n elementų. Pritaikius transpoziciją $(1, 2)$, visi lyginiai kėliniai virsta nelyginiais, o visi nelyginiai kėliniai – lyginiais. Todėl, kai $n \geq 2$, lyginių ir nelyginių kėlinių skaičius yra vienodas, būtent $\frac{1}{2} n!$.

Keitinys $\begin{pmatrix} k_1, \dots, k_n \\ m_1, \dots, m_n \end{pmatrix}$ vadinamas lyginiu, jei eilučių ženklai vienedi, t. y. $I(k_1, \dots, k_n) + I(m_1, \dots, m_n) - \text{lyginis skaičius}$, ir nelyginiu, jei eilučių ženklai skirtingi, t. y.

$$I(k_1, \dots, k_n) + I(m_1, \dots, m_n) - \text{nelyginis skaičius}.$$

Pavyzdys. Keitinys

$$\begin{pmatrix} 1, 5, 4, 3, 2 \\ 3, 2, 5, 1, 4 \end{pmatrix}$$

yra nelyginis, nes $I(1, 5, 4, 3, 2) + I(3, 2, 5, 1, 4) = 6 + 5 = 11$. Keitinys

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 6, 2, 4, 5, 1, 3 \end{pmatrix}$$

yra lyginis, nes

$$I(1, 2, 3, 4, 5, 6) + I(6, 2, 4, 5, 1, 3) = 0 + 10 = 10.$$

Kadangi skirtingų n -ojo laipsnio keitinių yra $n!$, tai, samprotaudami kaip ir anksčiau, gausime: lyginių ir nelyginių n -ojo laipsnio keitinių, kai $n \geq 2$, yra tiek pat, būtent $1/2 n!$.

Keitinio vienoje eilutėje sukeitus du elementus vietomis, lyginis keitinys virsta nelyginiu, o nelyginis – lyginiu.

Šis tvirtinimas išplaukia iš 82 teoremos.

Atkreipiame dėmesį, kad bet kuris *keitinys ir jam atvirkštinis keitinys yra kartu lyginiai arba nelyginiai*.

Pavyzdys. Keitiniai

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 1, 2, 5, 4 \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 2, 3, 1, 5, 4 \end{pmatrix}$$

yra vienas kitam atvirkštiniai ir abu nelyginiai.

Uždaviniai

26. Nustatykite, kurie iš šių n -ojo laipsnio keitinių yra lygūs:

a) $n=4$; $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 2, 1, 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2, 3, 4, 1 \\ 4, 2, 3, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3, 4, 2, 1 \\ 1, 4, 2, 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4, 3, 2, 1 \\ 3, 2, 4, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3, 1, 2, 4 \\ 1, 3, 2, 4 \end{pmatrix}$;

b) $n=6$; $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 2, 3, 5, 6, 4, 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2, 4, 3, 5, 6, 1 \\ 3, 2, 5, 6, 1, 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5, 4, 6, 3, 1, 2 \\ 4, 6, 1, 5, 2, 3 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 6, 3, 2, 5, 1, 4 \\ 1, 5, 3, 6, 4, 2 \end{pmatrix}$.

27. Raskite keitinius, atvirkštinius 26 uždavinio keitiniams.

28. Sudauginkite šiuos keitinius:

a) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 2, 3, 1 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2, 3, 1 \\ 3, 2, 1 \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 3, 1, 2 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 2, 4, 5, 1 \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 3, 2, 4, 5, 1 \\ 2, 1, 5, 4, 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2, 4, 5, 3, 1 \\ 1, 5, 4, 2, 3 \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 5, 3, 2, 1, 4 \\ 1, 3, 2, 5, 4 \end{pmatrix}$.

29. Išreikškite ciklą sandauga šiuos keitinius:

a) $\begin{pmatrix} 2, 3, 5, 4, 1 \\ 3, 5, 4, 1, 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 2, 1, 4, 3, 6, 5 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1, 3, 2, 4, 6, 5 \\ 2, 1, 3, 5, 4, 6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\ 2, 3, 5, 4, 1, 7, 8, 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2, 3, 4, 6, 8, 7, 5, 1 \\ 3, 2, 6, 8, 1, 4, 7, 5 \end{pmatrix}$.

30. Raskite inversijų skaičių kėliniuose ir nustatykite kėlinių ženklus:

a) 2, 3, 5, 6, 8, 1, 7; b) 1, 3, 5, 4, 6, 9, 10, 2, 8, 7;

c) 1, 3, 2, 5, 4, ..., $2n+1$, $2n$;

d) k , $k-1$, ..., 2, 1, n , $n-1$, ..., $k+1$, $k < n$;

e) n , $n-1$, ..., $k+1$, 1, 2, ..., k , $k < n$;

f) 3, 2, 1, 6, 5, 4, ..., $3n$, $3n-1$, $3n-2$.

31. Nustatykite 29 uždavinio keitinių ženklus.

§65. Determinanto apibrėžimas. Antrosios ir trečiosios eilės determinantai

Imkime n -osios eilės kvadratinę matricą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

kurios elementai a_{ik} ($i, k=1, \dots, n$) yra skaičiai arba kokio nors lauko L elementai. Sudarinėkime jos elementų sandaugas, imdami n elementų po vieną iš kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio:

$$a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n}; \quad (5.7)$$

čia $i_1, i_2, \dots, i_n$ ir $k_1, k_2, \dots, k_n$ yra skaičių $1, 2, \dots, n$ kėliniai. Tada

$$\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_n \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_n \end{pmatrix}$$

yra n -ojo laipsnio keitinys. Jis vadinamas (5.7) *sandaugos indeksų keitiniu*. Sutvarkę dauginamuosius taip, kad jų pirmieji indeksai eitų didėjančia tvarka, gausime

$$a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} = a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n};$$

čia $\begin{pmatrix} i_1, & \dots, & i_n \\ k_1, & \dots, & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \dots, & n \\ j_1, & \dots, & j_n \end{pmatrix}$, t. y. indeksų keitiniai yra lygūs. Štai, pavyzdžiui, matricos pagrindinės įstrižainės elementų sandauga yra (5.7) pavidalo, t. y.

$$a_{11} a_{22} \dots a_{nn},$$

o jos indeksų keitinys yra

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ 1, & 2, & \dots, & n \end{pmatrix}.$$

Matricos šalutinės įstrižainės elementų sandauga

$$a_{1n} a_{2n-1} \dots a_{n1}$$

taip pat yra (5.7) pavidalo, ir jos indeksų keitinys yra

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ n, & n-1, & \dots, & 1 \end{pmatrix}.$$

Dvi (5.7) pavidalo sandaugos sutampa (t. y. jų dauginamieji atitinkamai lygūs) tada ir tik tada, kai sutampa jų indeksų keitiniai. Kadangi skirtingų n -osios eilės keitinių yra $n!$, tai skirtingų (5.7) pavidalo sandaugų iš n -osios eilės matricos elementų galima sudaryti taip pat $n!$.

Pavyzdžiui, kai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

galimos tik dvi skirtingos sandaugos $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$.

Kai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

yra $3! = 6$ skirtingos sandaugos: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$.

Kiekvienai sandaugai

priskirkime ženklą $+$, jeigu jos indeksų keitinys

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

lyginis, ir ženklą $-$, jeigu tas keitinys nelyginis. Gausime sandaugas

$$\begin{aligned} & (-1)^{I(i_1, \dots, i_n) + I(k_1, \dots, k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} = \\ & = (-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{n j_n}; \end{aligned} \quad (5.8)$$

čia

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Kadangi matricos A elementai a_{ik} ($i, k = 1, \dots, n$) yra lauko L elementai, tai (5.7) ir (5.8) pavidalo sandaugos taip pat yra lauko L elementai. Atskiru atveju, kai a_{ik} ($i, k = 1, \dots, n$) yra skaičiai, tos sandaugos taip pat yra skaičiai.

Susumuokime visas matricos A (5.8) pavidalo sandaugas. Gausime lauko L elementą (atskiru atveju skaičių), kurį žymėsime $|A|$.

$$\begin{aligned} |A| &= \sum (-1)^{I(i_1, \dots, i_n) + I(k_1, \dots, k_n)} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} = \\ &= \sum (-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{n j_n}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pirmojoje sumoje sumuojama pagal visus skirtingus n -ojo laipsnio keitinius

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}.$$

Antrojoje sumoje sumuojama pagal visus skirtingus n -osios eilės kėlinius $(j_1, \dots, j_n)$.

Tuo būdu kiekvienai n -osios eilės kvadratinei matricai $A=(a_{ik})$ ($i, k=1, \dots, n$) su elementais iš lauko L priskiriame lauko L elementą $|A|$. Vadinasi, n -osios eilės kvadratinų matricų aibėje apibrėžiame funkciją, vadinamą matricos *determinantu*.

n -osios eilės kvadratinės matricos A determinantu vadiname funkciją $|A|$, apibrėžtą (5.9) lygybe.

Determinantą dažnai žymime ir šitaip:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tais atvejais, kai neatsižvelgsime į matricą, determinantą žymėsime raide Δ arba D , taip pat ir kitomis raidėmis.

Remdamiesi apibrėžimu, apskaičiuokime antrosios eilės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantą. Kaip matėme, yra dvi skirtingos (5.7) pavidalo sandaugos

$$a_{11}a_{22}, a_{12}a_{21}.$$

Kadangi pirmosios sandaugos indeksų keitinys

$$\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix}$$

lyginis, o antrosios sandaugos indeksų keitinys

$$\begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 1 \end{pmatrix}$$

nelyginis, tai antrosios eilės determinantas yra

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Apskaičiuokime trečiosios eilės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantą.

Imame 3-ojo laipsnio keitinius

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 3, 1, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 3, 2, 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 3, 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 1, 3 \end{pmatrix}$$

ir randame (5.9) pavidalo sumą

$$\begin{aligned} |A| = & (-1)^{I(1,2,3)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{I(2,3,1)} a_{12} a_{23} a_{31} + \\ & + (-1)^{I(3,1,2)} a_{13} a_{21} a_{32} + (-1)^{I(3,2,1)} a_{13} a_{22} a_{31} + \\ & + (-1)^{I(1,3,2)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{I(2,1,3)} a_{12} a_{21} a_{33}. \end{aligned}$$

Kadangi

$$\begin{aligned} I(1, 2, 3) &= 0, & I(2, 3, 1) &= 2, & I(3, 1, 2) &= 2, \\ I(3, 2, 1) &= 3, & I(1, 3, 2) &= 1, & I(2, 1, 3) &= 1, \end{aligned}$$

tai

$$|A| = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}.$$

Toliau pateikiame trečiosios eilės determinanto skaičiavimo schemas.

Skaičiuojant trikampių, linijomis sujungti elementai sudauginami ir sandaugos imamos su + ženklu pirmuoju atveju ir su - ženklu antruoju atveju:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Pavyzdys.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 0 = 27 - 2 + 6 - 12 = 33 - 14 = 19.$$

Determinanto skaičiavimas, prirašant eilutes arba stulpelius:

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \quad - \quad - \end{array} \quad \begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \quad - \quad - \end{array}$$

Pavyzdys.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 19.$$

Apskaičiuoti aukštesnės eilės determinantus, remiantis apibrėžimu, sudėtinga ir sunku, nes reikia atlikti labai daug veiksmų ir nėra tokių paprastų schemų, kaip antrosios ir trečiosios eilės determinantams skaičiuoti. Pavyzdžiui, kai $n=4$, (5.9) sumą sudaro $4! = 24$ dėmenys, kurių kiekvienas yra 4 elementų sandauga, be to, dar reikia skaičiuoti ir kiekvieno dėmens ženklą. Kai $n=5$, (5.9) suma turi net $5! = 120$ dėmenų ir t. t. Todėl būtina išsiaiškinti determinantų savybes, kurios palengvintų skaičiavimus.

§66. Determinanto savybės

Visos čia pateiktos determinanto savybės įrodomos remiantis determinanto apibrėžimu ir keitinių bei kėlinių savybėmis. Kai determinantai yra antrosios ir trečiosios eilės, šias savybes galima tiesiogiai patikrinti.

Kad būtų patogiau, matricos A elementus, eilutes, stulpelius išraiškoje

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

vadinsime determinanto elementais, eilutėmis, stulpeliais. (5.8) pavidalo sandaugas (kartu su ženklais) vadinsime *determinanto nariais*.

1 savybė. *Determinantas nepasikeičia, jeigu jo eilutes pakeičiame stulpeliais, t. y. $|A| = |A^T|$.*

Įrodymas. Transponuodami matricą $A = (a_{ij})$, gauname matricą $A^T = (\bar{a}_{ij})$, kurioje $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$. Pagal apibrėžimą

$$|A| = \sum (-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$$

ir

$$|A^T| = \sum (-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} \bar{a}_{j_1 1} \dots \bar{a}_{j_n n}.$$

Tačiau $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), todėl $\bar{a}_{j_1 1} \dots \bar{a}_{j_n n} = a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$ visiems kėliniams $j_1, \dots, j_n$. Kadangi abi sumos sudarytos iš tų pačių dėmenų, tai $|A| = |A^T|$.

Pastaba. Iš šios savybės išplaukia, kad determinanto eilutės ir stulpeliai yra lygiaverčiai. Todėl visos determinanto savybės, susijusios su eilutėmis, galioja ir stulpeliams, ir atvirkščiai. Taigi kitas savybes pakanka įrodinėti tik eilutėms arba tik stulpeliams.

2 savybė. *Jeigu determinantas turi nulinę eilutę (stulpelį), tai jis lygus nuliui.*

Įrodymas. Sakyme, i -oji determinanto eilutė yra nulinė, t. y. $a_{ij} = 0$ ($j = 1, \dots, n$). Kadangi į kiekvieną determinanto narį kaip daugiklis įeina i -osios eilutės elementas, tai visi determinanto nariai lygūs nuliui. Taigi ir determinantas lygus nuliui.

3 savybė. Sukeitus dvi determinanto eilutes (stulpelius) vietomis, determinanto ženklas pasikeičia.

Įrodymas. Sukeiskime vietomis i -ąją ir k -ąją eilutes ($i < k$). Pirmojo determinanto elementų sandauga

$$a_{1j_1} \dots a_{i-1j_{i-1}} a_{ij_l} a_{i+1j_{l+1}} \dots a_{k-1j_{k-1}} a_{kj_k} a_{k+1j_{k+1}} \dots a_{nj_n}$$

naujajame determinante bus šitokia:

$$a_{1j_1} \dots a_{i-1j_{i-1}} \tilde{a}_{kj_l} a_{i+1j_{l+1}} \dots a_{k-1j_{k-1}} \tilde{a}_{ij_k} a_{k+1j_{k+1}} \dots a_{nj_n};$$

čia $a_{ij_l} = \tilde{a}_{kj_l}$, $a_{kj_k} = \tilde{a}_{ij_k}$. Todėl abi šios sandaugos sudarytos iš tų pačių dauginamųjų. Pirmosios sandaugos ženklas yra

$$(-1)^{I(j_1, \dots, j_n)}.$$

Tuo tarpu antrosios sandaugos ženklas yra

$$(-1)^{I(j_1, \dots, j_n) + I(1, \dots, i-1, k, i+1, \dots, k-1, i, k+1, \dots, n)}.$$

Antrasis laipsnio rodiklio dėmuo yra nelyginis, nes kėlinys $1, \dots, i-1, k, i+1, \dots, k-1, i, k+1, \dots, n$ gaunamas iš kėlinio $1, 2, \dots, n$ atlikus vieną transpoziciją. Todėl užrašytosios sandaugos yra priešingų ženklų. Vadinasi, jų sumos taip pat yra priešingų ženklų.

Kad kitas determinanto savybes galima būtų užrašyti kompaktiškiau, determinantą žymėsime šitaip:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\beta_1, \dots, \beta_n| = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix};$$

čia

$$\beta_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n)$$

yra determinanto (matricos) k -asis stulpelis, o $\alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ ($i = 1, \dots, n$) – determinanto (matricos) i -oji eilutė.

4 savybė. Jei determinantas turi du lygius stulpelius (eilutes), tai jis lygus nuliui, t. y. jei $\beta_{k_1} = \beta_{k_2}$ ($k_1 \neq k_2$), tai $|\beta_1, \dots, \beta_n| = 0$.

Įrodymas. Determinanto Δ lygias eilutes sukeiskime vietomis. Gausime determinantą $\Delta_1 = \Delta$. Pagal 3 savybę $\Delta_1 = -\Delta$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $\Delta = 0$.

5 savybė. Jei determinanto i -oji eilutė yra dviejų kurių nors eilučių suma, tai toks determinantas lygus sumai dviejų determinantų, kurių i -osios eilutės yra atitinkamai pirmasis dėmuo ir antrasis dėmuo, o visos kitos eilutės yra duotojo determinanto eilutės, t. y. jei $\alpha_i = \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}$, tai

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_i \\ \alpha_{i+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_i^{(1)} \\ \alpha_{i+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i-1} \\ \alpha_i^{(2)} \\ \alpha_{i+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Analogiška savybė galioja stulpeliams.

Irodymas. Kadangi $\alpha_i = \alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)}$, tai $a_{ik} = a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)}$ ($k=1, \dots, n$). Todėl

$$\Delta = \sum (-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \dots a_{i-1j_{i-1}} a_{ij_i}^{(1)} a_{i+1j_{i+1}} \dots a_{nj_n} + \\ + \sum (-1)^{I(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \dots a_{i-1j_{i-1}} a_{ij_i}^{(2)} a_{i+1j_{i+1}} \dots a_{nj_n} = \Delta_1 + \Delta_2;$$

čia Δ_1 ir Δ_2 – determinantai, kurių i -osios eilutės yra atitinkamai $\alpha_i^{(1)}$ ir $\alpha_i^{(2)}$, o visos kitos eilutės yra determinanto Δ eilutės.

Remdamiesi šia savybe, kiekvieną determinantą galime užrašyti kelių determinantų suma.

Pavyzdys. Išraišką

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 8 & 6 & -3 & 20 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 10 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

gauname antrąją eilutę užrašę $(8, 6, -3, 20) = (7, 5, 2, 10) + (1, 1, -5, 10)$ ir pasinaudoję 5 savybe.

6 savybė. Jei determinanto stulpelio (eilutės) elementai turi bendrąjį daliklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą, t. y.

$$|\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, l\beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n| = l |\beta_1, \dots, \beta_k, \dots, \beta_n|.$$

Irodymas išplaukia iš determinanto apibrėžimo – užtenka bendrąjį visų narių daugiklį iškelti prieš sumos ženklą.

Išvada. Dauginami vieną determinanto eilutę (stulpelį) iš kokio nors daugiklio, iš to daugiklio padauginame determinantą.

Todėl determinanto dauginimą iš lauko L elemento reikia skirti nuo matricos dauginimo iš to paties elemento, nes $|LA| = l^n |A|$.

7 savybė. Jei prie determinanto k -ojo stulpelio pridėsime s -ąjį stulpelį ($s \neq k$), padauginą iš bet kokio daugiklio, tai determinantas nepasikeis. Analogiška taisyklė galioja ir eilutėms.

Įrodymas. Įrodykime šią savybę stulpeliams, t. y. įrodykime, kad $|\beta_1, \dots, \beta_n| = |\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k + l\beta_s, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n|$.

Remdamiesi 5 ir 6 savybėmis, gauname ($k < s$)

$$|\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k + l\beta_s, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n| = \\ = |\beta_1, \dots, \beta_n| + l|\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_s, \beta_{k+1}, \dots, \beta_s, \dots, \beta_n|.$$

Antrojo determinanto k -asis stulpelis yra β_s – to determinanto k -asis ir s -asis stulpeliai sutampa. Taigi pagal 4 savybę determinantas lygus nuliui.

Iš šios savybės tiesiogiai išplaukia trys išvados.

1 išvada. Jeigu dvi determinanto eilutės yra proporcingos, tai toks determinantas lygus nuliui.

2 išvada. Determinantas nepasikeis prie jo eilutės pridėjus kitų eilučių tiesinę kombinaciją.

3 išvada. Jeigu kuri nors determinanto eilutė yra visų kitų eilučių tiesinė kombinacija, tai toks determinantas lygus nuliui.

Analogiškas išvadas galima padaryti apie stulpelius.

§67. Determinanto skaičiavimas remiantis jo savybėmis

Pirmiausia įrodome, kad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}, \quad (5.10)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{in-i+1}. \quad (5.11)$$

Imkime pirmąjį determinantą. Jo elementai $a_{ik} = 0$, kai $k < i$. Todėl sandaugoje

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

bent vienas daugiklis bus lygus nuliui, jei tik

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Iš determinanto apibrėžimo išplaukia, kad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Antrąją lygybę gausime pasinaudoję pirmąją determinanto savybe ir paskutine lygybe.

Pirmojo (5.11) formulės determinanto elementai $a_{ik}=0$, kai $k \leq n-i$. Todėl sandaugoje $a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$ bent vienas daugiklis bus lygus nuliui, kai

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ n, n-1, \dots, 1 \end{pmatrix}.$$

Taigi iš determinanto apibrėžimo išplaukia, kad

$$\Delta = (-1)^{I(n, n-1, \dots, 1)} a_{1n} a_{2n-1} \dots a_{n1}.$$

Tačiau

$$I(n, n-1, \dots, 1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

todėl

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{in-i+1}.$$

Ketvirtąją lygybę gauname pasinaudoję pastarąją lygybę ir determinantų savybėmis.

Pavyzdys.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & -18 & 6 & 0 & 0 \\ 47 & 25 & 15 & 1 & 0 \\ -125 & 4 & 13 & -9 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 6 \cdot 1 \cdot 8 = -480,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 19 \\ 0 & -3 & 31 & -83 \\ 10 & 47 & -15 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4 \cdot (4-3)}{2}} (-2) \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 10 = 240.$$

Matricos A determinanto $|A|$ elementariaisiais pertvarkiais vadinsime matricos A elementariusius pertvarkius. Iš determinanto 3, 5 ir 7 savybių išplaukia, kad, atliekant determinanto (matricos) elementariusius pertvarkius, gali tecti tą determinantą dauginėti iš kokio nors nelygaus nuliui

daugiklio. (Ženklo keitimas reiškia dauginimą iš -1 .) Todėl elementariaisiais matricos A pertvarkiais visada galime taip pakeisti determinantą, kad jis būtų (5.10) ar (5.11) pavidalo. Po to galime naudotis įrodytomis lygybėmis.

Kaip matome, teorija labai paprasta, tik reikia įgūdžių, o kartais ir nuojautos, ypač skaičiuojant n -osios eilės determinantus.

Pavyzdžiai. 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -12 \\ 0 & -1 & -4 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -12 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pirmasis žingsnis. Atliekame veiksmus su eilutėmis: (II)+(I); (III)−2(I); (IV)−3(I); (V)−(I). Dėl šių veiksmų determinantas nepakitė.

Antrasis žingsnis. Antroji eilutė turi daugiklį 3; jį iškeliamo prieš determinanto ženklą, po to atliekame veiksmus su eilutėmis: (III)+3(V); (IV)+(V). Šie veiksmas determinantą nekeičia.

Trečiasis žingsnis. Paskutiniame determinante atliekame veiksmus su eilutėmis: (IV)+(III); (III)−3(II). Kadangi ir šie veiksmas determinantą nekeičia, tai

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ketvirtasis žingsnis. 5-ąją eilutę perkeliame į 2-osios vietą, sukeisdami ją paeiliui su 4-ąja, 3-ąja, 2-ąja eilutėmis. Determinanto ženklą keičiame tris kartus. Be to, iš 3-osios ir 4-osios eilučių iškeliamo daugiklį -1 . Todėl

$$\Delta = (-1)^5 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 20 \end{vmatrix}.$$

Penktasis žingsnis. 5-ąją eilutę dauginame iš 11. Kad determinantas nepakistų, reikia jį padauginti iš 11^{-1} . Po to iš 5-osios eilutės atimame 4-ąją, padaugintą iš 17. Determinantas dėl to nepakinta, todėl gauname

$$\Delta = (-1)^5 \frac{3}{11} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 185 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot \frac{1}{11} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 185 = -555.$$

2. Apskaičiuokime n -osios eilės determinantą

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & b_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & b_2 & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. 1-ąjį stulpelį dauginame iš -1 ir pridame paeiliui prie 2-ojo, 3-ojo, ..., n -ojo stulpelio. Šie veiksmai determinanto nekeičia, todėl

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_1 - a_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & b_2 - a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} - a_n \end{vmatrix} = a_1 \prod_{i=1}^{n-1} (b_i - a_{i+1}).$$

3. Apskaičiuokime n -osios eilės determinantą

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Pirmąją eilutę atimame paeiliui iš visų kitų eilučių. Šis pertvarkis determinanto nekeičia, todėl

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & \dots & a-1 & 1-a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a-1 & \dots & 0 & 1-a \\ a-1 & 0 & \dots & 0 & 1-a \end{vmatrix}.$$

Prie n -ojo stulpelio pridame pirmųjų $n-1$ stulpelių sumą; gauname

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a+(n-1) \\ 0 & 0 & \dots & a-1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a-1 & \dots & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

Uždaviniai

32. Išaiškinkite, kurios iš užrašytų sandaugų yra n -osios eilės determinanto nariai, ir nustatykite jų ženklus:

- a) $n=4$; 1) $a_{11} a_{23} a_{34} a_{43}$, 2) $a_{21} a_{32} a_{41} a_{14}$,
3) $a_{21} a_{32} a_{43} a_{14}$, 4) $a_{31} a_{23} a_{32} a_{44}$;

b) $n=5$;

- 1) $a_{11} a_{23} a_{32} a_{45} a_{54}$,
2) $a_{31} a_{42} a_{51} a_{13}$,
3) $a_{31} a_{22} a_{13} a_{44} a_{55}$,
4) $a_{51} a_{32} a_{41} a_{15} a_{23}$,
5) $a_{42} a_{53} a_{31} a_{24} a_{15}$.

33. Apskaičiuokite 2-osios eilės determinantus:

- a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -6 & 18 \\ 4 & 30 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b \\ -a & b \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}$.

34. Apskaičiuokite 3-osios eilės determinantus:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -3 & 2 & -10 \\ 5 & -20 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -16 \\ 4 & -5 & 11 \\ 10 & 7 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

35. Apskaičiuokite determinantus, pertvarkydami juos į trikampio pavidalo determinantus:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ -6 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 10 & 3 & -7 \\ 0 & -20 & 9 & 27 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & -1 & -5 \\ 17 & 8 & 3 & 0 \\ 19 & -6 & 4 & 10 \end{vmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 6 & 10 & -13 & 1 & -3 \\ -24 & 3 & 15 & -9 & 4 \\ 18 & -13 & 3 & 2 & -1 \\ -36 & 26 & -6 & 5 & 7 \\ -12 & -20 & 26 & -2 & 19 \end{vmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 2 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -b & -c & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & c & x & 0 \\ -11 & 0 & 0 & 0 & -x & -z \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix};$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} a & 3 & 3 & \dots & 3 \\ a & 4 & 4 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 4 & 5 & \dots & n-1 \end{vmatrix}; \quad \text{g) } \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 & y_2 & y_1 \\ x_3 & x_3 & x_3 & \dots & y_3 & y_2 & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & y_{n-1} & \dots & y_3 & y_2 & y_1 \\ y_n & y_{n-1} & \dots & y_3 & y_2 & y_1 \end{vmatrix}.$$

§68. Determinanto skleidimas pagal eilutę (stulpelį)

Šiame paragrafe nagrinėsime determinanto savybes, kurios naudingos skaičiuojant determinantus ir juos taikant.

Kad paaiškėtų sąvokų, kurias apibrėšime, tikslas ir prasmė, apskaičiuokime determinantą

$$\Delta_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kurio paskutiniame stulpelyje visi elementai, išskyrus a_{nn} , yra nuliai, po to determinantą

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & 0 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & 0 & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ik-1} & a_{ik} & a_{ik+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & 0 & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & 0 & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (*)$$

kurio k -ojo stulpelio visi elementai yra nuliai, išskyrus elementą a_{ik} .

Pagal apibrėžimą

$$\Delta_{nn} = \sum (-1)^{I(j_1, \dots, j_{n-1}, j_n)} a_{1j_1} \dots a_{n-1j_{n-1}} a_{nj_n}.$$

Kadangi $a_{in}=0$, kai $i < n$, tai lygaus nuliui daugiklio nėra tik tose sandaugose, kuriose $a_{nj_n}=a_{nn}$, t. y. $j_n=n$. Tokioms sandaugoms indeksų keitinys yra

$$\begin{pmatrix} 1, & \dots, & n-1, & n \\ j_1, & \dots, & j_{n-1}, & n \end{pmatrix};$$

čia $j_1, \dots, j_{n-1}$ – skaičių $1, 2, \dots, n-1$ kėlinys. Aišku, kad tokių keitinių yra tiek, kiek yra $(n-1)$ -osios eilės kėlinių. Kadangi $I(j_1, \dots, j_{n-1}, n) = I(j_1, \dots, j_n)$, tai

$$\begin{aligned} \Delta_{nn} &= a_{nn} \sum (-1)^{I(j_1, \dots, j_{n-1})} a_{1j_1} \dots a_{n-1j_{n-1}} = \\ &= a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pastarasis determinantas yra $(n-1)$ -osios eilės; jis gautas iš determinanto Δ_{nn} , atmetus paskutinę eilutę ir paskutinį stulpelį. Pažymėję šį determinantą M_{nn} , gausime

$$\Delta_{nn} = a_{nn} M_{nn}.$$

Determinantą Δ_{ik} pertvarkykime į Δ_{nn} pavidalo determinantą šitokiu būdu: i -ąją eilutę nukelkime į paskutinės vietą, sukeisdami ją $(i+1)$ -ąja, $(i+2)$ -ąja, ..., n -ąja eilutėmis ($n-1$ sukeitimų), po to k -ąjį stulpelį perkelkime į paskutinio vietą, sukeisdami jį su $(k+1)$ -uoju, $(k+2)$ -uoju, ..., n -uoju stulpeliais ($n-k$ sukeitimų). Kadangi pagal 3 savybę determinanto ženklas keičiasi $(n-1)+(n-k)$ kartų, o

$$(-1)^{(n-1)+(n-k)} = (-1)^{i+k},$$

tai, pasinaudoję įrodyta lygybe, gauname išraišką

$$\Delta_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1k-1} & a_{i-1k+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1k-1} & a_{i+1k+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kurioje dešinės lygybės pusės determinantas yra $(n-1)$ -osios eilės ir gautas iš determinanto Δ_{ik} išbraukus jo i -ąją eilutę ir k -ąjį stulpelį. Pažymėję šį determinantą M_{ik} , gauname

$$\Delta_{ik} = a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik}. \quad (5.12)$$

$(n-1)$ -osios eilės determinantą, kurį gauname iš n -osios eilės determinanto išbraukę i -ąją eilutę ir k -ąjį stulpelį, vadiname elemento a_{ik} minoru ir žymime M_{ik} . Reiškinį $(-1)^{i+k} M_{ik}$ vadiname elemento a_{ik} adjunktu ir žymime A_{ik} .

Pasinaudoję šiuo apibrėžimu, (5.12) lygybę galime suformuluoti kaip teoremą.

83 teorema. 1. Determinantas, kurio k -ojo stulpelio visi elementai, išskyrus a_{ik} , lygūs nuliui, yra lygus elemento a_{ik} ir jo adjunkto A_{ik} sandaugai. 2. Determinantas, kurio i -osios eilutės visi elementai, išskyrus a_{ik} , lygūs nuliui, yra lygus elemento a_{ik} ir jo adjunkto A_{ik} sandaugai.

Antrąjį tvirtinimą įrodysime pasinaudoję pirmąja determinantų savybe.

Elemento a_{ik} minorą M_{ik} gauname išbraukę determinanto i -ąją eilutę ir k -ąjį stulpelį.

Pavyzdys. Determinanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 7 & -8 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

elemento $a_{23}=5$ minoras M_{23} lygus

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

o $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$. Analogiškai $a_{31}=7$, o

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}.$$

Adjunktą A_{ik} apskaičiuojame pagal formulę

$$A_{ik} = \begin{cases} M_{ik}, & \text{kai } i+k - \text{lyginis skaičius,} \\ -M_{ik}, & \text{kai } i+k - \text{nelyginis skaičius.} \end{cases}$$

Suformuluosime dar vieną teoremą, labai svarbią praktiškam determinantų skaičiavimui ir tolesnei teorijai.

84 teorema. *Determinanto stulpelio elementų ir jų adjunktų sandaugų suma lygi tam determinantui, o stulpelio elementų ir kito stulpelio atitinkamų elementų adjunktų sandaugų suma lygi nuliui, t. y.*

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = \begin{cases} \Delta, & \text{kai } k=j, \\ 0, & \text{kai } k \neq j. \end{cases}$$

Analogiškas tvirtinimas galioja ir eilutėms, t. y.

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \Delta, & \text{kai } j=i, \\ 0, & \text{kai } j \neq i. \end{cases}$$

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime, kad

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} = \Delta.$$

Determinanto k -ąjį stulpelį užrašykime šitaip:

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Pasinaudoję determinantų 5 savybe, lengvai įsitikiname, kad

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_{ik};$$

čia Δ_{ik} yra (*) tipo determinantai. Iš (5.12) lygybės išplaukia

$$\Delta_{ik} = a_{ik} A_{ik} \quad (i=1, \dots, n).$$

Įrašę šias lygybes į sumą, gauname

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}.$$

Norėdami įrodyti lygybę $\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0$, kai $k \neq j$, determinante Δ vietoj

k -ojo stulpelio įrašykime j -ąjį stulpelį. Kadangi gautame determinante Δ_1 k -asis ir j -asis stulpeliai sutampa, tai $\Delta_1 = 0$. Šio determinanto k -asis stulpelis yra $(a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$, o visi kiti stulpeliai sutampa su determinanto Δ stulpeliais. Todėl determinanto Δ_1 k -ojo stulpelio elementų adjunktai yra A_{ik} ($i=1, \dots, n$), taigi A_{ik} yra ir determinanto Δ k -ojo stulpelio elementų adjunktai. Pasinaudoję įrodyta lygybe, gauname

$$0 = \Delta_1 = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik}.$$

Analogiškai teiginiai apie eilutes išplaukia iš determinantų 1 savybės.

Remdamiesi šia teorema, n -osios eilės determinantą galime išreikšti $(n-1)$ -osios eilės determinantų suma. Nuosekliai žemindami determinanto eilę, galime jį išreikšti 3-osios arba 2-osios eilės determinantų suma. Tokius determinantus jau mokame apskaičiuoti.

Patogu determinanto skleidimą derinti su elementariaisiais pertvarkiais. Elementariaisiais pertvarkiais determinantui reikia suteikti Δ_{ik} pavidalą, po to taikyti 83 teoremą.

Pavyzdžiai. 1. Apskaičiuokime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 7 & -8 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Jei išskleistume šį determinantą pagal paskutinę eilutę, tai gautume 4 3-osios eilės determinantų sumą

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -8 & -9 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \\ 7 & -9 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 7 & -8 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \\ 7 & -8 & -9 \end{vmatrix}.$$

Reikia apskaičiuoti tuos keturis determinantus. Norėdami sutrumpinti skaičiavimus, prie pirmojo stulpelio pridėdame ketvirtąjį, padauginą iš 2, po to prie antrojo ir trečiojo stulpelių pridėdame ketvirtąjį ir gauname

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 7 & -3 & 4 \\ -9 & -2 & 1 & -4 \\ 13 & -5 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 8 & 7 & -3 \\ -9 & -2 & 1 \\ 13 & -5 & -6 \end{vmatrix}.$$

Pastarąjį determinantą jau galime apskaičiuoti (pavyzdžiui, trikampaiais). Tačiau daug greičiau apskaičiuosime, jeigu iš trečiosios eilutės atimsime pirmąją, padauginą iš 2, po to prie pirmosios eilutės pridėsime antrąją, padauginą iš 3. Gausime

$$\Delta = (-1) \begin{vmatrix} -19 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & 1 \\ -3 & -19 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} -19 & 1 \\ -3 & -19 \end{vmatrix} = 19 \cdot 19 - 1 \cdot (-3) = 364.$$

2. Apskaičiuosime n -osios eilės determinantą

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b+a_1 & a_2-b & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & b+a_2 & a_3-b & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & b+a_{n-1} & a_n-b \end{vmatrix} =$$

pirmąją eilutę atimame iš visų kitų eilučių)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & -b \end{vmatrix} =$$

(ši determinantą skleidžiame pagal pirmąjį stulpelį)

$$= a_1 \begin{vmatrix} -b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & -b \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & -b \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \Delta_{n-1}^{(1)} - b \Delta_{n-1}.$$

Aiškliai matome, kad $\Delta_{n-1}^{(1)} = (-1)^{n-1} b^{n-1}$, o Δ_{n-1} yra visai tokios pat formos kaip ir Δ_n , tiksliai jo eilė yra $n-1$. Gauname rekurentinę formulę

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} b^{n-1} a_1 - b \Delta_{n-1}.$$

Skleisdami tokiu pat būdu Δ_{n-1} , gausime

$$\Delta_{n-1} = (-b)^{n-2} a_2 - b \Delta_{n-2},$$

ir apskritai

$$\Delta_{n-k} = (-b)^{n-k-1} a_{k+1} - b \Delta_{n-k-1} \quad (k=0, 1, \dots, n-2).$$

Kadangi

$$\Delta_2 = a_{n-1}(-b) - a_n b,$$

tai nuosekliai įrašinėdami gauname

$$\Delta_3 = (-b)^2 (a_{n-2} + a_{n-1} + a_n),$$

$$\Delta_4 = (-b)^3 (a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n),$$

r t. t.,

$$\Delta_n = (-b)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Šiuo pavyzdžiu iliustruojamas determinantų skaičiavimas taikant rekurentines formules. Jo esmė šitokia: skleisdami pagal eilutę arba stulpelį, gauname formulę, kuri duotąjį determinantą išreiškia žemesnės eilės tokios pat formos determinantu arba tos pačios ir jau žinomos formos determinantai. Naudodamiesi šia formule, nuosekliai mažiname determinantų eilę, ko gauname determinantą, kurį jau galime apskaičiuoti.

Uždaviniai

36. Apskaičiuokite determinantus, skleisdami pagal eilutės arba stulpelio elementus:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -3 & 0 & 11 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 & -6 \\ 5 & -7 & 0 & 9 \\ 28 & 43 & -5 & 18 \\ 5 & 7 & 0 & -29 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 11 & 13 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 11 & -15 & -23 & 45 \\ -33 & 45 & 74 & -120 \\ 22 & -30 & -18 & 250 \\ 55 & -75 & 186 & 320 \end{vmatrix}; \quad e) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 15 & 3 \\ -3 & 7 & -4 & 13 & -5 \\ 1 & -8 & 11 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

37. Apskaičiuokite rekurentinių formulių metodu n -osios eilės determinantas:

$$a) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

38. Apskaičiuokite vadinamąjį Vandermondo determinantą

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

§69. Frobenijaus teorema. Atvirkštinės matricos išraiška. Kramerio taisyklė

Šiame paragrafe išsiaiškinsime matricos rango ir jos determinanto sąryšį, pateiksime kitą būdą matricos rangui bei atvirkštinei matricai rasti. Be to, išvesime taisyklę spręsti tiesinių n lygčių su n kintamųjų sistemai, turinčiai reguliariąją sistemą matricą.

Pasirinkime natūrinį skaičių s ($1 \leq s \leq \min\{m, n\}$). Dabar $[m \times n]$ eilės matricoje $A = (a_{ij})$ parinkime s eilučių, kurių numeriai $i_1, i_2, \dots, i_s$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_s$), ir s stulpelių, kurių numeriai $k_1, k_2, \dots, k_s$ ($k_1 < k_2 < \dots < k_s$). Išrašę tų eilučių ir stulpelių sankirtose esančius matricos elementus, gauname s -osios eilės kvadratinę matricą, kurios determinantą

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 k_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_s k_1} & \dots & a_{i_s k_s} \end{vmatrix}$$

vadiname *matricos A s-osios eilės minoru*.

Kai $s=1$, gauname elementus a_{ik} — pirmosios eilės minorus. Jų yra mn . Kai $s=2$, gauname antrosios eilės minorus, kurių yra $C_m^2 C_n^2$. Ir apskritai $[m \times n]$ eilės matricos s -osios eilės minorų yra $C_m^s C_n^s$ ($1 \leq s \leq \min\{m, n\}$).

Nenulinė matrica turės nelygių nuliui minorų. Kai kurie iš minorų gali būti lygūs nuliui. Jeigu, pavyzdžiui, matricos A visi $(r+1)$ -osios eilės minorai lygūs nuliui, tai ką galima pasakyti apie aukštesniųjų eilių minorus? Ar visi jie lygūs nuliui, ar tarp jų galės būti ir nelygių nuliui? Kokią įtaką turi matricos rangas? Į tuos klausimus atsako teoremos.

85 teorema. *Reguliariosios matricos determinantas nelygus nuliui.*

Įrodymas. Jeigu A yra reguliari n -osios eilės matrica, tai pagal 63 teorema elementariaisiais pertvarkiais ją galime pakeisti vienetine n -osios eilės mat-

rica. Kadangi vienietinės n -osios eilės matricos determinantas lygus 1, o elementarieji pertvarkiai keičia matricos determinantą tik nelygiu nuliui daugikliu, tai ir matricos A determinantas nelygus nuliui.

Frobenijaus teorema (F. G. Frobenius, 1849–1917, vokiečių matematikas). *Matricos A rangas lygus aukščiausiai nelygaus nuliui matricos minoro eilei.*

Irodymas. Tarkime, kad $\tau(A)=[m \times n]$ ir $\text{rang } A=r$. Pagal rango apibrėžimą matricoje A yra r tiesiškai nepriklausomų eilučių. Išbraukę likusias $m-r$ eilučių, gausime matricą B , kurios eilė yra $[r \times n]$. Kadangi $\text{rang } B=r$, tai ta matrica turės r tiesiškai nepriklausomų stulpelių. Išbraukę likusius stulpelius, gausime matricą C , kurios eilė yra $[r \times r]$ ir $\text{rang } C=r$. Taigi C yra reguliari r -osios eilės matrica. Todėl $|C| \neq 0$. Pažymėję ρ matricos A aukščiausios eilės nelygaus nuliui minoro eilę, gausime nelygybę

$$r \leq \rho,$$

nes $|C|$ yra matricos A nelygus nuliui r -osios eilės minoras.

Pagal teoremos sąlygą, iš matricos A išbraukiant $n-\rho$ stulpelių ir $m-\rho$ eilučių, galima sudaryti ρ -osios eilės kvadratinę matricą D , kurios $|D| \neq 0$, t. y. D yra reguliari matrica ir pagal 85 teoremą $\text{rang } D=\rho$.

Tačiau $\text{rang } D \leq \text{rang } A=r$, t. y. $\rho \leq r$. Iš nelygybių $r \leq \rho$ ir $\rho \leq r$ išplaukia, kad $r=\rho$.

Išvada. *Jeigu $[m \times n]$ eilės matricos rangas yra r ir $r < \min\{m, n\}$, tai visi tos matricos minorai, kurių eilė didesnė už r , yra lygūs nuliui.*

Skaičiuoti matricos rangą, remiantis šia teorema, nelabai patogiu, nes reikia apskaičiuoti gana daug minorų. Skaičiuojamų minorų skaičių galima sumažinti naudojantis 86 teorema, tačiau jos formulavimui reikalinga gaubiančio minoro sąvoka.

Matricos $s+j$ ($j \geq 1$) eilės minoras vadinamas s eilės minora gaubiančiu minoru, jei į $s+j$ eilės minora įeina visi s eilės minoro elementai.

Pavyzdys. Matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

trečiosios eilės minoras

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix} \text{ ir kitus.}$$

86 teorema. Jei kuris nors matricos A r -osios eilės minoras nelygus nuliui, o visi jį gaubiantys $(r+1)$ -osios eilės minorai lygūs nuliui, tai $\text{rang } A = r$.

Irodymas. Kadangi matricos rangas nesikeičia keičiant vietomis eilu-tes arba stulpelius, tai galima laikyti, kad nelygus nuliui r -osios eilės mi-noras Δ_r yra matricos kairiajame viršutiniame kampe, t. y.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \Delta_r & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \dots & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & \dots & a_{r+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & a_{mr+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

Kadangi $\Delta_r \neq 0$, tai pagal Frobenijaus teoremą r -osios eilės kvadratinės matricos, esančios kairiajame viršutiniame kampe, rangas lygus r . Jeigu, at-likdami matricos A elementariusius pertvarkius, tačiau nekeisdami vietomis pirmųjų r eilučių su paskutinėmis $m-r$ eilutėmis ir pirmųjų r stulpelių su paskutiniais $n-r$ stulpeliais, be to, $r+1, \dots, m$ eilutes (bei $r+1, \dots, n$ stulpelius) keisime tikrai pridėdami prie jų pirmųjų r eilučių (stulpelių) tiesines kombinacijas, tai iš matricos A gausime šitokio pavidalo matricą:

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \Delta'_r & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{11} & \dots & d_{1n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{m-r1} & \dots & d_{m-rn-r} \end{array} \right).$$

Matricos D minorai gali skirtis nuo matricos A minorų tik nelygiai nuliui daugikliais.

Be to, visi minorą Δ_r gaubiantys $(r+1)$ -osios eilės minorai virsta minorų Δ'_r gaubiančiais minorais. Kiekvienas Δ'_r gaubiantis $(r+1)$ -osios eilės mino-ras yra šio pavidalo:

$$\Delta_r^{(i,j)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{ij} \end{vmatrix} \quad (i=1, \dots, m-r; j=1, \dots, n-r).$$

Pasinaudoję teorema apie determinanto skleidimą ir teoremos sąlyga, gauname $\Delta_r^{(i,j)} = d_{ij} \Delta_r = 0$.

Kadangi $\Delta_r = 1$, tai $d_{ij} = 0$ ($i=1, \dots, m-r$; $j=1, \dots, n-r$). Vadinasi, $\text{rang} A = \text{rang} D = r$.

Kai nenulinės matricos rango ieškome remdamiesi 86 teorema, imame antrosios eilės nelygų nuliui minorą. (Jei tokio minoro nėra, tai matricos rangas lygus 1.) Po to randame jį gaubiantį nelygų nuliui trečiosios eilės minorą. (Jei tokio minoro nėra, tai matricos rangas lygus 2.) Randame nelygų nuliui ketvirtosios eilės minorą, gaubiantį jau rastą trečiosios eilės minorą (jei tokio minoro nėra, tai rangas lygus 3) ir t. t. Radę r -osios eilės nelygų nuliui minorą, ieškome jį gaubiančio $(r+1)$ -osios eilės nelygaus nuliui minoro. Jei tokio minoro nėra, tai rangas lygus r .

Pavyzdys. Apskaičiuokime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

rangą.

Antrosios eilės minoras

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Jį gaubiantis trečiosios eilės minoras

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 3 - 4 = -7 \neq 0.$$

Šį minorą gaubiantys ketvirtosios eilės minorai lygūs nuliui:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Todėl $\text{rang} A = 3$.

Iš Frobenijaus teoremos išplaukia šitokia išvada: *n -osios eilės kvadratinės matricos determinantas lygus nuliui tada ir tik tada, kai matricos rangas yra mažesnis už n .*

Tą išvadą galima formuluoti šiek tiek kitaip. *Determinantas lygus nuliui tada ir tik tada, kai bent viena jo eilutė yra kitų eilučių tiesinė kombinacija.* Analogiškas tvirtinimas galioja stulpeliams.

Be to, tą išvadą galima suformuluoti ir šitaip: *kvadratinė matrica A yra reguliari tada ir tik tada, kai $|A| \neq 0$.* Iš čia ir iš 76 teoremos išplaukia teigi-

nys: kvadratinė matrica A turi atvirkštinę matricą A^{-1} tada ir tik tada, kai $|A| \neq 0$.

Rasime atvirkštinės matricos išraišką.

87 teorema. *Matricai*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

kai $|A| \neq 0$, atvirkštinė matrica A^{-1} yra

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix};$$

čia A_{ij} yra elementų a_{ij} adjunktai ($i, j=1, \dots, n$).

Įrodymas. Sudauginę matricas A ir A^{-1} bei pasinaudoję 84 teorema, gauname matricą $C=(c_{ik})$, kurioje

$$c_{ik} = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{kai } i=k, \\ 0, & \text{kai } i \neq k. \end{cases}$$

Todėl $C=E_n$, ką ir reikėjo įrodyti.

87 teoremoje pateikta atvirkštinės matricos išraiška – formulė. Tačiau 78 teoremoje nurodytas atvirkštinės matricos radimo būdas yra žymiai paprastesnis, nes reikia atlikti mažiau veiksmų.

Naudodamiesi atvirkštinės matricos išraiška, pateikta 87 teoremoje, lengvai gauname *Kramerio taisyklę* (G. Cramer, 1704–1752, šveicarų matematikas).

Tiesinių lygčių sistemą iš n lygčių su n kintamųjų

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, \dots, n), \quad (S)$$

kurios matrica $A=(a_{ij})$ yra reguliari, t. y. $|A| \neq 0$, ir turi atvirkštinę matricą A^{-1} , užrašome matricine lygtimi

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Padauginę šios lygties abi puses iš matricos A^{-1} iš kairės, gauname sistemos sprendinį

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tačiau

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_j A_{j1} \\ \sum_{j=1}^n b_j A_{j2} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{j=1}^n b_j A_{jn} \end{pmatrix},$$

todėl

$$x_k = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^n b_j A_{jk} \quad (k=1, \dots, n).$$

Kadangi

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{jk} A_{jk},$$

tai

$$\sum_{j=1}^n b_j A_{jk}.$$

yra determinantas, gautas iš determinanto $|A|$ pakeitus jo k -ąjį stulpelį sistemos (S) laisvaisiais nariais. Pažymėję

$$|A| = \Delta \quad \text{ir} \quad \sum_{j=1}^n b_j A_{jk} = \Delta_k \quad (k=1, \dots, n),$$

gauname Kramerio taisyklę.

n tiesinių lygčių su n kintamųjų sistemos, kurios matricos determinantas $\Delta \neq 0$, sprendinį randame iš formulių

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k=1, \dots, n),$$

kuriose Δ_k yra n -osios eilės determinantas, gautas iš determinanto Δ pakeitus jo k -ąjį stulpelį sistemos laisvaisiais nariais.

Be abejo, kai $\Delta \neq 0$, sistema yra apibrėžta, t. y. egzistuoja tik vienas sprendinys.

Pavyzdys. Naudodamiesi Kramerio taisykle, išspręsimė lygčių sistemą

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5,$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4.$$

Apskaičiuojame Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 1 - 4 - 3 - 2 + 6 = 7.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 4 - 10 + 12 - 8 + 15 = 41.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 4 - 8 - 5 - 4 - 24 = -30.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 5 - 16 - 12 + 10 - 8 = -43.$$

Pritaikę formules, gauname

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{41}{7}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{30}{7}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{43}{7}.$$

Kramerio taisyklę galima taikyti ir bet kokioms suderintoms tiesinių lygčių sistemoms spręsti.

Jeigu tiesinių lygčių sistema suderinta ($\text{rang } A = \text{rang } B = r < n$), tai, atmetę tas lygtis, kurios yra kitų lygčių tiesinės kombinacijos, ir pakeitę, jei reikia, kintamųjų numeraciją, tą sistemą galime užrašyti šitaip:

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} x_j = b'_i \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$b'_i = b_i - \sum_{k=1}^{n-r} a_{ir+k} x_{r+k}.$$

Sistemos matricos determinantas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tada sistemos sprendiniai randami iš formulų

$$x_k = \frac{\Delta'_k}{\Delta} \quad (k = 1, \dots, r).$$

Δ'_k gaunamas iš determinanto Δ , pakeitus jo k -ąjį stulpelį laisvaisiais nariais b'_i ($i=1, \dots, r$), $x_{r+s}=t_s$ ($s=1, \dots, n-r$). Taigi sistemos sprendinys yra

$$\left(\frac{\Delta'_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta'_r}{\Delta}, t_1, \dots, t_{n-r} \right), \quad t_1, \dots, t_{n-r} \in L.$$

Pavyzdys. Išspręsimė lygčių sistemą

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ 3x_1 - 2x_2 &= 8, \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Kadangi trečioji lygtis yra pirmųjų lygčių suma, o ketvirtoji yra antrosios ir pirmosios skirtumas, tai duotoji sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 - x_3 + x_4, \\ 2x_1 - x_2 &= 5 + x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Apskaičiuojame Δ , Δ'_1 ir Δ'_2 :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1, \\ \Delta'_1 &= \begin{vmatrix} 3 - t_1 + t_2 & -1 \\ 5 + t_1 - t_2 & -1 \end{vmatrix} = 2(1 + t_1 - t_2), \\ \Delta'_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 - t_1 + t_2 \\ 2 & 5 + t_1 - t_2 \end{vmatrix} = -1 + 3(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Pasinaudoję Kramerio formulėmis, gauname sprendinį

$$(2(1 + t_1 - t_2), -1 + 3(t_1 - t_2), t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Sprendžiant sistemas pagal Kramerio taisyklę, reikia atlikti daug skaičiavimų, nors pačios formulės paprastos, lengvai išimenamos. Tais atvejais, kai $\text{rang } A = \text{rang } B = r \geq 4$, patartina sistemas spręsti Gauso metodu. Jeigu nežinome, kad $\Delta \neq 0$, visada patogiau sistemą spręsti Gauso metodu.

88 teorema. Būtina ir pakankama sąlyga, kad n tiesinių homogeninių lygčių su n kintamųjų sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$

turėtų nenulinį sprendinį, — jos matricos determinantas turi būti lygus nuliui.

Irodymas. Tiesinių homogeninių lygčių sistema visada yra suderinta. Pagal 65 teoremą ji yra neapibrėžta, kai $\text{rang } A < n$. Iš Frobenijaus teoremos išplaukia, kad taip gali būti tada ir tik tada, kai $|A| = 0$.

Pavyzdys. Sistemos

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0, \end{aligned}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

matricos determinantas

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-4 + 12 + 1 + 6 - 2 - 4) = -27 \neq 0.$$

Todėl ši sistema turi tiksliai nulinį sprendinį (0, 0, 0, 0).

§70. Laplaso teorema. Matricų sandaugos determinantas

Išvesime n -osios eilės determinanto bet kokios r ($1 \leq r < n$) eilės minoro ir adjunkto sąvokas.

n -osios eilės determinante išbraukime r eilučių, kurių numeriai $i_1, \dots, i_r$, ir r stulpelių, kurių numeriai $k_1, \dots, k_r$. r -osios eilės determinanta, kuri sudaro du kartus išbraukti elementai, t. y. elementai, esantys $i_1, \dots, i_r$ eilučių ir $k_1, \dots, k_r$ stulpelių sankirtose, vadiname r -osios eilės minoru ir žymime $M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}$. $(n-r)$ -osios eilės determinanta, kuri sudaro likusieji neišbraukti elementai, t. y. elementai, nepriklausantys nei $i_1, \dots, i_r$ eilutėms, nei $k_1, \dots, k_r$ stulpeliams, vadiname minoro $M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}$ jungtiniu minoru ir žymime $\overline{M}_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}$. Jungtinį minorą su ženklu $(-1)^{(i_1 + \dots + i_r) + (k_1 + \dots + k_r)}$ vadiname minoro $M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}$ adjunktu ir žymime $A_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}$, t. y.

$$A_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r} = (-1)^{(i_1 + \dots + i_r) + (k_1 + \dots + k_r)} \overline{M}_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}.$$

Pavyzdys. Paėmę determinanto

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

pirmąją, antrąją bei ketvirtąją eilutes ir antrąjį, trečiąjį bei penktąjį stulpelius, gauname 3-osios eilės minorą

$$M_{124, 235} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Jo jungtinis minoras yra 2-osios eilės determinantas

$$\overline{M}_{124, 235} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = M_{35, 14} = -A_{124, 235},$$

nes $(1+2+4) + (2+3+5) = 17$.

Lengva pastebėti, kad, kai $r=1$, gauname 1-osios eilės minorą, kuris lygus elementui a_{ik} (čia $i_1=i$, $k_1=k$). Tada jo jungtinis minoras yra šio elemento minoras M_{ik} , o jo adjunktas – šio elemento adjunktas A_{ik} . Taigi įvestieji r -osios eilės minorai ir jų adjunktai yra jau anksčiau nagrinėtųjų apibendrinimas.

Kai $r=1$, pasirinkę k -ąjį stulpelį, galime sudaryti n pirmosios eilės minorų, t. y. elementų $a_{1k}, \dots, a_{nk}$. Kai $1 \leq r < n$, pasirinkę r stulpelių, kurių numeriai $k_1, \dots, k_r$, iš jų elementų galėsime sudaryti tiek skirtingų r -osios eilės minorų, kiek skirtingų r eilučių rinkinių galėsime sudaryti iš n eilučių, t. y. C_n^r . Be abejo, tiek pat bus ir jų adjunktų. Toliau pateikiama teorema yra determinanto skleidimo pagal eilutę (stulpelį) apibendrinimas.

Laplaso teorema (P. S. de Laplace, 1749–1827, prancūzų mokslininkas). *n -osios eilės determinantas lygus visų galimų iš jo r ($1 \leq r \leq n-1$) stulpelių sudarytų r -osios eilės minorų ir jų adjunktų sandaugų sumai; jei parinktų stulpelių numeriai yra $k_1, \dots, k_r$ ($k_1 < \dots < k_r$), tai*

$$\Delta = \sum M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r} A_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r};$$

čia sumuojama pagal visus galimus derinius $i_1, \dots, i_r$ iš elementų $1, 2, \dots, n$. Analogiškas tvirtinimas teisingas ir eilutėms.

Įrodymas. 1. Pirmiausia įrodysime, kad kiekvienas sandaugos

$$M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r} A_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}$$

narys

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i_1 + \dots + i_r) + (k_1 + \dots + k_r)} (-1)^{I(j_1, \dots, j_r)} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \times \\ & \times (-1)^{I(s_1, \dots, s_{n-r})} a_{l_1 s_1} \dots a_{l_{n-r} s_{n-r}} \end{aligned}$$

yra determinanto Δ narys.

Kadangi r -osios eilės minoras $M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r}$ sudarytas iš elementų, priklausančių eilutėms, kurių numeriai $i_1, \dots, i_r$ ($i_1 < \dots < i_r$), ir stulpeliams, kurių numeriai $k_1, \dots, k_r$ ($k_1 < \dots < k_r$), o jo adjunktas sudarytas iš elementų, nepriklausančių nei toms eilutėms, nei tiems stulpeliams, tai $j_1, \dots, j_r$ yra skaičių $k_1, \dots, k_r$ kėlinys. $l_1 < \dots < l_{n-r}$ yra likusių eilučių numeriai ir $s_1, \dots, s_{n-r}$ yra likusių stulpelių numerių kėlinys. Taigi tos sandaugos indeksų keitiny

$$\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_r, l_1, \dots, l_{n-r} \\ j_1, \dots, j_r, s_1, \dots, s_{n-r} \end{pmatrix}$$

yra n -ojo laipsnio. Todėl sandaugos

$$a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} a_{l_1 s_1} \dots a_{l_{n-r} s_{n-r}}$$

ženklas determinante Δ yra

$$(-1)^{I(i_1, \dots, i_r, l_1, \dots, l_{n-r}) + I(j_1, \dots, j_r, s_1, \dots, s_{n-r})}.$$

Pirmajame kėlinyje inversijos yra tik tarp skaičių i ir l , nes $i_1 < \dots < i_r$ ir $l_1 < \dots < l_{n-r}$. Už skaičiaus i_1 yra $i_1 - 1$ mažesnis skaičius, už i_2 yra $i_2 - 2$ mažesni skaičiai, ..., už i_r yra $i_r - r$ mažesnių skaičių. Todėl

$$\begin{aligned} I(i_1, \dots, i_r, l_1, \dots, l_{n-r}) &= (i_1 - 1) + \dots + (i_r - r) = \\ &= (i_1 + \dots + i_r) - (1 + \dots + r). \end{aligned}$$

Kėlinio $j_1, \dots, j_r, s_1, \dots, s_{n-r}$ inversijų skaičių randame šitaip: tarp skaičių $j_1, \dots, j_r$ yra $I(j_1, \dots, j_r)$ inversijų, tarp skaičių $s_1, \dots, s_{n-r}$ yra $I(s_1, \dots, s_{n-r})$ inversijų, be to, žinome, kad $j_1, \dots, j_r$ yra skaičių $k_1, \dots, k_r$ kėlinys, todėl tarp skaičių $s_1, \dots, s_{n-r}$ yra $k_1 - 1$ skaičius, mažesnis už k_1 , $k_2 - 2$ skaičiai mažesni už k_2 , ..., $k_r - r$ skaičių, mažesnių už k_r . Todėl

$$\begin{aligned} I(j_1, \dots, j_r, s_1, \dots, s_{n-r}) &= I(j_1, \dots, j_r) + I(s_1, \dots, s_{n-r}) + \\ &+ (k_1 + \dots + k_r) - (1 + \dots + r). \end{aligned}$$

Tuo būdu gauname lygybes

$$\begin{aligned} I(j_1, \dots, j_r, s_1, \dots, s_{n-r}) + I(i_1, \dots, i_r, l_1, \dots, l_{n-r}) &= \\ = I(j_1, \dots, j_r) + I(s_1, \dots, s_{n-r}) + (i_1 + \dots + i_r) + \\ + (k_1 + \dots + k_r) - 2(1 + \dots + r) \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} (-1)^{I(i_1, \dots, i_r, l_1, \dots, l_{n-r}) + I(j_1, \dots, j_r, s_1, \dots, s_{n-r})} &= \\ = (-1)^{I(j_1, \dots, j_r) + I(s_1, \dots, s_{n-r}) + (i_1 + \dots + i_r) + (k_1 + \dots + k_r)}. \end{aligned}$$

Vadinasi, nurodytasis minoro ir adjunkto sandaugos narys yra determinanto narys.

2. Dabar įrodysime, kad sandaugose

$$M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r} A_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r},$$

$$M_{j_1 \dots j_r, k_1 \dots k_r} A_{j_1 \dots j_r, k_1 \dots k_r},$$

kai $\{j_1, \dots, j_r\} \neq \{i_1, \dots, i_r\}$, nėra narių, sudarytų iš tų pačių determinanto elementų. Iš tikrųjų, jei minorai sudaryti ne iš tų pačių eilučių, tai tarp numerių $j_1, \dots, j_r$ atsiras bent vienas j , kuriam nebus lygaus tarp $i_1, \dots, i_r$. Tada pirmojoje sandaugoje j eilutės elemento antrasis indeksas k nebus lygus nė vienam iš $k_1, \dots, k_r$, o antrojoje sandaugoje tos eilutės elemento antrasis indeksas bus lygus kuriam nors iš $k_1, \dots, k_r$.

Vadinasi, tos sandaugos neturės bendrų narių.

Taigi įrodėme, kad minoro ir adjunkto sandaugos kiekvienas narys yra determinanto narys, kad dvi sandaugos neturi bendrų narių.

3. Įrodysime, kad suma

$$\sum M_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r} A_{i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r},$$

turi $n!$ dėmenų (tiek, kiek ir determinantas).

Kai stulpelių numeriai $k_1, \dots, k_r$ fiksuoti, yra $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ skirtingų r -osios eilės minorų ir juos atitinkančių adjunktų $((n-r)$ -osios eilės determinantų) porų. Kiekvienas r -osios eilės minoras turi $r!$ narių, o jo adjunktas — $(n-r)!$ narių, todėl jų sandauga turi $n!(n-r)!$ narių. Sumą sudaro

$$C_n^r \cdot r! (n-r)! = n!$$

dėmenų.

Pasinaudoję determinantų 1 savybe, gausime analogiško tvirtinimo eilutėms įrodymą.

Determinantą skaičiuoti remiantis Laplaso teorema patogiau tada, kai daugelis determinanto elementų yra nuliai, būtent, kai r stulpelių elementai tik r eilutėse yra nenuliniai, o visi kiti yra nuliai. Tada tiksliai vienas r -osios eilės minoras gali būti nelygus nuliui, ir determinantas lygus to minoro ir jo adjunkto sandaugai.

Pavyzdžiai. 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ -5 & 6 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(1+3)+(1+2)} \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -351.$$

2.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 10 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 6 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{2+4+1+3} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Iš antrosios eilutės atėmę pirmąją ir prie trečiosios eilutės pridėję pirmąją, gauname antrąją determinantą. Po to taikome Laplaso teoremą. Paskutinį determinantą skaičiuojame atskirai:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -8 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = 53.$$

Gauname

$$\Delta = (-1)^{10} \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} 53 = -106.$$

Naudodamiesi Laplaso teorema, įrodome šitokią teoremą apie matricų sandaugos determinantą.

89 teorema. *Matricų sandaugos determinantas lygus dauginamųjų determinantų sandaugai, t. y. $|AB| = |A| |B|$.*

Įrodymas. Pagal Laplaso teoremą $2n$ -osios eilės determinantas

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| |B|.$$

Šiame determinante $(n+j)$ -ąją eilutę dauginame iš a_{ij} ($j=1, \dots, n$) ir pridame prie i -osios eilutės ($i=1, \dots, n$). Tokiu būdu atlikę veiksmus, gauname determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

kuriame $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ ($i, k=1, \dots, n$). Vadinas, matrica $C=(c_{ik})=AB$, todėl $|C|=|AB|$.

Pagal Laplaso teoremą gauname

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} (-1)^{(n+1)+\dots+(n+n)+(1+\dots+n)} |C| =$$

$$= (-1)^{n+n^2+(n+1)n} |AB| = (-1)^{2n(n+1)} |AB| = |AB|.$$

Taigi

$$\Delta = |A| |B| = |AB|.$$

Ši lygybė ir reiškia teoremos tvirtinimą.

Uždaviniai.

39. Apskaičiuokite matricų rangus, naudodamiesi Frobenijaus teorema:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & 5 & -8 & 10 \\ -6 & 2 & 9 & -15 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 12 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ -8 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -5 & 13 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & -15 \\ 3 & -3 & 5 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

40. Išspręskite tiesinių lygčių sistemas, naudodamiesi Kramerio taisykle:

$$\begin{array}{ll} a) x_1 + 3x_2 = 5, & b) 2x_1 - 8x_2 = 14, \\ 5x_1 - 6x_2 = 11; & -7x_1 + 49x_2 = -86; \\ c) 14x_1 - 13x_2 = 16, & d) 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 16, \\ 24x_1 + 3x_2 = -101; & 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -11, \\ & -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4; \\ e) 6x_1 + 7x_2 - x_3 = 5, & f) x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, & x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 3; & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ & -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1. \end{array}$$

41. Apskaičiuokite atvirkštinės matricos, naudodamiesi atvirkštinės matricos išraiška, pateikta 78 teoremoje:

$$\begin{array}{ll} a) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; & b) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 \neq 0; \\ c) \begin{pmatrix} 5 & -18 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}; & d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ f) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; & g) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

42. Apskaičiuokite determinanto

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 5 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

minorus $M_{13,25}$, $M_{245,145}$, $M_{135,234}$ ir adjunktus $A_{13,25}$, $A_{245,145}$, $A_{135,234}$.

43. Apskaičiuokite determinantus, naudodamiesi Laplaso teorema:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 0 & 0 \\ 15 & 6 & 5 & 6 \\ 18 & 23 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 14 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 20 & -10 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 & 1 \\ 15 & 23 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 & 3 & 15 & -75 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -5 & -25 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 11 & 1 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Vektorinės erdvės

§71. Vektorinės erdvės apibrėžimas ir paprasčiausios savybės

Be vidinių binarių algebrinių operacijų, aibėje tenka nagrinėti išorines binares operacijas. Išorinėmis operacijomis aibėje A vadiname funkcijas

$$B \times A \rightarrow A, \quad A \times B \rightarrow A.$$

Jau turėjome tokių operacijų pavyzdžių:

a) n -mačių vektorių-eilučių su realiomis komponentėmis daugyba iš skaičiaus – išorinė binarė operacija aibėje $\mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Žinome, kad operacijos

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \quad \text{ir} \quad \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

sutampa, nes buvo įrodyta, kad vektoriaus-eilutės daugyba iš skaičiaus yra komutatyvi;

b) stačiakampių $[m \times n]$ eilės matricų su lauko L elementais daugyba iš lauko L elementų yra išorinė binarė operacija

$$L \times \mathfrak{M}_{[m \times n]}(L) \rightarrow \mathfrak{M}_{[m \times n]}(L);$$

c) nesunku įsitikinti, kad tolydžių intervale $[a, b]$ funkcijų daugyba iš skaičiaus:

$$If(x)$$

yra išorinė operacija aibėje $C[a, b]$.

Šiame skyriuje išsamiau nagrinėsime algebrines struktūras, kurias vadinamos vektorinėmis erdvėmis.

Sakykime, V yra netuščia aibė, kurios elementus žymėkime graikiškomis raidėmis $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, o $(L, +, \cdot)$ (trumpai L) – laukas, kurio bazinės aibės elementus žymėkime lotyniškais raidėmis $a, b, c, \dots$. Tarkime, kad aibėje V apibrėžta vidinė binarė algebrinė operacija – sudėtis

$$V \times V \rightarrow V$$

ir išorinės binarės operacijos

$$L \times V \rightarrow V, \quad V \times L \rightarrow V,$$

vadinamos aibės V elementų daugyba (iš kairės ir iš dešinės) iš lauko L elementų.

Algebrinė struktūra $(V, +, \cdot)$ (čia $\cdot$ žymima išorinė daugyba) vadinama vektorine erdve virš lauko L , jei apibrėžtosios operacijos – sudėtis ir daugyba iš lauko elementų – turi šitokias savybes:

V.1. $(\forall \alpha, \beta \in V) \alpha + \beta = \beta + \alpha$ – sudėtis komutatyvi;

V.2. $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in V) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ – sudėtis asociatyvi;

V.3. $(\exists O \in V) (\forall \alpha \in V) \alpha + O = \alpha$ – sudėtis turi neutralųjį elementą;

V.4. $(\forall \alpha \in V) (\exists -\alpha \in V) \alpha + (-\alpha) = O$ – kiekvienas aibės V elementas turi priešingąjį elementą – simetrišką sudėties atžvilgiu;

V.5. $(\forall \alpha \in V) 1_L \cdot \alpha = \alpha$;

V.6. $(\forall \alpha \in V, l \in L) l\alpha = \alpha l$ – daugyba iš lauko L elementų komutatyvi (abi daugybos – iš kairės ir iš dešinės – sutampa);

V.7. $(\forall \alpha \in V, l, t \in L) (lt)\alpha = l(t\alpha)$ – daugyba iš lauko elementų asociatyvi;

V.8. $(\forall \alpha \in V, l, t \in L) (l+t)\alpha = l\alpha + t\alpha$ – daugyba iš lauko elementų distributyvi lauko sudėties atžvilgiu;

V.9. $(\forall \alpha, \beta \in V, l \in L) l(\alpha + \beta) = l\alpha + l\beta$ – daugyba iš lauko elementų distributyvi aibės V elementų sudėties atžvilgiu.

V.1–V.9 savybės vadinamos vektorinės erdvės virš lauko L apibrėžimo aksiomomis.

Vietoje „ $(V, +, \cdot)$ “ yra vektorinė erdvė virš lauko L “ sutrumpintai sakysime „ V – vektorinė erdvė virš lauko L “.

Vektorinės erdvės V virš L elementus $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ vadinsime *vektoriais*. Lauko L elementai dažnai vadinami *skaliariais*. Kai $L = \mathbb{R}$, vektorinę erdvę virš lauko $\mathbb{R}$ vadinsime tiesiog vektorine erdve (nepridedami „virš lauko $\mathbb{R}$ “).

Prisiminę komutatyviosios grupės apibrėžimą, galime konstatuoti, kad aibė V su sudėtimi (struktūra $(V, +)$) yra komutatyvioji grupė. Todėl kartais sakoma: komutatyvioji grupė $(V, +)$ vadinama vektorine erdve virš lauko L , jeigu joje apibrėžta daugyba iš lauko L elementų, turinti V.5–V.9 savybes.

Nors sudėties operacijos aibėje V ir lauke L žymimos tuo pačiu ženklu $+$, jos skiriasi. Taip bus visada, kai tik $L \neq V$. Ta pati pastaba tinka ir daugybai iš skaliarų bei daugybai lauke L .

Pavyzdžiai. 1. n -mačių vektorių-eilučių erdvė $\mathbb{R}^n$ yra vektorinė erdvė virš $\mathbb{R}$ (realiųjų skaičių lauko). Taip yra todėl, kad 49 paragrafe įrodytos 1–4 vektorių-eilučių sudėties savybės yra ne kas kita, kaip V.1–V.4 savybės aibėje $\mathbb{R}^n$, o tame pačiame paragrafe įrodytos 1–5 vektoriaus-eilutės daugybos iš skaičiaus savybės yra V.5–V.9 savybės aibėje $\mathbb{R}^n$.

2. n -mačių vektorių-stulpelių erdvė $(\mathbb{R}^n)^T$ irgi yra vektorinė erdvė virš $\mathbb{R}$.

3. $[m \times n]$ eilės matricų, kurių elementai yra iš lauko L , aibė $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(L)$ su sudėtimi ir daugyba iš lauko L elementų yra vektorinė erdvė virš L . Tai išplaukia iš 59 paragrafe įrodytų matricų sudėties 1–4 savybių, kurios yra V.1–V.4 savybės, ir iš ten pat įrodytų matricų daugybos iš lauko L elementų 1–5 savybių, kurios yra V.5–V.9 savybės aibėje $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(L)$.

4. Paėmę $[1 \times n]$ eilės matricų aibę, gausime

$$\mathfrak{M}_{[1 \times n]}(L) = L^n,$$

$$\mathfrak{M}_{\{m \times 1\}}(\mathbf{L}) = (\mathbf{L}^m)^T.$$

Todėl vektorių-eilučių su komponentėmis iš lauko $\mathbf{L}$, taip pat vektorių-stulpelių su komponentėmis iš lauko $\mathbf{L}$ aibės yra vektorinės erdvės virš $\mathbf{L}$.

Kadangi $(V, +)$ yra komutatyvioji grupė, tai vektorių sudėtis, be apibrėžime suformuluotų V.1–V.4 savybių, turi visas komutatyviosios grupės operacijos savybes (žr. § 27). Skaitytojui pačiam siūlome suformuluoti grupės 1–8 savybių analogus vektorinei erdvei. Toliau juos laikysime žinomais.

Pažymėsime, kad *sudėties neutralusis elementas* O , kurio egzistavimas išplaukia iš V.3, vadinamas nuliniu vektoriumi.

Be grupinių sudėties savybių, vektorinėje erdvėje yra savybių, kuriomis pasižymi daugyba iš skaliaro ir abu veiksmi.

$$1. (\forall \alpha \in V) 0_L \cdot \alpha = O.$$

Įrodymas. Kadangi pagal V.5, V.7

$$\alpha = 1_L \cdot \alpha = (1_L + 0_L) \alpha = 1_L \cdot \alpha + 0_L \cdot \alpha = \alpha + 0_L \cdot \alpha,$$

tai $0_L \cdot \alpha = O$.

$$2. (\forall l \in L) l \cdot O = O.$$

Įrodymas. Kadangi $\alpha + O = \alpha$, tai $l\alpha = l(\alpha + O) = l \cdot \alpha + l \cdot O$ ir $l \cdot O = O$.

$$3. (\forall \alpha \in V) (-1_L)\alpha = -\alpha.$$

Įrodymas. $(1_L + (-1_L))\alpha = 0_L \cdot \alpha = O$. Pagal V.8

$$(1_L + (-1_L))\alpha = 1_L \cdot \alpha + (-1_L)\alpha = \alpha + (-1_L)\alpha = O.$$

Iš čia gauname $-\alpha = (-1_L)\alpha$.

4. Dažnai naudosimės šitokiais V.8 ir V.9 savybių bendriniais:

$$4.1. (\forall l_1, \dots, l_m \in L) (\forall \alpha \in V) \left(\sum_{i=1}^m l_i \right) \alpha = \sum_{i=1}^m l_i \alpha;$$

$$4.2. (\forall l \in L) (\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in V) l \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n l \alpha_i;$$

$$4.3. (\forall l_1, \dots, l_m \in L) (\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in V) \left(\sum_{i=1}^m l_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_i \alpha_j.$$

Šios lygybės lengvai įrodomos matematinės indukcijos metodu.

Uždaviniai

1. Suformuluokite ir įrodykite vektorių sudėties savybes, atitinkančias grupės operacijos 1–8 savybes.

2. Įrodykite 4.1–4.3 savybes.

3. Patikrinkite, ar n -mačių vektorių-eilučių su sveikosiomis komponentėmis aibė $\mathbf{Z}^n$ sudaro vektorinę erdvę virš $\mathbf{Q}$.

4. Patikrinkite, ar $[m \times n]$ eilės matricų su racionaliaisiais elementais aibė sudaro vektorinę erdvę virš $\mathbf{R}$.

§72. Vektorinės erdvės virš L poerdviai. Poerdvių veiksmiai

Vektorinės erdvės V virš L poaibis V_1 vadinamas erdvės V poerdviu, jeigu V_1 yra vektorinė erdvė virš L .

Be abejo, kiekviena vektorinė erdvė virš L turi poerdvių. Aišku, kad aibė $\{O\}$, turinti tik vieną elementą O , yra erdvės V poaibis. Šiam poaibiui galioja vektorinės erdvės aksiomos. Taigi $\{O\}$ yra poerdvis. Vektorinė erdvė V yra savo pačios poerdvis, nes $V \subset V$. Poerdvius $\{O\}$ ir V vadiname *trivialiais poerdviais*.

Kaip patikrinti, ar vektorinės erdvės V virš L poaibis V_1 yra jos poerdvis?

90 teorema. *Vektorinės erdvės V virš L poaibis V_1 yra tos erdvės poerdvis tada ir tik tada, kai: 1) $(\forall \alpha \in V_1) (\forall a \in L) \alpha a \in V_1$, 2) $(\forall \alpha, \beta \in V_1) \alpha + \beta \in V_1$.*

Įrodymas. Sąlygų būtinumas išplaukia iš apibrėžimo, t. y. iš to, kad V_1 yra vektorinė erdvė virš L .

Sąlygų pakankamumui įrodyti užtenka iš jų išvesti V.1–V.9 savybes.

Kadangi $V_1 \subset V$, o aibėje V veiksmiai turi V.1, V.2, V.5–V.9 savybes, tai šias savybes turi tie patys veiksmiai ir aibėje V_1 . Todėl reikia patikrinti V.3 ir V.4 savybes. Kadangi $(\forall \alpha \in V_1, l \in L) l\alpha \in V_1$, tai paėmę $l = 0_L$ ir koki nors $\alpha \in V_1$ pagal praeitame paragrafe įrodytą savybę gauname $0_L \cdot \alpha = O \in V_1$. Paėmę bet koki $\alpha \in V_1$, iš 2 sąlygos išvedame $-\alpha = (-1_L)\alpha \in V_1$. Taigi aibėje V_1 sudėtis turi V.3 ir V.4 savybes.

Pavyzdžiai. 1. Grynai menamų skaičių aibė, prijungus nulį, yra kompleksinių skaičių vektorinės erdvės poerdvis. Iš tikrųjų $a(ib) = i(ab) \in I$, $ib_1 + ib_2 = i(b_1 + b_2) \in I$; čia $i = (0, 1)$ – menamasis vienetas.

2. n -mačių vektorių-eilučių $(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$ aibė $R^n(k) = \{(a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0) \mid a_i \in R \ (i = 1, \dots, k)\}$ yra erdvės R^n poerdvis. Teoremos sąlygos lengvai patikrinamos.

Vektorinės erdvės virš L poerdvį paprasčiausiai galime sudaryti šitaip: imame erdvės V vektorius $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ir sudarome visus galimus vektorius $l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m$; čia $l_1, \dots, l_m$ – bet kokie lauko L elementai. Tokiu būdu gauname aibę

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i \mid l_i \in L \ (i = 1, \dots, m) \right\}.$$

Įrodysime, kad ta aibė yra erdvės V virš L poerdvis. Tikrinsime, ar tenkinamos teoremos sąlygos.

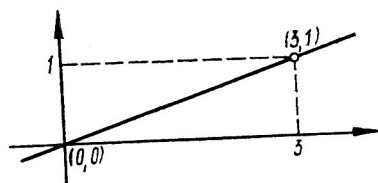
1. Jeigu $\alpha \in H$, tai $\alpha = \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i$. Tada esant bet kokiam $l \in L$ $l\alpha \in H$, nes

$$l\alpha = \sum_{i=1}^m (ll_i) \alpha_i; \text{ čia } ll_i \in L \ (i = 1, \dots, m).$$

2. Jeigu $\alpha, \beta \in H$, tai $\alpha = \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i$. Tada $\alpha + \beta = \sum_{i=1}^m (l_i + b_i) \alpha_i \in H$, nes $l_i + b_i \in L$ ($i = 1, \dots, m$).

Poerdvis $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ vadinamas vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ generuotu poerdviu.

Pavyzdžiui, vektorinėje erdvėje $\mathbf{R}^2$, paėmę $\alpha_1 = (3, 1)$, gausime $H = (\alpha_1) = \{l(3, 1) | l \in \mathbf{R}\}$. Geometriškai šį poerdvį galime interpretuoti tiesę, einančią per taškus $(0, 0)$ ir $(3, 1)$ (žr. 13 pav.).



13 pav.

Dvimačio vektoriaus $\alpha = (a, b)$ generuotą poerdvį $H(\alpha)$ galime interpretuoti tiesę, einančią per taškus, kurių koordinatės $(0, 0)$ ir (a, b) .

Paėmę, pavyzdžiui, trimačius vektorius $\alpha_1 = (1, 1, 1)$ ir $\alpha_2 = (1, 1, 0)$, gausime $H(\alpha_1, \alpha_2) = \{l_1 + l_2, l_1 + l_2, l_1\}$. Ši erdvė $\mathbf{R}^3$ poerdvį galime interpretuoti plokštuma, einančia per taškus, kurių koordinatės $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ ir $(1, 1, 0)$. Ir apskritai vieno trimačio vektoriaus generuotą poerdvį geometriškai galime interpretuoti tiesę erdvėje, o kiekvieną dviejų trimačių vektorių generuotą poerdvį – plokštumą, kurioje yra abu tie vektoriai.

Vektorinės erdvės virš L poerdvių sankirtai galioja šitokia teorema.

91 teorema. *Bet kokio skaičiaus vektorinės erdvės V virš L poerdvių $V_1, V_2, \dots$ sankirta yra tos erdvės poerdvis.*

Irodymas. Kadangi

$$(V_i \subset V (i = 1, 2, \dots)) \Rightarrow \left(\bigcap_i V_i \subset V \right),$$

tai užtenka patikrinti, ar išpildomos 90 teoremos sąlygos.

Pirmoji minėtos teoremos sąlyga išplaukia iš šitokio teiginio:

$$\left(\left(\alpha \in \bigcap_i V_i \right) \wedge (a \in L) \right) \Rightarrow \left((a \in V_i \ (i = 1, \dots)) \wedge (a \in L) \right) \Rightarrow \left(a \alpha \in \bigcap_i V_i \right).$$

Antroji sąlyga išplaukia iš teiginio

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta \in \bigcap_i V_i) &\Rightarrow (\alpha, \beta \in V_i \ (i = 1, 2, \dots)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha + \beta \in V_i \ (i = 1, 2, \dots)) \Rightarrow (\alpha + \beta \in \bigcap_i V_i). \end{aligned}$$

Vektorinės erdvės V virš L poerdvių $V_1, \dots, V_k$ suma vadiname aibę $B = \{\alpha | \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k, \alpha_i \in V_i (i=1, \dots, k)\}$, t. y. aibę, kurios elementai yra poerdvių $V_1, \dots, V_k$ elementų sumos. Poerdvių sumą žymime $V_1 + V_2 + \dots + V_k$.

92 teorema. *Vektorinės erdvės V virš L baigtinio skaičiaus poerdvių $V_1, \dots, V_k$ suma B yra tos erdvės poerdvis.*

Irodymas. Tikrinsime 90 teoremos sąlygas.

1) Jeigu $l \in L, \alpha \in V_1 + \dots + V_k$, tai yra tokie vektoriai $\alpha_1 \in V_1, \dots, \alpha_k \in V_k$, su kuriais $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$. Tada $l\alpha = l\alpha_1 + \dots + l\alpha_k$. Kadangi $l\alpha_i \in V_i (i=1, \dots, k)$, tai $l\alpha \in V_1 + \dots + V_k$.

2) Jeigu $\alpha, \beta \in V_1 + \dots + V_k$, tai $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k, \beta = \beta_1 + \dots + \beta_k$; čia $\alpha_i, \beta_i \in V_i, (i=1, \dots, k)$. Tada

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + \dots + (\alpha_k + \beta_k).$$

Kadangi $\alpha_i + \beta_i \in V_i (i=1, \dots, k)$, tai $\alpha + \beta \in V_1 + \dots + V_k$.

Jeigu kiekvieną poerdvių $V_1, \dots, V_k$ sumos $V_1 + \dots + V_k$ vektorių α galima užrašyti $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ pavidalu ($\alpha_i \in V_i (i=1, \dots, k)$) tiksliai vieninteliu būdu, tai poerdvių suma vadinama tiesiogine suma ir žymima $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

Aiškinsimės, kokių poerdvių suma yra tiesioginė.

93 teorema. *Jeigu nulinis vektorius išreiškiamas poerdvių $V_1, \dots, V_k$ vektorių suma tiksliai vieninteliu būdu, t. y. jei iš lygybės $O = \alpha_1 + \dots + \alpha_k (\alpha_i \in V_i (i=1, \dots, k))$ išplaukia $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = O$, tai poerdvių suma yra tiesioginė.*

Irodymas. Imkime $\alpha \in V_1 + \dots + V_k$. Jeigu α išraiškos yra

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_k (\alpha_i, \alpha'_i \in V_i (i=1, \dots, k)),$$

tai $O = (\alpha_1 - \alpha'_1) + \dots + (\alpha_k - \alpha'_k)$ ir iš teoremos sąlygų išplaukia, kad $\alpha_i = \alpha'_i (i=1, \dots, k)$.

94 teorema. *Būtina ir pakankama sąlyga, kad poerdvių B ir C suma būtų tiesioginė, yra $B \cap C = \{O\}$.*

Irodymas. Jeigu $B + C = B \oplus C$ ir yra toks $\alpha \neq O$, kad $\alpha \in B, \alpha \in C$, tai $-\alpha \in B$ ir $-\alpha \in C$. Tačiau $O = \alpha + (-\alpha) (\alpha \in B, -\alpha \in C)$ ir $O = (-\alpha) + \alpha (-\alpha \in B, \alpha \in C)$, t. y. turi dvi skirtingas išraiškas. Vadinasi, suma $B + C$ nėra tiesioginė. Prieštaravimas rodo, jog prielaida klaidinga.

Jeigu $B \cap C = \{O\}$ ir suma $B + C$ – netiesioginė, tai nulinį vektorių galima išreikšti šitaip: $O = \alpha + \beta$; čia $\alpha \in B, \beta \in C, \alpha \neq O$. Kadangi $\alpha = -\beta$, tai ir $-\alpha = \beta \in B$, ir β yra bendras nelygus nuliui abiejų poerdvių vektorius, t. y. $B \cap C \neq \{O\}$. Taigi prielaida, kad suma $B + C$ – netiesioginė, yra klaidinga.

Pavyzdžiai. 1. Trimačių vektorių erdvėje R^3 imkime vektorius $\alpha_1 = (1, 2, -1), \alpha_2 = (1, -1, 0), \alpha_3 = (0, 1, 1)$ ir sudarykime poerdvius $H(\alpha_1, \alpha_2) = \{(l_1 + l_2, 2l_1 - l_2, -l_1)\}, H(\alpha_2, \alpha_3) = \{(c_1, -c_1 + c_2, c_2)\}$, kuriuos generuoja atitinkamai vektoriai α_1, α_2 ir α_2, α_3 . Tada

$$H(\alpha_1, \alpha_2) + H(\alpha_2, \alpha_3) = \{(l_1 + l_2 + c_1, 2l_1 - l_2 - c_1 + c_2, -l_1 + c_2)\}.$$

Bet kuri to poerdvio vektorių α galime išreikšti skirtingais būdais:

$$\alpha = (l_1 + l_2 + c, 2l_1 - (l_2 + c), -l_1) + (c_1 - c, -(c_1 - c) + c_2, c_2);$$

čia su bet koku $c \in \mathbb{R}$

$$(c_1 - c, -(c_1 - c) + c_2, c_2) \in H(\alpha_2, \alpha_3),$$

$$(l_1 + l_2 + c, 2l_1 - (l_2 + c), -l_1) \in H(\alpha_1, \alpha_2).$$

Pavyzdžiui, $(2, 1, 0) = (\alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1 + 3\alpha_2) + (-2\alpha_2 + \alpha_3)$ ir pan.

Čia poerdvių sumos vektorius išreiškiamas poerdvių vektorių suma nevienareikšmiškai. Tų poerdvių suma nėra tiesioginė.

2. Imkime $H(\alpha_1)$ ir $H(\alpha_2)$; čia $\alpha_1 = (0, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 3, 0)$. Bet kuris sumos $H(\alpha_1) + H(\alpha_2)$ vektorius yra $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 = (l_2, l_1 + 3l_2, l_1)$ pavidalo ir tik vieninteliu būdu išreiškiamas poerdvių vektorių suma. Taigi suma

$$H(\alpha_1) + H(\alpha_2) = H(\alpha_1) \oplus H(\alpha_2)$$

yra tiesioginė.

Uždaviniai

5. Įrodykite: jeigu V_1 ir V_2 yra erdvės V poerdviai, tai $V_1 \cup V_2$ irgi erdvės V poerdvis.

6. Remdamiesi 90 teorema, nustatykite, ar šios aibės yra erdvės $\mathbb{R}^n$ poerdviai:

$$a) \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^n a_j x_j = 0 \right\}; \text{ čia } a_j \in \mathbb{R} \quad (j=1, \dots, n).$$

$$b) \{(a_1, a_2, \dots, a_k, 0, \dots, 0) \mid a_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, k\}.$$

$$c) \{(a, 0, \dots, 0, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

7. Išsiaiškinkite, kokią geometrinę prasmę turi erdvės $\mathbb{R}^2$ poerdviai, generuoti šių vektorių:

$$a) (2, -1); b) (-1, 1); c) (3, 7); d) (-1, -5).$$

8. Išsiaiškinkite, kokią geometrinę prasmę turi erdvės $\mathbb{R}^3$ poerdviai, generuoti šių vektorių:

$$a) \alpha_1 = (0, 1, 0), \alpha_2 = (1, 0, 0);$$

$$b) \beta_1 = (2, -1, 1), \beta_2 = (2, 3, -1);$$

$$c) \gamma_1 = (2, 3, 2), \gamma_2 = (1, -1, 1), \gamma_3 = (1, 4, 1);$$

$$d) \delta_1 = (0, 1, 1), \delta_2 = (1, 1, 0), \delta_3 = (1, 2, 1), \delta_4 = (2, 3, 1).$$

9. Raskite 7 uždavinio, a ir b , poerdvių sumą ir sankirtą. Nustatykite, ar tų poerdvių suma yra tiesioginė.

10. Raskite 8 uždavinio, a ir b , poerdvių sumą ir sankirtą. Nustatykite, ar tų poerdvių suma yra tiesioginė.

11. Raskite 8 uždavinio, c ir d , poerdvių sumą ir sankirtą. Nustatykite, ar tų poerdvių suma yra tiesioginė.

§73. Vektorių tiesinė priklausomybė. Erdvės bazė ir dimensija. Erdvių izomorfizmai

Kad būtų paprasčiau, tarsime, jog $L = \mathbb{R}$, t. y. nagrinėsime vektorines erdves virš $\mathbb{R}$. Vektorinės erdvės V vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ generuoja poerdvį

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m l_i \alpha_i \mid l_i \in \mathbb{R} \quad (i=1, \dots, m) \right\}.$$

Įrodysime, kad erdvėje galima parinkti tokius vektorius, kurių generuotas poerdvis sutampa su visa erdve. Tuo tikslu apibendrinsime 50 paragrafo sąvokas.

Išraiška $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m$, kurioje $l_1, \dots, l_m$ – realieji skaičiai, vadinama vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tiesine kombinacija. Taip pat sakoma, kad vektorius α yra vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tiesinė išraiška, arba tiesinė kombinacija. Kai yra m vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, galimi du atvejai:

- 1) egzistuoja tokie realieji skaičiai $l_1, \dots, l_m$, ne visi lygūs nuliui, kad

$$l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m = 0; \quad (P)$$
- 2) lygybė (P) galima tik tuo atveju, kai visi

$$l_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Jeigu lygybė (P) galioja tik tuo atveju, kai $l_1 = \dots = l_m = 0$, tai vektorinės erdvės V vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vadinami tiesiškai nepriklausomais.

Priešingu atveju vektoriai vadinami tiesiškai priklausomais.

Kiekvienai vektorinei erdvei V yra teisingos tos pačios, kaip ir erdvei R^n , tiesinio priklausomumo teoremos.

1. Jeigu tarp vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra nulinis vektorius, tai jie tiesiškai priklausomi.
2. Jeigu vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai nepriklausomi, tai kiekviena jų dalis taip pat tiesiškai nepriklausoma.
3. Kad vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ būtų tiesiškai priklausomi, būtina ir pakanka, jog bent vienas vektorius būtų kitų vektorių tiesinė kombinacija.
4. Jeigu kiekvienas iš vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_k$ tiesinė kombinacija ir $k < m$, tai vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai priklausomi.

Visi šie teiginiai įrodomi panašiai kaip ir 47–50 teoremos, todėl čia jų neįrodinėsime.

Imkime kokį nors erdvės V vektorių rinkinį $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Jeigu išraiškoje $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m$ skaičiai nepriklausomai vienas nuo kito „perbėga“ realiųjų skaičių aibę R , tai vektorius α perbėga aibę $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, kuri yra erdvės V poerdvis. Šią aibę visiškai apibrėžia vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Jeigu $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = V$, tai toks vektorių rinkinys generuoja pačią erdvę V . Jeigu, be to, tas rinkinys yra dar ir tiesiškai nepriklausomas, tai jis vadinamas erdvės V baze.

Jeigu vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai nepriklausomi ir kiekvienas erdvės V vektorius α yra tų vektorių tiesinė kombinacija, tai rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vadinamas vektorinės erdvės V baze.

Toliau nagrinėsime tik tokias vektorines erdves, kurių bazės sudarytos iš baigtinio skaičiaus vektorių. Tokioms erdvėms galioja šitokia teorema.

95 teorema. Visose vektorinėse erdvėse V bazėse yra vienodas skaičius vektorių: jeigu $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ir $\beta_1, \dots, \beta_n$ yra bazės, tai $n=m$.

Irodymas. Kadangi $\beta_1, \dots, \beta_n$ yra bazė, tai kiekvienas erdvės V vektorius yra tos bazės vektorių tiesinė kombinacija. Todėl ir $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tų vektorių tiesinės kombinacijos. Jeigu tartume, kad $n < m$, tai iš tiesinio priklausomumo 4 savybės išplauktų, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai priklausomi. Bet to negali būti, nes jie sudaro bazę. Taigi $n \geq m$.

Analogiškai samprotaudami, prieisime išvadą, kad $m \geq n$. Šios nelygybės patvirtina, kad $m=n$.

Bazės vektorių skaičius n vadinamas erdvės dimensija. Pati erdvė V , kurios dimensija yra n , vadinama n -matę vektorine erdve.

Koeficientai $l_1, \dots, l_n$ išraiškoje $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n$ vadinami vektoriaus α koordinatėmis bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Kai fiksuota n -matės vektorinės erdvės bazė, kiekvieną vektorių α atitinka n skaičių rinkinys – vektoriaus koordinatės toje bazėje. Ar ta atitiktis abipus vienareikšmė? Į šį klausimą atsako teorema.

96 teorema. Kiekvieno n -matės vektorinės erdvės vektoriaus koordinatės pasirinktoje bazėje nustatomos vienareikšmiškai.

Irodymas. Jeigu $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n = l'_1\alpha_1 + \dots + l'_n\alpha_n$, tai atėmę panarius šias lygybes gauname

$$0 = \sum_{i=1}^n (l_i - l'_i) \alpha_i.$$

Kadangi vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tiesiškai nepriklausomi, tai

$$l_i = l'_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Išvada. Tarp n -matės vektorinės erdvės V ir n -mačių vektorių-eilučių erdvės R^n galima apibrėžti bijekciją $V \leftrightarrow R^n$, priskiriant vektoriui α jo koordinatę pasirinktoje bazėje vektorių-eilutę.

Pavyzdžiai. 1. Kompleksinių skaičių erdvėje K kompleksinio skaičiaus algebrinė išraiška $a+ib=a(1,0)+b(0,1)$ yra to skaičiaus išraiška bazėje $1, i$ (arba $(1, 0), (0, 1)$). Ši erdvė dvimatė, nes bazėje yra 2 vektoriai.

2. $[m \times n]$ eilės matricų aibė $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(R)$ bazę sudaro matricos E_{ij} . Jose visi elementai yra nuliai, išskyrus elementą, esantį i -ojoje eilutėje ir j -ajame stulpelyje. Tas elementas lygus 1 ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$), nes matricos E_{ij} yra tiesiškai nepriklausomos ir kiekviena matrica $A=(a_{ij})$ galima užrašyti šitaip:

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

Kadangi skirtingų matricų E_{ij} yra mn , tai aibė $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(R)$ yra mn -matė erdvė.

Remdamiesi 96 teoremos išvada, parinkę n -matės vektorinės erdvės V bazę, galime apibrėžti bijekciją $V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$, kiekvienam erdvės V vektoriui priskirdami jo koordinačių toje bazėje vektorių-eilutę. Ar tarp tų erdvių yra koks nors gilesnis ryšys, ar tai tik jų, kaip aibių, ekvivalentumas? Į šį klausimą atsakysime apibrėžę vektoriinių erdvių izomorfizmą.

Tarkime, kad V_1 ir V_2 yra vektorinės erdvės.

Funkcija $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$ vadinama erdvių V_1 ir V_2 izomorfizmu, jei

$$(\forall \alpha, \beta \in V, l \in \mathbb{R}) \quad \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \varphi(l\alpha) = l\varphi(\alpha).$$

Jeigu egzistuoja bent vienas erdvių V_1 ir V_2 izomorfizmas, tai erdvės V_1 ir V_2 vadinamos izomorfiškomis.

Jeigu $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$ yra erdvių V_1 ir V_2 izomorfizmas, tai:

- 1) *nulinio vektoriaus vaizdas yra nulinis vektorius,*
- 2) *tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinio vaizdas yra tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinys,*
- 3) *abi erdvės yra lygių dimensijų.*

Šios savybės įrodomos remiantis izomorfizmo apibrėžimu.

Pirmoji savybė išplaukia iš šitokių samprotavimų:

$$(\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha + O) = \varphi(\alpha) + \varphi(O)) \Rightarrow (\varphi(O) = O).$$

Antroji savybė išplaukia iš teiginio:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\sum_{i=1}^m l_i \varphi(\alpha_i) = O \right) \wedge (l_1, \dots, l_m \neq O) \right) \wedge \\ & \left(\sum_{i=1}^m l_i \varphi(\alpha_i) = \varphi \left(\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i \right) \right) \wedge (\varphi(O) = O) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = O \right) \wedge (l_1, \dots, l_m \neq O) \right). \end{aligned}$$

Norėdami įrodyti trečiąją savybę, tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra erdvės V_1 bazė. Paėmę bet koki $\beta \in V_2$, rasime $\alpha \in V_1$: $\varphi(\alpha) = \beta$. Kadangi $\alpha = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i$,

$$\text{tai } \beta = \varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^n l_i \varphi(\alpha_i).$$

Iš šios lygybės ir antrosios savybės išplaukia, kad vektoriai $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ sudaro bazę. Taigi ir erdvės V_2 dimensija lygi n .

97 teorema. *Dvi vektorinės erdvės yra izomorfiškos tada ir tik tada, kai jų dimensijos lygios.*

(Teorema suformuluota erdvėms virš realiųjų skaičių lauko. Ji bus teisinga ir vektorinėms erdvėms virš bet kurio lauko L . Įrodymas analogiškas.)

Būtinumas įrodytas – 3 savybė.

Pakankamumas. Tarkime, kad V_1 ir V_2 – dvi n -matės vektorinės erdvės ir jų bazės atitinkamai yra $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ir $\beta_1, \dots, \beta_n$. Apibrėžkime bijekciją $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$ šitaip: erdvės V_1 vektoriumi

$$\alpha = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i$$

priskirkime vektorių $\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^n l_i \beta_i$.

Kadangi

$$l\alpha = \sum_{i=1}^n (ll_i) \alpha_i, \text{ o kai } \beta = \sum_{i=1}^n t_i \alpha_i, \quad \alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (l_i + t_i) \alpha_i,$$

tai

$$\varphi(l\alpha) = \sum_{i=1}^n (ll_i) \beta_i = l \varphi(\alpha),$$

$$\varphi(\alpha + \beta) = \sum_{i=1}^n (l_i + t_i) \beta_i = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$$

Taigi ši bijekcija yra izomorfizmas.

Išvada. Kiekviena n -matė vektorinė erdvė yra izomorfiška erdvei R^n .

Uždaviniai

12. Nustatykite, kurie vektorių rinkiniai sudaro erdvės R^3 bazę:

- a) $\alpha_1 = (2, 1), \alpha_2 = (1, 1)$;
- b) $\beta_1 = (-3, 2), \beta_2 = (6, -4)$;
- c) $\gamma_1 = (1, 1), \gamma_2 = (1, -1), \gamma_3 = (3, -5)$.

13. Nustatykite, kurie iš pateiktų vektorių rinkinių sudaro erdvės R^3 bazę:

- a) $\alpha_1 = (3, 1, 1), \alpha_2 = (2, 4, 6)$;
- b) $\beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (1, 1, 0), \beta_3 = (1, 0, 0)$;
- c) $\lambda_1 = (2, 3, -1), \lambda_2 = (3, -2, 1), \lambda_3 = (-1, -3, 2)$;
- d) $\delta_1 = (3, 5, 6), \delta_2 = (2, 0, 0), \delta_3 = (2, -1, 1), \delta_4 = (0, 2, -3)$.

14. Nustatykite 7 ir 8 uždavinio poerdvių dimensijas.

15. Raskite vektoriaus $\alpha = (3, -5)$ koordinatas bazėje

$$\alpha_1 = (1, -1), \alpha_2 = (-2, 1).$$

16. Raskite vektorių $\alpha = (2, 3, -5)$ ir $\beta = (4, -7, 1)$ koordinatas bazėje

$$\alpha_1 = (2, 3, -5), \alpha_2 = (0, 1, 6), \alpha_3 = (0, 0, 4).$$

17. Patikrinkite, ar sudaro erdvės $\mathfrak{M}_{[2 \times 2]}(\mathbb{Q})$ virš $\mathbb{Q}$ bazę matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Raskite matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

koordinates toje bazėje.

18. Patikrinkite, ar sudaro erdvės $\mathfrak{M}_{[3 \times 2]}(\mathbb{R})$ bazę matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§74. Vektorinės erdvės bazių konstravimas. Bazių keitimas

n -matės vektorinės erdvės bazė gali būti kiekvienas tiesiškai nepriklausomų n vektorių rinkinys. Šis teiginys pagrįstas tokia teorema.

98 teorema. *Vektorinės n -matės erdvės vektorių rinkinys, sudarytas daugiau kaip iš n vektorių, yra tiesiškai priklausomas.*

Irodymas. Rinkinio $\beta_1, \dots, \beta_m$ kiekvieną vektorių galime išreikšti bazės vektoriais, kurių yra n . Kadangi $m > n$, tai pagal tiesinio priklausomumo ketvirtąją savybę vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_m$ yra tiesiškai priklausomi.

Prie tiesiškai nepriklausomų vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ prijungę bet kokį vektorių α , gausime tiesiškai priklausomų vektorių rinkinį $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Todėl $c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n + c\alpha = 0$; čia $(c_1, \dots, c_n, c) \neq 0$. Jeigu būtų $c=0$, tai $(c_1, \dots, c_n) \neq 0$, ir lygybė $c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$ reikštų, kad vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra tiesiškai priklausomi. Taigi $c \neq 0$, ir

$$\alpha = \sum_{i=1}^n l_i \alpha_i; \quad \text{čia} \quad l_i = -\frac{c_i}{c} \quad (i=1, \dots, n).$$

Kadangi α – bet koks erdvės V vektorius, tai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra bazė.

Visiškai aišku, kad n -matė vektorinė erdvė turi tiek bazių, kiek yra tiesiškai nepriklausomų n vektorių rinkinių.

Jeigu $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra bazė, tai kiekvienas vektorinės erdvės vektorius yra vektorių tiesinė kombinacija. Vadinasi, erdvę V generuoja vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, arba

$$V = H(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Kadangi vektoriaus koordinatės bazėje nustatomos vienareikšmiškai, tai vektoriaus α išraiška $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n$ yra vienintelė. Taigi erdvė V yra po-erdvių $H(\alpha_i)$, kuriuos generuoja vektoriai α_i ($i=1, \dots, n$), tiesioginė suma, t. y.

$$V = H(\alpha_1) \oplus \dots \oplus H(\alpha_n).$$

Kaipgi galima sudaryti n -matės erdvės V bazę?

Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra tiesiškai nepriklausomi. Jeigu $m=n$, tai tie vektoriai sudaro bazę. Jeigu $m < n$ (atskiru atveju, kai $m=1$, α_1 yra bet koks nenulinis erdvės vektorius), tai rinkinį $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ galime papildyti iki bazės samprotaudami šitaip.

Kadangi $m < n$, tai poerdvis $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ nesutampa su erdve V . Todėl erdvėje V egzistuoja vektorius $\alpha_{m+1} \notin H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ tiesiškai nepriklausomas, nes priešingu atveju vektorius α_{m+1} priklausytų poerdviui $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Jeigu $m+1=n$, tai tas rinkinys yra bazė. Jeigu $m+1 < n$, tai $H(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}) \neq V$ ir erdvėje V egzistuoja vektorius $\alpha_{m+2} \notin H(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1})$. Vektorių rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+2}$ yra tiesiškai nepriklausomas. Jeigu $m+2=n$, tai šis rinkinys yra bazė. O jeigu $m+2 < n$, tai procesas tęsiame toliau.

Po $n-m$ žingsnių gausime n tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinį, kuris sudarys bazę.

Šis procesas vadinamas tiesiškai nepriklausomų vektorių *rinkinio papildymu iki bazės*.

Praktiškai, kai turime n -mačius vektorius-eilutes $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, šis procesas reiškia, kad prie eilučių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ reikia prirašyti tokius vektorius-eilutes $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$, kad gautoji n -osios eilės kvadratinė matrica

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

būtų reguliari, t. y. jos determinantas būtų nelygus nuliui.

Pavyzdys. Papildykime iki bazės vektorių rinkinį $\alpha_1=(2, 3, 1, -1)$, $\alpha_2=(-1, 3, -1, 1)$.

Galima įvairiai pildyti, pavyzdžiui, prijungti vektorius $\alpha_3=(2, 0, 2, -2)$, $\alpha_4=(2, 0, 3, -2)$. Kadangi determinantas

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

tai vektoriai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ yra tiesiškai nepriklausomi. Taigi

$(2, 3, 1, -1), (-1, 3, -1, 1), (2, 0, 2, -2), (2, 0, 3, -2)$

yra erdvės R^4 bazė.

Kadangi n -matė vektorinė erdvė V turi ne vieną bazę, tai neretai tenka spręsti šitokią uždavinį.

Duotos dvi bazės $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ir $\beta_1, \dots, \beta_n$. Pirmojoje bazėje vektoriaus α koordinatės yra $l_1, \dots, l_n$, t. y. $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_n\alpha_n$, o antrojoje bazėje jo koordinatės yra $b_1, \dots, b_n$, t. y. $\alpha = b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n$. Reikia nustatyti priklausomybę tarp šių koordinačių.

Kad būtų patogiau, bazę $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ žymėkime $[\alpha]$ ir vadinkime senąją bazę, o vektoriaus α koordinačių toje bazėje vektorių-eilutę žymėkime $(l_1, \dots,$

$l_n)_{[\alpha]}$. Bazę $\beta_1, \dots, \beta_n$ žymėkime $[\beta]$ ir vadinkime naująja baze, o vektoriaus α koordinačių toje bazėje vektorių-eilutę žymėkime $(b_1, \dots, b_n)_{[\beta]}$.

Kiekvienas naujosios bazės vektorius senojoje bazėje turi savo koordinates, t. y.

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \alpha_j \quad (i=1, \dots, n). \quad (6.1)$$

Matricą

$$T = (t_{ij}) \quad (i, j=1, \dots, n),$$

t. y. matricą, sudarytą iš naujosios bazės vektorių koordinačių senojoje bazėje, vadiname bazės keitimo matrica.

Pasinaudoję (6.1) formulėmis, lengvai gauname

$$\alpha = \sum_{i=1}^n b_i \beta_i = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n t_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_i t_{ij} \right) \alpha_j.$$

Kadangi $\alpha = l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n$, tai remdamiesi teorema, kad vektoriaus koordinatės pasirinktoje bazėje yra vienintelės, gauname

$$l_j = \sum_{i=1}^n b_i t_{ij} \quad (j=1, \dots, n).$$

Vadinasi,

$$(l_1, \dots, l_n)_{[\alpha]} = (b_1, \dots, b_n)_{[\beta]} T. \quad (6.2)$$

Irodėme šitokią teoremą.

99 teorema. *Vektoriaus koordinačių senojoje bazėje vektorius-eilutė lygi to paties vektoriaus koordinačių naujojoje bazėje vektoriaus-eilutės ir bazės keitimo matricos sandaugai.*

Norint išreikšti naujasias koordinates senosiomis, reikia remtis kita teorema.

100 teorema. *Bazės keitimo matrica T yra reguliari.*

Irodymas. Kadangi $\beta_1, \dots, \beta_n$ taip pat yra bazė, tai vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ turi savo koordinates toje bazėje, t. y.

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n h_{ki} \beta_i \quad (k=1, \dots, n).$$

Irašę į tą sumą β_i išraiškas iš (6.1) lygybių, gausime

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n h_{ki} \sum_{j=1}^n t_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n h_{ki} t_{ij} \right) \alpha_j \quad (k=1, \dots, n).$$

Kadangi

$$\alpha_k = 1 \cdot \alpha_k + 0 \cdot \alpha_1 + \dots + 0 \cdot \alpha_{k-1} + 0 \cdot \alpha_{k+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_n,$$

tai, pasinaudoję 96 teorema, nustatome, kad

$$\sum_{i=1}^n h_{ki} t_{ij} = \begin{cases} 1, & j=k, \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (k=1, \dots, n).$$

Šios lygybės reiškia, kad matricų $H=(h_{ki})$ ir T sandauga lygi vienetinei matricai. Taigi $H=T^{-1}$.

Dabar (6.2) lygybę dauginame iš dešinės iš matricos T^{-1} ; gauname išraišką

$$(b_1, \dots, b_n)_{[\beta]} = (l_1, \dots, l_n)_{[\alpha]} T^{-1}.$$

Taigi įrodėme dar vieną teorema.

101 teorema. *Vektoriaus koordinatinių naujojoje bazėje vektorius-eilutė lygi koordinatinių senojoje bazėje vektoriaus-eilutės ir bazės keitimo matricai atvirkštinės matricos sandaugai.*

Pavyzdžiai. 1. Vektoriaus koordinatės bazėje $[\alpha]$ yra $(1, -1, 3, 5)$. Rasime šio vektoriaus koordinatės naujoje bazėje $[\beta]$, jeigu bazės keitimo matrica yra

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kadangi

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

tai iš 101 teoremos išplaukia

$$(b_1, b_2, b_3, b_4)_{[\beta]} = (1, -1, 3, 5) T^{-1} = \left(-\frac{13}{12}, -\frac{4}{3}, -1, \frac{7}{4} \right).$$

2. Erdvėje R^3 duotos bazės:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 0, 0), & \beta_1 &= (1, 2, 3), \\ \alpha_2 &= (2, 2, 0), & \beta_2 &= (-2, 3, 0), \\ \alpha_3 &= (-3, 3, -3), & \beta_3 &= (1, -5, 2). \end{aligned}$$

Rasime bazės keitimo matricą.

Bazės keitimo matricą gauname išsprendę vektorines lygtis

$$\sum_{i=1}^3 t_{ij} \alpha_j = \beta_i \quad (i=1, 2, 3),$$

arba joms ekvivalenčias tiesinių lygčių sistemas

$$i=1, \quad \begin{aligned} t_{11} + 2t_{12} - 3t_{13} &= 1, \\ 2t_{12} + 3t_{13} &= 2, \\ -3t_{13} &= 3; \end{aligned}$$

$$i=2, \quad \begin{aligned} t_{21} + 2t_{22} - 3t_{23} &= -2, \\ 2t_{22} + 3t_{23} &= 3, \\ -3t_{23} &= 0; \end{aligned}$$

$$i=3, \quad \begin{aligned} t_{31} + 2t_{32} - 3t_{33} &= 1, \\ 2t_{32} + 3t_{33} &= -5, \\ -3t_{33} &= 2. \end{aligned}$$

Visos šios sistemos turi tą pačią matricą, skiriasi tik jų laisvieji nariai. Todėl jas sprendžiame kartu modifikuotu Gauso metodu:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

T yra dviem brūkšneliais atskirtos matricos transponuotoji matrica, t. y.

$$T = \begin{pmatrix} -7 & \frac{5}{2} & -1 \\ -5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Uždaviniai

19. Sukonstruokite erdvės R^3 bazę, į kurią įeitų vektoriai

$$\alpha_1 = (1, -1, 1) \text{ ir } \alpha_2 = (2, -3, 5).$$

20. Sukonstruokite erdvės R^4 bazę, į kurią įeitų vektoriai

$$\alpha_1 = (2, 1, -1, 3), \quad \alpha_2 = (-3, 2, 1, 1).$$

21. Duota senoji ir naujoji bazės:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 0, 0), & \beta_1 &= (2, 3, 1), \\ \alpha_2 &= (0, 1, 0), & \beta_2 &= (2, 4, -3), \\ \alpha_3 &= (0, 0, 1), & \beta_3 &= (4, 1, -2). \end{aligned}$$

Raskite bazės keitimo matricą T ir jai atvirkštinę matricą T^{-1} . Raskite vektoriaus $\alpha = 5\alpha_1 + 4\alpha_2 - 6\alpha_3$ koordinates naujojoje bazėje ir vektoriaus $\beta = -3\beta_1 + 2\beta_2 - 8\beta_3$ koordinates senojoje bazėje.

22. Bazėje $\alpha_1 = (2, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 3, 0, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, -5, 1)$, $\alpha_4 = (3, 4, -5, 2)$ vektoriaus α koordinatės yra $(1, -2, 3, -2)$. Raskite šio vektoriaus koordinates bazėje

$$\beta_1 = (-2, 3, -3, 0),$$

$$\beta_2 = (2, 3, 0, 1),$$

$$\beta_3 = (-3, 3, -3, 0),$$

$$\beta_4 = (1, 0, 4, 2).$$

23. Vektorių-stulpelių erdvės bazės yra

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ir

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Raskite bazės keitimo matricą T , jai atvirkštinę matricą T^{-1} ir koordinačių keitimo formules.

§75. Tiesinių homogeninių lygčių sistemos sprendinių erdvė

Jau įrodėme (žr. 57 teoremą), kad tiesinių homogeninių lygčių su realiaisiais koeficientais sistemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (H)$$

sprendinių tiesinė kombinacija yra tos sistemos sprendinys. Sprendinių aibė yra

$$S_H = \left\{ (l_1, \dots, l_n) \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \right\}.$$

Kadangi ši aibė turi 90 teoremos sąlygose išvardytas savybes ir $S_H \subset \mathbf{R}^n$, tai ji yra erdvės $\mathbf{R}^n$ poerdvis. Kokia šio poerdvio dimensija ir kaip rasti jo bazę?

102 teorema. Tiesinių homogeninių lygčių sistemos (H) sprendinių erdvės dimensija lygi $n-r$; čia r – sistemos matricos rangas.

Įrodymas. Kai $r=n$, sistema (H) turi vienintelį sprendinį $(0, 0, \dots, 0, 0)$. Todėl

$$S_H = \{ (0, \dots, 0) \},$$

ir jos dimensija lygi nuliui, t. y. $n-r=0$.

Jeigu $r=0$, tai $A=O$, t. y. visi sistemos (H) koeficientai yra nuliniai. Todėl kiekvienas n realiųjų skaičių rinkinys yra sistemos sprendinys. Vadinasi, $S_H = \mathbf{R}^n$, ir S_H dimensija lygi $n=n-r$.

Todėl teoremą reikia įrodyti tik tuo atveju, kai $0 < r < n$.

Įrodysime, kad egzistuoja $n-r$ sistemos sprendinių, kurie yra tiesiškai nepriklausomi ir sudaro erdvės S_H bazę.

kurie yra tiesiškai nepriklausomi, nes

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} = n-r$$

(matrica $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix}$) turi $(n-r)$ -osios eilės minorą, nelygų nuliui). Jei prie sprendinių $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ prijungsime kokį nors sprendinį $\beta = (h_1, \dots, h_n)$, tai, remdamiesi (6.3) išraiška, turėsime

$$\beta = \left(\sum_{j=1}^{n-r} u_{1j} c_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-r} u_{rj} c_j, c_1, \dots, c_{n-r} \right).$$

Ši lygybė reiškia, kad $\beta = c_1 \alpha_1 + \dots + c_{n-r} \alpha_{n-r}$. Kadangi β – bet koks sistemos (H') , kartu ir sistemos (H) sprendinys, tai sprendiniai $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ sudaro erdvės S_H bazę.

Tiesinių homogeninių lygčių sistemos (H) sprendinių erdvės S_H bazę vadiname fundamentine sprendinių sistema.

Norint rasti fundamentinę sprendinių sistemą, užtenka paimti $n-r$ tiesiškai nepriklausomų sprendinių. Iš įrodytos teoremos išplaukia, kad kiekviena tokia sistema bus erdvės S_H bazė, taigi ir fundamentinė sistema. Pati erdvė S_H yra erdvės $\mathbf{R}^n$ poerdvis, generuotas fundamentinės sprendinių sistemos.

Pavyzdys. Rasime tiesinių lygčių sistemos

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0,$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0$$

fundamentinę sprendinių sistemą.

Sistemos matricą keičiame atlikdami eilučių elementariusius pertvarkius:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 12 \\ 4 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gauname ekvivalentią sistemą

$$\begin{aligned} -4x_2 + x_3 + 12x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_3 - 8x_4 &= 0, \end{aligned} \quad \text{arba} \quad \begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{4} x_3 + 3x_4, \\ x_1 &= -\frac{5}{4} x_3 + 2x_4. \end{aligned}$$

Taigi bendrasis sprendinys yra

$$\left(-\frac{5}{4}t_1 + 2t_2, \frac{1}{4}t_1 + 3t_2, t_1, t_2\right),$$

arba

$$(-5t_1 + 8t_2, t_1 + 12t_2, 4t_1, 4t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Pasirinkę $t_1=1, t_2=0$ ir $t_1=0, t_2=1$, gauname fundamentinę sprendinių sistemą

$$\alpha_1 = (-5, 1, 4, 0), \quad \alpha_2 = (8, 12, 0, 4).$$

Tada kiekvieną sprendinį galime rasti iš formulės

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = c_1(-5, 1, 4, 0) + c_2(8, 12, 0, 4), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Duotos sistemos sprendinių erdvė yra keturmatės erdvės $\mathbb{R}^4$ dvimatis poerdvis, generuotas vektorių α_1 ir α_2 , t. y.

$$S_H = H(\alpha_1, \alpha_2) = H((-5, 1, 4, 0), (8, 12, 0, 4)).$$

Kadangi kiekvienas vektorinės erdvės poerdvis $V_1 \subset \mathbb{R}^n$ yra vektorinė erdvė ir turi savo dimensiją, tai, paėmę kokią nors to poerdvio bazę $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, gausime $V_1 = H(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Vadinasi, V_1 yra poerdvis, generuotas vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Kita vertus, tiesinių homogeninių rango r lygčių sistemos su n kintamųjų sprendinių aibė yra poerdvis, generuotas fundamentinės sprendinių sistemos, kurio dimensija lygi $n-r$. Kai $n-r=k$, gauname poerdvį, kurio dimensija yra k . Kyla klausimas: ar kiekvieną n -mačių vektorių erdvės $\mathbb{R}^n$ poerdvį gali generuoti tiesinių homogeninių lygčių sistema?

103 teorema. Kiekvienas erdvės $\mathbb{R}^n$ k -matis poerdvis V_1 yra tiesinių homogeninių lygčių su realiais koeficientais sistemos, kurioje yra n kintamųjų ir kurios rangas $r=n-k$, sprendinių erdvė.

Irodymas. Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ yra poerdvio V_1 bazė ir $\alpha_i = (l_{i1}, \dots, l_{in})$ ($i=1, \dots, k$). Raskime $X = (x_{ij})$ [$n-k \times n$] eilės matricą, kuri tenkintų lygtis

$$X\alpha_i^T = 0 \quad (i=1, \dots, k).$$

Šios matricinės lygtys reiškia tiesinių lygčių sistemas

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} x_{sj} = 0 \quad (s=1, \dots, n-k; \quad i=1, \dots, k).$$

Fiksavę $1 \leq s \leq n-k$, gauname sistemą

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} x_{sj} = 0 \quad (i=1, \dots, k).$$

Jos matricos $L = (l_{ij})$ ($i=1, \dots, k; j=1, \dots, n$) rangas lygus k . Taigi ši sistema turi $n-k$ tiesiškai nepriklausomų sprendinių

$$\tilde{\alpha}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \quad (i=1, \dots, n-k).$$

Irašę a_{sj} vietoj x_{sj} , gauname lygybes

$$\sum_{j=1}^n a_{sj} l_{ij} = 0 \quad (s=1, \dots, n-k; \quad i=1, \dots, k),$$

kurios reiškia, kad

$$A \alpha_i^T = 0 \quad (i=1, \dots, k);$$

čia

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_{n-k} \end{pmatrix}$$

yra $[n-k \times n]$ eilės matrica, kurios rangas lygus $n-k$.

Teiginys „ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tiesiškai nepriklausomi ir $A \alpha_i^T = 0$ ($i=1, \dots, k$), kai rang $A = n-k$ “ yra ekvivalentus teiginiui „ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sudaro tiesinių homogeninių lygčių sistemos

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

fundamentinę sprendinių sistemą“.

Teorema įrodyta.

Uždaviniai

21. Nustatykite tiesinių homogeninių lygčių sistemos sprendinių erdvės dimensiją ir raskite fundamentinę sprendinių sistemą:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ & 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ & x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \\ \text{b)} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0, \\ & 3x_1 - 4x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ & 2x_2 - x_3 + x_5 - 6x_6 = 0, \\ & -x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 - 7x_6 = 0, \\ & x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{array}$$

§76. Tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibės savybės

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema (matricine forma)

$$Ax^T = \beta \quad (\text{S})$$

ir ją atitinkanti homogeninių tiesinių lygčių sistema

$$Ax^T = 0; \quad (\text{H})$$

čia $A = (a_{ij})$ yra $[m \times n]$ eilės matrica, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\beta^T = (b_1, \dots, b_m)$. Sistemų (S) ir (H) sprendinių aibės glaudžiai susijusios ta prasme, kad visus sistemos (S) sprendinius galima rasti žinant sistemos (H) sprendinius ir bent vieną sistemos (S) sprendinį.

104 teorema. Jeigu $\alpha_0 = (l_1^{(0)}, \dots, l_n^{(0)})$ yra sistemos (S) sprendinys, tai kiekvienas sistemos (S) sprendinys $\alpha = (l_1, \dots, l_n)$ yra homogeninės sistemos (H) sprendinio $\gamma = (h_1, \dots, h_n)$ ir α_0 suma.

Įrodymas. Jeigu $A\alpha_0^T = \beta$ ir $A\alpha^T = \beta$, tai $A(\alpha - \alpha_0)^T = O$. Tai reiškia, kad $\gamma = \alpha - \alpha_0$ yra sistemos (H) sprendinys. Tačiau $\alpha = (\alpha - \alpha_0) + \alpha_0 = \gamma + \alpha_0$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Iš teoremos išplaukia, kad sistemos (S) sprendinių aibę S_N gausime prie visų poerdvio S_H vektorių pridėję vektorių α_0 ($A\alpha_0^T = \beta$). Sakoma, kad aibę S_N gaunama poerdvį S_H pastūmus vektoriais α_0 ; ji vadinama *tiesine daugdara*. Tiesinės daugdaros dimensija vadinama poerdvio S_H dimensija.

Tiesinė erdvė R^n daugdara apibrėžiama nesiejant jos su tiesinių lygčių sistema.

Jeigu A yra erdvės R^n poerdvis, o α_0 – fiksuotas erdvės R^n vektorius, tai aibę $D = \{\delta | \delta = \alpha + \alpha_0, \alpha \in A\}$ vadiname tiesine daugdara.

Jeigu $\alpha_0 \in A$, tai $D = A$ yra poerdvis. Jeigu $\alpha_0 \notin A$, tai $D \neq A$. Kadangi kiekvienas poerdvis A yra tam tikros homogeninių tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė, tai kiekviena tiesinė daugdara yra tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė. Be to, lengvai galima įsitikinti, kad tiesinę daugdarą visiškai apibūdina vienas tiesinis poerdvis. Iš tikrųjų, jeigu vieną $\delta \in D$ galima išreikšti dvejopai: $\delta = \alpha + \alpha_0 = \beta + \beta_0$, $\alpha, \beta_0 \in R^n$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, tai $\alpha = \beta + (\beta_0 - \alpha_0)$, t. y. A yra tiesinė daugdara, gauta poerdvį B pastūmus elementu $\beta_0 - \alpha_0$. Kadangi $O \in A$, tai atsiras toks $\beta \in B$, kad būtų $\beta + (\beta_0 - \alpha_0) = O$, t. y. $\beta_0 - \alpha_0 \in B$. Vadinasi, $\alpha = \beta + (\beta_0 - \alpha_0) \in B$; iš čia $A \subset B$. Analogiškai galima įsitikinti, kad $B \subset A$. Taigi $A = B$. Tiesinės daugdaros dimensiją pavadinus poerdvio, kurį pastūmus gaunama daugdara, dimensija, galima konstatuoti, kad *tiesinės daugdaros dimensija lygi $n - r$; čia r yra poerdvį A apibrėžiančios homogeninių lygčių sistemos rangas*.

1. Dažnai tiesinės lygties $\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$ sprendinių aibė vadinama *hiperplokštuma*. Ji yra tiesinė daugdara, kurios dimensija lygi $n - 1$. Kai $n = 3$, hiperplokštumą galima geometriškai interpretuoti plokštuma, o kai $n = 2$, – tiesė.

Iš tikrųjų, jei $n = 3$, tai tiesinė daugdara, kurios dimensija lygi 2, yra

$$(x, y, z) = \alpha + \alpha_0$$

(čia $\alpha \in H(\alpha_1, \alpha_2)$) pavidalo trimačių vektorių aibė. Bet dvimatį poerdvį generuoja tiesinė homogeninė lygtis su trimis kintamaisiais $au + bv + cw = 0$, kurios sprendinys yra $\alpha = (u, v, w)$. Pažymėkime $\alpha_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ir $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$. Kadangi $(x, y, z) = (u + x_0, v + y_0, w + z_0)$, tai $ax + by + cz = a(u + x_0) + b(v + y_0) + c(w + z_0) = d$. Taigi kiekvienas dvimatės tiesinės daugdaros taškas (x, y, z) tenkina lygtį $ax + by + cz = d$, kuri geometriškai reiškia plokštumą erdvėje. Kai tiesinė daugdara yra poerdvis, geometriškai ji reiškia plokštumą, einančią per koordinatų pradžią, nes $d = 0$.

2. Kai $n=3$, vienmatė tiesinė daugdara yra aibė $(x, y, z) = \alpha + \alpha_0$ pavidalo taškų ir $\alpha = (u, v, w)$ yra sprendiniai dviejų homogeninių lygčių sistemos su trimis kintamaisiais, kurios rangas 2, t. y.

$$a_1 u + b_1 v + c_1 w = 0,$$

$$a_2 u + b_2 v + c_2 w = 0.$$

Pažymėję $\alpha_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ir $d_1 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0$, $d_2 = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0$, kaip ir anksčiau, įsitikiname, kad kiekvienas vienmatės daugdaros taškas tenkina sistemą

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2.$$

Kadangi šios sistemos rangas lygus 2, tai geometriškai ji interpretuojama tiese erdvėje.

§77. Vektorių skaliarinė daugyba ir jos savybės

Vektorinės erdvės turi daug įdomių savybių. Tačiau įprastinė trimatė erdvė arba dvimatė erdvė (plokštuma) turi tokių savybių, kurioms analogiškų vektorinėse erdvėse dar nežinome.

Štai, pavyzdžiui, šiose erdvėse kiekvieną vektorių galima apibūdinti ilgiu. Du vektoriai sudaro kampą. Galima rasti atstumą tarp bet kurių erdvės arba plokštumos taškų. Erdvės arba plokštumos vektoriaus ilgis yra skaičius, priklausantis nuo to vektoriaus, taigi yra (skaitinė) reali to vektoriaus funkcija. Kampas tarp vektorių ar atstumas tarp dviejų taškų taip pat yra tų vektorių ar taškų funkcija.

Iš analizinės geometrijos žinome, kad vektoriaus ilgį, atstumą tarp vektorių galų ir kampą tarp vektorių galime apskaičiuoti naudodamiesi skaliarine daugyba.

Apibendrinsime skaliarinės daugybos sąvoką bet kokiai vektorinei erdvei. Remdamiesi ta sąvoka, įvesime vektoriaus ilgio, kampo ir atstumo tarp dviejų vektorių sąvokas (laukas L visur toliau bus realiųjų skaičių laukas).

Realiąją dviejų argumentų funkciją $\langle \alpha, \beta \rangle$, apibrėžtą vektorinėje erdvėje V , vadiname skaliarine daugyba, jei ji turi šias savybes:

- 1) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$,
- 2) $\langle l\alpha, \beta \rangle = l \langle \alpha, \beta \rangle$,
- 3) $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$,
- 4) $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, kai $\alpha \neq O$.

Skaliarinės daugybos reikšmę, kai vektoriai α, β yra konkretūs, vadiname tų vektorių skaliarine sandauga.

n-matę vektorinę erdvę, kurioje apibrėžta skaliarinė daugyba, vadiname *n*-mate Euklido erdve, arba *n*-mate metrine erdve.

Kiekvieną baigtinės dimensijos, t. y. *n*-matę, erdvę **V** galima paversti Euklido erdve, nes joje visada galima apibrėžti skaliarinę daugybą, be to, ne vieninteliu būdu. Vienas paprasčiausių būdų skaliarinei daugybai apibrėžti yra šitoks.

Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra kokia nors erdvės **V** bazė. Apibrėžkime bazės vektorių skaliarinės sandaugos reikšmes

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} d_i > 0, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \quad (6.4)$$

Jeigu $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$, tai tų vektorių skaliarinės sandaugos reik-

šmės, sakykime, yra $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i d_i$.

Irodysime, kad taip apibrėžta funkcija turi 1–4 savybes.

$$1. \langle \beta, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n b_i a_i d_i = \sum_{i=1}^n a_i b_i d_i = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

2. Kadangi $l\alpha = (la_1)\alpha_1 + \dots + (la_n)\alpha_n$, tai

$$\langle l\alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n (la_i) b_i d_i = l \sum_{i=1}^n a_i b_i d_i = l \langle \alpha, \beta \rangle.$$

3. Imkime $\gamma = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$; kadangi $\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)\alpha_i$, tai

$$\begin{aligned} \langle \alpha + \beta, \gamma \rangle &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) c_i d_i = \sum_{i=1}^n a_i c_i d_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n b_i c_i d_i = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle. \end{aligned}$$

4. Kai $\alpha \neq 0$, bent viena iš jo koordinačių nelygi nuliui, t. y. $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. Bet tada $\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^n d_i a_i^2 > 0$.

Skaičiai $d_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) (6.4) formulėse gali būti parinkti laisvai. Vadinasi, skaliarinė daugyba gali būti apibrėžta skirtingais būdais.

Nagrinėsime paprasčiausias skaliarinės daugybos savybes.

1. $\langle 0, \alpha \rangle = 0$ su kiekvienu vektoriumi α .

Kadangi $O = \alpha + (-\alpha)$, tai, prisiminę iš pradžių trečiąją, po to antrąją skaliarinės daugybos savybes, gausime

$$\langle O, \alpha \rangle = \langle \alpha + (-\alpha), \alpha \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle + (-1) \langle \alpha, \alpha \rangle = 0.$$

2. $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = O$.

Ši savybė yra ketvirtosios ir pirmosios savybių išvada.

3. $\langle l\alpha + t\beta, \gamma \rangle = l\langle \alpha, \gamma \rangle + t\langle \beta, \gamma \rangle$, $l, t \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta, \gamma \in V$.

Ši savybė gaunama remiantis trečiąją ir antrąją savybėmis.

4. Bet kokiems realiųjų skaičių rinkiniams $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k$ ir bet kokiems vektorių rinkiniams $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k$ teisinga lygybė

$$\left\langle \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^k b_j \beta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_i b_j \langle \alpha_i, \beta_j \rangle.$$

Ši savybė įrodoma matematinės indukcijos metodu, taikant indukcijos principą iš pradžių m , paskui n atžvilgiu.

Pavyzdžiai. 1. Erdvėje $\mathbf{R}^n$ dviejų vektorių

$$\alpha = (a_1, \dots, a_n), \quad \beta = (b_1, \dots, b_n)$$

skaliarinę sandaugą galime apibrėžti lygybe

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Akivaizdu, kad ji turi visas keturias nurodytas savybes.

2. Tolydžių baigtiniame intervale $[a, b]$ funkcijų aibėje $C[a, b]$ skaliarinę daugybą galima apibrėžti šitaip:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Visos keturios savybės išplaukia iš integralo savybių.

Uždaviniai

25. Skaliarinė daugyba erdvėje $\mathbf{R}^n$ apibrėžta natūraliu būdu, t. y.

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i;$$

čia a_i ir b_i yra vektorių α ir β komponentės.

Apskaičiuokite vektorių skaliarines sandaugas:

a) $\alpha = (2, 3)$, $\beta = (3, -4)$;

b) $\alpha = (1, -13)$, $\beta = (-6, -3)$;

c) $\alpha = (2, 4, -6)$, $\beta = (-1, -2, 3)$;

d) $\alpha = (3, -1, 2)$, $\beta = (-4, -5, -1)$;

e) $\alpha = (3, -2, 1, 5)$, $\beta = (3, -5, -18, 4)$;

f) $\alpha = (2, 3, 1, -5, -6, 7)$, $\beta = (-2, -3, 2, 1, 3, 10)$.[†]

26. Patikrinkite, ar funkcijos $(a_1, a_2)A(b_1, b_2)^T$ yra skaliarinė daugyba erdvėje $\mathbf{R}^2$, kai:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

§78. Koši — Buniakovskio nelygybė

Reiškinį $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ vadiname vektoriaus α ilgiu, arba moduliu (čia imama aritmetinė šaknies reikšmė).

Kad būtų trumpiau, žymėsime $\|\alpha\| = \langle \alpha, \alpha \rangle$.

Pavyzdžiui, jeigu erdvėje $\mathbf{R}^n$ skaliarinė daugyba apibrėžta šitaip: kai $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$, tada $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, tai vektoriaus $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ modulis yra

$$|\alpha| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Iš modulio apibrėžimo ir skaliarinės daugybos antrosios savybės išplaukia, kad su visais $\alpha \in V$ $|\alpha| \geq 0$; $|\alpha| = 0$ tada ir tik tada, kai $\alpha = 0$.

Atstumą tarp vektorių α ir β galima apibrėžti kaip skirtumo $\alpha - \beta$ ilgį, t. y. $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

Koši—Buniakovskio nelygybė (A. L. Cauchy, 1789–1857, prancūzų matematikas; B. Я. Буняковский, 1804–1889, rusų matematikas). *Bet kuriems dviem vektorinėse erdvėse, kurioje apibrėžta skaliarinė daugyba, vektoriams α ir β teisinga nelygybė*

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Be to, $|\langle \alpha, \beta \rangle| = |\alpha| |\beta|$ tada ir tik tada, kai $\beta = l\alpha$, t. y. kai vektoriai α ir β yra tiesiškai priklausomi.

Irodymas. Remsimės žinomu elementariosios algebros faktu: realiųjų skaičių lauke, kai $a > 0$,

$$(\forall x \in \mathbf{R}) ax^2 + 2bx + c > 0 \Leftrightarrow (b^2 - ac < 0).$$

Kai α ir β tiesiškai nepriklausomi, su kiekvienu realiuoju x teisinga nelygybė $x\alpha - \beta \neq 0$. Pagal ketvirtąją skaliarinės daugybos savybę $\langle x\alpha - \beta, x\alpha - \beta \rangle > 0$. Šią skaliarinę sandaugą galime užrašyti šitaip:

$$\langle x\alpha - \beta, x\alpha - \beta \rangle = x^2 \|\alpha\|^2 - 2x \langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2.$$

Kadangi pastarasis kvadratinis trinaris yra teigiamas, imant visas realiąsias x reikšmes, tai $\langle \alpha, \beta \rangle^2 - \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 < 0$, arba $\langle \alpha, \beta \rangle^2 < \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$. Ištraukę iš abiejų pusių kvadratinę šaknį, gauname $|\langle \alpha, \beta \rangle| < |\alpha| |\beta|$.

Kai α ir β tiesiškai priklausomi, $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, l\alpha \rangle = l \langle \alpha, \alpha \rangle$, arba $|\langle \alpha, \beta \rangle| = |\alpha| (|l| |\alpha|) = |\alpha| |\beta|$, nes

$$|l| |\alpha| = |l| \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \sqrt{\langle l\alpha, l\alpha \rangle} = |l\alpha| = |\beta|.$$

Jeigu $|\langle \alpha, \beta \rangle| = |\alpha| |\beta|$, tai $\langle \alpha, \beta \rangle^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle \cdot \langle \beta, \beta \rangle = 0$. Tada kvadratinis trinaris

$$\langle x\alpha - \beta, x\alpha - \beta \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle x^2 - 2\langle \alpha, \beta \rangle x + \langle \beta, \beta \rangle$$

turi realiąją šaknį. Tai reiškia, jog yra toks realusis skaičius l su kuriuo $\langle l\alpha - \beta, l\alpha - \beta \rangle = 0$. Pastaroji lygybė galima tik tada, kai $l\alpha - \beta = 0$. Tada $\beta = l\alpha$.

Erdvėje R^n , kai $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$, Koši–Buniakovskio nelygybė yra šitokia:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Šią nelygybę tenkina bet kokie realiųjų skaičių rinkiniai $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Ji vadinama Koši nelygybe.

Erdvėje $C[a, b]$ analogiškai gauname

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ši nelygybė vadinama Buniakovskio nelygybe.

Naudodamiesi Koši–Buniakovskio nelygybe, apibrėšime kampo tarp vektorių α ir β kosinusą. Kadangi kampo didumas (tiksliau – pagrindinė jo reikšmė tarp 0 ir π) nustatomas kampo kosinuso reikšme, tai kartu galėsime nustatyti ir kampus tarp vektorių.

Iš Koši–Buniakovskio nelygybės išplaukia

$$-1 \leq \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|} \leq 1.$$

Kampo tarp vektorių α ir β kosinusu vadiname reikšmę

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|};$$

$$\text{j\aa žymime } \cos(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| |\beta|}.$$

Nustatėme, kad $(|\langle \alpha, \beta \rangle| = |\alpha| |\beta|) \Leftrightarrow (\beta = l\alpha)$, todėl $\cos(\widehat{\alpha, \beta})$ lygus 1 arba -1 tiktai šiuo atveju. Tai visiškai atitinka įprastas plokštumos arba trimatės erdvės vektorių krypčių sutapimo arba jų priešingumo sąvokas:

$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = 1$ reiškia, kad kampas lygus nuliui, t. y. α ir β kryptys sutampa, o $\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = -1$ reiškia, kad kampas tarp vektorių lygus π , t. y. vektorių kryptys yra priešingos.

Vektoriai α ir β vadinami ortogonaliais ir rašoma $\alpha \perp \beta$, jeigu $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.

Iš skaliarinės daugybos savybių žinome, kad $\langle O, \alpha \rangle = 0$ su kiekvienu vektoriumi α . Taigi nulinis vektorius yra ortogonalus kiekvienam erdvės vektoriumi. Kai $\alpha \neq O$ ir $\beta \neq O$, iš lygybės $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ išplaukia, kad $\cos(\alpha, \beta) = 0$, ir atvirkščiai. Plokštumoje ir trimatėje erdvėje $\cos(\alpha, \beta) = 0$ reiškia, kad kampas tarp vektorių α ir β yra status. Todėl vektorių ortogonalumas erdvėje yra statmenumo sąvokos apibendrinimas. Beje, statmenumo sąvokos plokštumoje ir trimatėje erdvėje nereikia painioti su ortogonalumo sąvoka Euklido erdvėje. Mat ortogonalumo sąvoka priklauso nuo skaliarinės daugybos apibrėžimo būdo. Kadangi skaliarinę daugybą galime apibrėžti skirtingais būdais, tai tie patys vektoriai α, β , vienaip apibrėžus skaliarinę daugybą, gali būti ortogonalūs, o kitaip ją apibrėžus, – neortogonalūs.

Pavyzdys. Erdvėje R^3 apibrėžkime skaliarinę daugybą dviem būdais:

$$\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle_2 = 2a_1 b_1 + 3a_2 b_2 + 4a_3 b_3.$$

Abi apibrėžtosios funkcijos turi keturias skaliarinės daugybos savybes. Pirmuoju atveju vektoriai $\alpha = (1, 1, 2)$, $\beta = (1, 2, -1)$ yra neortogonalūs, nes $\langle \alpha, \beta \rangle_1 = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0$. Antruoju atveju skaliarinė sandauga $\langle \alpha, \beta \rangle_2 = 2 + 6 - 8$ lygi nuliui, todėl $\alpha \perp \beta$.

Taip yra todėl, kad toje pačioje erdvėje R^3 skirtingai apibrėžę skaliarinę daugybą gauname skirtingas Euklido erdves.

Uždaviniai

27. Apskaičiuokite vektorių modulius:

- a) $\alpha = (3, 2)$; b) $\alpha = (-1, -5)$; c) $\alpha = (-4, 4)$;
d) $\alpha = (3, 1, 1)$; e) $\alpha = (4, -1, -5)$; f) $\alpha = (1, 1, -3, -2)$;
g) $\alpha = (3, 2, -1, -1, -2)$.

28. Nustatykite, kurie iš šių vektorių yra ortogonalūs:

- a) $\alpha = (3, 2)$, $\beta = (1, -1)$; b) $\alpha = (2, 0)$, $\beta = (0, 15)$;
c) $\alpha = (-2, 7)$, $\beta = \left(2, \frac{4}{7}\right)$; d) $\alpha = (2, 3, -5)$, $\beta = (2, 2, 2)$;
e) $\alpha = (2, -1, 3, 5)$, $\beta = (-3, 7, 1, 2)$;
f) $\alpha = (1, 2, -1, 2, 4)$, $\beta = (2, -1, 2, 1, 0)$.

29. Raskite kampą tarp vektorių:

- a) $\alpha = (2, -1)$, $\beta = (-1, 3)$; b) $\alpha = (1, 1)$, $\beta = (1, -1)$;
c) $\alpha = (2, -2)$, $\beta = (-2, -2)$; d) $\alpha = (0, 1, 1)$, $\beta = (1, 1, 0)$;
e) $\alpha = (2, 3, -1)$, $\beta = (1, 0, 1)$; f) $\alpha = (3, -1, 1)$, $\beta = (2, 3, -1)$.

§79. Ortogonalieji vektorių rinkiniai

Vektorių rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vadinamas ortogonalioju, jeigu to rinkinio vektoriai poromis yra ortogonalūs, t. y.

$$\alpha_i \perp \alpha_j \quad (i \neq j).$$

Ortogonalusis vektorių rinkinys vadinamas ortonormuotuoju, jeigu kiekvieno jo vektoriaus ilgis lygus vienetui, t. y.

$$\alpha_i \perp \alpha_j \quad (i \neq j), \quad |\alpha_i| = 1 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ryšys tarp ortogonalumo ir tiesinio nepriklausomumo nusakomas šioje teorema.

105 teorema. *Ortogonalusis nenulinių vektorių rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas.*

Irodymas. Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra ortogonalųjų vektorių rinkinys ir $\alpha_i \neq 0$ ($i=1, \dots, m$). Jeigu jie būtų tiesiškai priklausomi, tai turėtume

$$\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i = 0 \quad \text{ir} \quad l_j \neq 0.$$

Padauginę lygybę skaliariškai iš vektoriaus α_j , gausime

$$l_j \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle + \sum_{i \neq j} l_i \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle 0, \alpha_j \rangle = 0.$$

Kadangi $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$, kai $i \neq j$ ir $l_j \neq 0$, tai $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = 0$. Tačiau $\alpha_j \neq 0$, todėl ši lygybė prieštarauja skaliarinės daugybos apibrėžimui. Taigi prielaida apie tiesinį priklausomumą yra neteisinga. Teisingas teoremos tvirtinimas.

Kiekvieną ortogonalųjį nenulinių vektorių rinkinį $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ galime normuoti sudarydami vektorius $\varepsilon_i = \frac{1}{\alpha_i} \alpha_i$, kurių ilgis lygus vienetui, nes

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle = \left\langle \frac{1}{|\alpha_i|} \alpha_i, \frac{1}{|\alpha_i|} \alpha_i \right\rangle = \frac{\|\alpha_i\|}{\|\alpha_i\|} = 1 \quad (i=1, \dots, m).$$

Pavyzdys. Trimatėje erdvėje $\mathbf{R}^3$, kai skaliarinė sandauga apibrėžta natūraliu būdu, t. y. $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$, vektoriai $\alpha = (1, 5, -7)$ ir $\beta = (6, 3, 3)$ yra ortogonalūs, nes $\langle \alpha, \beta \rangle = 6 + 15 - 21 = 0$. Normuodami šį rinkinį, apskaičiuojame $|\alpha|$ ir $|\beta|$:

$$\|\alpha\| = 1 + 25 + 49 = 75, \quad |\alpha| = 5\sqrt{3};$$

$$\|\beta\| = 36 + 9 + 9 = 54, \quad |\beta| = 3\sqrt{6}.$$

Vektoriai

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{5\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}} \right), \quad \varepsilon_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

yra ortogonalūs ir normuoti.

Kol kas nesidomėjome, ar kiekvienoje n -matėje Euklido erdvėje egzistuoja ortogonalieji vektorių rinkiniai. Iš 105 teoremos išplaukia, kad ortogonalųjį rinkinį gali sudaryti ne daugiau kaip n vektorių. Parodysime, kad n -matėje Euklido erdvėje yra ortogonalųjų vektorių rinkinių, turinčių nuo 2 iki n vektorių.

106 teorema. *Kiekvieną tiesiškai nepriklausomą vektorių rinkinį $\beta_1, \dots, \beta_m$ galima ortogonalizuoti, t. y. turint m tiesiškai nepriklausomų vektorių, galima sukonstruoti m ortogonalųjį vektorių.*

Įrodymas. $\beta_1, \dots, \beta_m$ tiesiškai nepriklausomi, todėl $\langle \beta_i, \beta_i \rangle \neq 0$ ($i = 1, \dots, m$). Pažymėkime $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 + c_{21}\alpha_1$. Skaičių c_{21} parinkime tokį, kad būtų $\alpha_1 \perp \alpha_2$, t. y. $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$. Kadangi $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1, \beta_2 \rangle + c_{21}\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle$, tai paėmę $c_{21} = -\frac{\langle \alpha_1, \beta_2 \rangle}{\|\alpha_1\|^2}$ gauname vektorius α_1, α_2 , kurie yra ortogonalūs.

Ieškome vektoriaus $\alpha_3 = \beta_3 + c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2$. Koeficientus c_{31}, c_{32} parenkame tokius, kad būtų $\alpha_3 \perp \alpha_1$ ir $\alpha_3 \perp \alpha_2$, t. y. juos randame iš lygčių

$$\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle + c_{31} \|\alpha_1\|^2 = 0,$$

$$\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle + c_{32} \|\alpha_2\|^2 = 0,$$

kurias gauname pasinaudoję sąlyga $\alpha_1 \perp \alpha_2$. Šių lygčių sprendiniai yra

$$c_{31} = -\frac{\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|^2}, \quad c_{32} = -\frac{\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_2\|^2}.$$

Tuo būdu gavome ortogonalius vektorius $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Tarkime, kad jau sukonstruoti ortogonalūs vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ ($k < m$). Imame $\alpha_k = \beta_k + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \alpha_i$. Koeficientus c_{ki} ($i = 1, \dots, k-1$) parenkame taip, kad būtų $\alpha_k \perp \alpha_i$ ($i = 1, \dots, k-1$). Naudodamiesi sąlygomis $\alpha_i \perp \alpha_j$ ($i \neq j, 1 \leq i, j \leq k-1$), gauname lygtis $\langle \beta_k, \alpha_i \rangle + c_{ki} \|\alpha_i\|^2 = 0$ ($i = 1, \dots, k-1$), kurių sprendiniai yra

$$c_{ki} = -\frac{\langle \beta_k, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \quad (i = 1, \dots, k-1).$$

Todėl vektorius

$$\alpha_k = \beta_k + \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\frac{\langle \beta_k, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|^2} \right) \alpha_i$$

yra ortogonalus vektoriams $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, t. y. rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ yra ortogonalus. Pakartoję procedūrą $m-1$ kartą, gausime ortogonalų rinkinį $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Tarp šių vektorių nėra nulinių. Iš tikrųjų, tarė, kad koks nors $\alpha_k = O$, gausime

$$\alpha_k = \beta_k + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \alpha_i = O.$$

Tačiau kiekvienas α_i yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_i$ tiesinė kombinacija, todėl ta lygybė virsta lygybe

$$\beta_k + \sum_{i=1}^{k-1} l_i \beta_i = O,$$

kuri reiškia, kad vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_k$ yra tiesiškai priklausomi. To negali būti. Todėl $\alpha_k \neq O$ su visais $k = 1, \dots, m$.

Pavyzdys. Ortogonalizuosime vektorius

$$\beta_1 = (1, 1, 1, 0),$$

$$\beta_2 = (1, 0, 2, 1),$$

$$\beta_3 = (1, 2, 2, -1).$$

Imame $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 + c_{21}\alpha_1$; čia $c_{21} = -\frac{\langle \beta_2, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|}$.

Kadangi $\langle \beta_2, \alpha_1 \rangle = 3$, $\|\alpha_1\| = 3$, tai $c_{21} = -1$,

$$\alpha_2 = (1, 0, 2, 1) - (1, 1, 1, 0) = (0, -1, 1, 1).$$

$$\alpha_3 = \beta_3 + c_{32}\alpha_2 + c_{31}\alpha_1, \quad c_{32} = -\frac{\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_2\|}, \quad c_{31} = -\frac{\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle}{\|\alpha_1\|}.$$

Apskaičiuojame c_{32} , c_{31} :

$$\langle \beta_3, \alpha_2 \rangle = \langle (1, 2, 2, -1), (0, -1, 1, 1) \rangle = 0 - 2 + 2 - 1 = -1,$$

$$\langle \beta_3, \alpha_1 \rangle = \langle (1, 2, 2, -1), (1, 1, 1, 0) \rangle = 1 + 2 + 2 + 0 = 5,$$

$$\|\alpha_2\| = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\text{Gauname } c_{32} = \frac{1}{3}, \quad c_{31} = -\frac{5}{3}$$

ir

$$\alpha_3 = (1, 2, 2, -1) + \frac{1}{3} (0, -1, 1, 1) - \frac{5}{3} (1, 1, 1, 0) = \left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Taigi vektoriai

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 0),$$

$$\alpha_2 = (0, -1, 1, 1),$$

$$\alpha_3 = \left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

yra poromis ortogonalūs. (Tai lengva patikrinti juos sudauginus.)

Jeigu vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_n$ yra tiesiškai nepriklausomi, tai vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, gauti ortogonalizavus pateiktuosius vektorius, sudaro n -matės Euklido erdvės E^n ortogonaliąją bazę.

Kiekvienas ortonormuotasis n vektorių rinkinys yra ortonormuota bazė.

Ortogonalios ir ortonormuotos bazės labai patogios. Tokiose bazėse skaliarinės sandaugos išraiška paprasta, lengvai randamos vektorių koordinatės.

107 teorema. *Vektoriaus koordinatės ortonormuotoje bazėje yra to vektoriaus ir atitinkamų bazės vektorių skaliarinės sandaugos.*

Irodymas. Tarkime, kad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra ortonormuota bazė. Lygybę

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$$

dauginaime skaliariškai iš ε_k ir gauname

$$\langle \alpha, \varepsilon_k \rangle = x_k \|\varepsilon_k\| + \sum_{i \neq k} x_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle.$$

Tačiau $\|\varepsilon_k\|=1$ ir $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle=0$, kai $i \neq k$. Todėl $x_k = \langle \alpha, \varepsilon_k \rangle$ ($k=1, \dots, n$).

Jeigu bazė $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra ortogonalė, tai vektorių α koordinatės $a_1, \dots, a_n$ apskaičiuojamos iš formulių

$$a_i = \frac{\langle \alpha, \alpha_i \rangle}{\|\alpha_i\|} \quad (i=1, \dots, n).$$

Bazės parinkimas atitinka koordinačių sistemos (plokštumoje arba įprastinėje trimatėje erdvėje) parinkimą. Ortogonalė bazė atitinka ortogonaliąją koordinačių sistemą. Ortonormuota bazė atitinka Dekarto ortogonaliąją koordinačių sistemą.

108 teorema. Jeigu vektorių α ir β koordinatės ortonormuotoje bazėje $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ atitinkamai yra $x_1, \dots, x_n$ ir $y_1, \dots, y_n$, tai tų vektorių skaliarinė sandauga lygi koordinačių sandaugų sumai.

Irodymas. Iš tikrųjų

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

nes

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = 0, \quad \text{kai } i \neq j.$$

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas.

109 teorema. Jei kokioje nors bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vektorių skaliarinė sandauga lygi atitinkamų koordinačių sandaugų sumai, tai bazė yra ortonormuota.

Irodymas. Jei vektorių

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j$$

skaliarinė sandauga lygi

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

tai, paėmę $\alpha=\beta=\alpha_k$, gausime $\langle \alpha_k, \alpha_k \rangle=1$, nes $x_k=y_k=1$ ir $x_i=y_i=0$, kai $i \neq k$. Paėmę $\alpha=\alpha_k, \beta=\alpha_j$ ($k \neq j$), gausime $\langle \alpha_k, \alpha_j \rangle=0$.

Uždaviniai

30. Sukonstruokite ortonormuotą erdvės $\mathbb{R}^3$ ir erdvės $\mathbb{R}^4$ bazę.

31. Ortogonalizuokite vektorių rinkinius:

a) $\alpha_1=(2, 5)$, $\alpha_2=(3, -1)$; b) $\alpha_1=(-7, 8)$, $\alpha_2=(3, 10)$;

c) $\alpha_1=(3, 2, 1)$, $\alpha_2=(-7, -3, 2)$, $\alpha_3=(2, -1, 5)$;

d) $\alpha_1=(1, 1, 0, 1)$, $\alpha_2=(3, 2, 1, -4)$, $\alpha_3=(4, 3, 2, -3)$, $\alpha_4=(2, 2, 1, 0)$.

32. Ortonormuokite bazę

$$\alpha_1=(1, 3, -3, 1),$$

$$\alpha_2=(2, 0, 6, 0),$$

$$\alpha_3=(-2, 1, 4, -2),$$

$$\alpha_4=(1, 0, -4, 0)$$

ir raskite vektorių $\alpha=(3, 5, -6, 3)$, $\beta=(-1, -3, 5, 7)$, $\lambda=(-2, -1, 9, 11)$ koordinates ortonormuotoje bazėje.

33. Ortonormuokite vektorius

$$\alpha_1=(3, 1, 4, 5),$$

$$\alpha_2=(2, -1, 1, -3),$$

$$\alpha_3=(-1, -2, -3, 4)$$

ir papildykite iki ortonormuotos bazės. Raskite vektorių $\alpha=(1, 1, -1, 1)$, $\beta=(3, -2, -1, 5)$, $\lambda=(-1, 7, -6, -5)$ koordinates toje ortonormuotoje bazėje.

§80. Ortogonalūs poerdviai. Euklido erdvių izomorfizmai

Kad ir kokie būtų ortogonalūs n -matės Euklido erdvės vektoriai α ir β , poerdvio $H(\alpha)$ kiekvienas vektorius yra ortogonalus kiekvienam poerdvio $H(\beta)$ vektoriui, nes $H(\alpha)=\{a\alpha|a\in\mathbb{R}\}$, o $H(\beta)=\{b\beta|b\in\mathbb{R}\}$ ir $\langle\alpha, \beta\rangle=0$.

Jei poerdvį V_1 generuoja vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, o poerdvį V_2 generuoja vektoriai $\beta_1, \dots, \beta_m$ ir $\alpha_i \perp \beta_j$ ($i=1, \dots, k, j=1, \dots, m$), tai kiekvienas poerdvio V_1 vektorius yra ortogonalus kiekvienam poerdvio V_2 vektoriui. Taip yra todėl, kad su bet kuriais

$$\alpha = \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i \quad \text{ir} \quad \beta = \sum_{j=1}^m b_j \beta_j$$

galioja lygybė $\langle\alpha, \beta\rangle=0$.

Poerdvis V_2 vadinamas ortogonalium poerdviu V_1 , jei kiekvienas poerdvio V_1 vektorius yra ortogonalus kiekvienam V_2 vektoriui. Žymime $V_1 \perp V_2$.

Poerdviai V_1 ir V_2 yra ortogonalūs tada ir tik tada, kai kiekvienas pirmojo poerdvio bazės vektorius yra ortogonalus kiekvienam antrojo poerdvio bazės vektoriui.

Du ortogonalūs poerdviai neturi bendrų nelygių nuliui vektorių. Todėl, jeigu $V_1 \perp V_2$, tai $V_1 \cap V_2 = \{O\}$. Iš šio teiginio ir tiesioginės sumos savybių išplaukia, kad *ortogonalųjų poerdvių suma yra tiesioginė suma*, t. y. $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.

n-matės Euklido erdvės V poerdviui V_1 ortogonalus poerdvis V_2 vadinamas poerdvio V_1 ortogonaliojo papildiniu, jei $V_1 \oplus V_2 = V$.

Pavyzdys. Kai $n=2$ ir vektorių $\alpha = (a_1, b_1)$, $\beta = (a_2, b_2)$ skaliarinė sandauga $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2$, poerdvio $H((a, b))$ (čia $a^2 + b^2 \neq 0$) ortogonalusis papildinys yra $H((b, -a))$, nes

$$H((a, b)) + H((b, -a)) = \{(c_1 a + c_2 b, c_1 b - c_2 a) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Kad ir koks būtų $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, visada egzistuoja tik viena pora tokių skaičių c_1 ir c_2 , kad

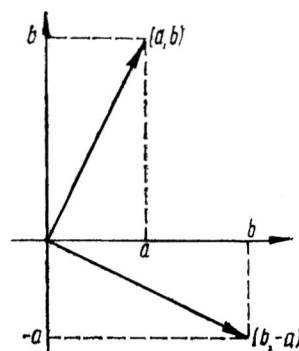
$$c_1 a + c_2 b = x,$$

$$c_1 b - c_2 a = y,$$

nes šios sistemos determinantas $\Delta = -(a^2 + b^2) \neq 0$.

Geometriškai tai reiškia (žr. 14 pav.), kad tiesės, kurios krypties vektorius yra (a, b) , ortogonalusis papildinys yra tiesė, kurios krypties vektorius yra $(b, -a)$.

Norėdami rasti poerdvio V_1 ortogonalųjį papildinį, parenkame poerdvio V_1 bazę $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ir po to erdvėje randame $n-k$ tiesiškai nepriklausomų vektorių $\beta_1, \dots, \beta_{n-k}$, kurie nepriklauso poerdviui V_1 ir yra ortogonalūs vektoriams $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Poerdvis $H(\beta_1, \dots, \beta_{n-k})$, generuotas vektorių $\beta_1, \dots, \beta_{n-k}$, ir yra poerdvio V_1 ortogonalusis papildinys.



14 pav.

Šis poerdvio ortogonaliojo papildinio konstravimo būdas paremtas 110 teoremos išvada.

110 teorema. *Poerdvių tiesioginės sumos dimensija lygi tų poerdvių dimensijų sumai.*

Įrodymas. Tarkime, kad $V_1 \cap V_2 = \{O\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ yra poerdvio V_1 bazė, o $\beta_1, \dots, \beta_m$ yra poerdvio V_2 bazė. Remiantis tiesioginės sumos savybe, kiekvienas sumos $V_1 \oplus V_2$ vektorius γ užrašomas vieninteliu būdu: $\gamma = \alpha + \beta$, $\alpha \in V_1$, $\beta \in V_2$.

Kadangi išraiškos $\alpha = \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{j=1}^m b_j \beta_j$ yra vienintelės, tai išraiška

$$\gamma = \sum_{i=1}^k a_i \alpha_i + \sum_{j=1}^m b_j \beta_j$$

taip pat vienintelė. Vadinasi, vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m$ tiesiškai nepriklausomi ir sudaro erdvės $V_1 \oplus V_2$ bazę. Taigi jos dimensija yra $k+m$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Išvada. Jeigu poerdvio dimensija yra k , tai jo ortogonaliojo papildinio dimensija lygi $n-k$.

Jeigu paimsime bet koki Euklido erdvės poerdvį V_1 su baze $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ir jo ortogonalųjį papildinį V_2 su baze $\beta_1, \dots, \beta_{n-k}$, tai tas bazes sujungę gaušime erdvės bazę $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{n-k}$.

Kiekvienas erdvės vektorius α gali būti išreikštas toje bazėje:

$$\alpha = \sum_{i=1}^k l_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j \beta_j.$$

Pažymėję $\delta = l_1 \alpha_1 + \dots + l_k \alpha_k$, $\gamma = t_1 \beta_1 + \dots + t_{n-k} \beta_{n-k}$, turime $\delta \in V_1$, $\gamma \in V_2$ ir $\alpha = \delta + \gamma$. Tokia išraiška yra vienintelė. Tai išplaukia iš to, kad $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.

Dėmuo $\delta \in V_1$ vadinamas vektoriaus α projekcija į poerdvį V_1 . Dėmuo $\gamma \in V_2$, ortogonalus poerdviui V_1 , vadinamas vektoriaus α statmeniu į poerdvį V_1 . Jo ilgis $|\gamma|$ vadinamas vektoriaus α atstumu iki poerdvio V_1 .

Baigdami šį skyrių, aptarkime Euklido erdvių izomorfizmus. Tarkime, kad E ir E' yra dvi Euklido erdvės su skaliarinėmis daugybmėmis, kurias žymėsime tuo pačiu ženklu $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Funkciją $\varphi: E \leftrightarrow E'$ vadiname erdvių E ir E' izomorfizmu, jei

$$(\forall \alpha, \beta \in E, l \in \mathbf{R}) \quad \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \varphi(l\alpha) = l\varphi(\alpha), \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle.$$

Jeigu egzistuoja bent vienas erdvių izomorfizmas, tai jos vadinamos izomorfiškomis.

111 teorema. Kiekvienos dvi n -matės Euklido erdvės yra izomorfiškos.

Irodymas. Tarkime, kad E ir E' yra n -matės Euklido erdvės, o $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n$ – jų ortonormuotos bazės. Bijekciją $\varphi: E \leftrightarrow E'$ apibrėžiame šitaip: jeigu $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$, tai $\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon'_i$.

Kadangi

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \epsilon_i \quad \text{ir} \quad l\alpha = \sum_{i=1}^n (lx_i) \epsilon_i,$$

kai

$$\beta = \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i, \quad l \in \mathbf{R},$$

tai

$$\varphi(\alpha + \beta) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \varepsilon'_i = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon'_i + \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon'_i = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

ir

$$\varphi(l\alpha) = \sum_{i=1}^n (lx_i) \varepsilon'_i = l \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon'_i = l\varphi(\alpha).$$

Ortonormuotose bazėse skaliarinė sandauga yra lygi vektorių atitinkamų koordinačių sandaugų sumai, todėl

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle.$$

Taigi apibrėžtoji bijekcija yra izomorfizmas.

Jeigu erdvėje $\mathbf{R}^n$ vektorių $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ skaliarinę sandaugą apibrėšime natūraliai:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

ir gautąją n -matę Euklido erdvę pažymėsime $\mathbf{E}^n$, tai iš įrodytosios teoremos gausime išvadą, kad visos n -matės Euklido erdvės yra izomorfiškos erdvei $\mathbf{E}^n$. Vadinasi, erdvę $\mathbf{E}^n$ galime interpretuoti kaip n -matės Euklido erdvės $\mathbf{V}$ vektorių koordinačių vektorių-eilučių kokioje nors ortonormuotoje bazėje $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ erdvę. Norint nuo vektoriaus-eilutės $(x_1, \dots, x_n)$ pereiti prie vektoriaus α , su kuriuo $\varphi(\alpha) = (x_1, \dots, x_n)$, užtenka naudotis išraiška

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i.$$

Uždaviniai

34. Raskite ortogonaliosius papildinius poerdvių, generuotų šių vektorių:

a) $\alpha = (3, -4)$;

b) $\alpha_1 = (3, -2, 1)$, $\alpha_2 = (-1, 1, 3)$;

c) $\alpha_1 = (4, 1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\alpha_3 = (2, -2, 1, 2)$.

35. Raskite tiesinių homogeninių lygčių sistemos

$$2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

sprendinių erdvės ortogonalųjį papildinį.

36. Raskite vektoriaus $\alpha = (3, 2, 5)$ projekciją ir statmenį į poerdvį $H((1, 1, 1), (-1, -2, 1))$. Raskite vektoriaus α atstumą iki to poerdvio.

37. Raskite vektoriaus $\alpha = (-4, -101, 10, 50)$ projekciją ir statmenį į 35 uždavinio homogeninių lygčių sistemos sprendinių aibės poerdvį. Raskite α atstumą nuo šio poerdvio.

38. Įrodykite:

a) vektorių α ir β sumos $\alpha + \beta$ projekcija į poerdvį V_1 lygi tų vektorių projekcijų į poerdvį sumai;

b) vektorių α ir β sumos $\alpha + \beta$ statmuo į poerdvį V_1 lygus tų vektorių statmenų į poerdvį sumai.

39. Dviejų argumentų realioji funkcija $d(\alpha, \beta)$, apibrėžta vektorinėje erdvėje, vadinama atstumu tarp taškų α ir β , jeigu:

1) $d(\alpha, \beta) > 0$, kai $\alpha \neq \beta$, ir $d(\alpha, \alpha) = 0$;

2) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$;

3) $d(\alpha, \lambda) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \lambda)$.

Įrodykite, kad funkcija $|\alpha - \beta|$ reiškia atstumą.

40. Įrodykite teoremą: jeigu $A = (a_{ij})$ yra simetrinė kvadratinė n -osios eilės matrica ir visi jos minorai

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{r1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad (r=1, \dots, n)$$

teigiami, tai funkcija $\alpha A \beta^T$ yra skaliarinė daugyba erdvėje $\mathbb{R}^n$.

Tiesiniai operatoriai

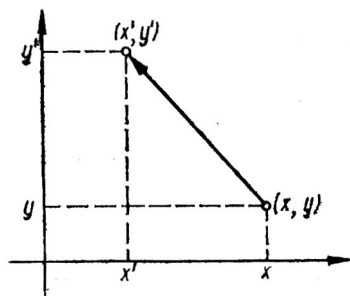
§81. Tiesinio operatoriaus apibrėžimas.
Pavyzdžiai

Viena iš svarbiausių matematikos sąvokų yra funkcijos sąvoka. Realus kintamojo funkcijų, atvaizduojančių realiųjų skaičių aibės poaibius aibėje $\mathbf{R}$, įvairias savybes nagrinėja matematinė analizė ir funkcijų teorija. Kompleksinio kintamojo funkcijų savybes tiria kompleksinio kintamojo funkcijų teorija. Šiame skyriuje nagrinėsime tam tikras funkcijas – tiesinius operatorius, tačiau kitu požiūriu negu tai daroma matematinėje analizėje. Mes domėsime tokių operatorių veiksmais ir jų savybėmis, jų ryšiu su matricomis ir kai kuriais kitais klausimais.

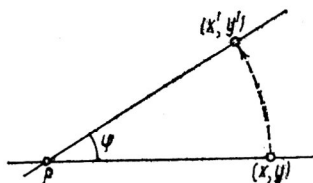
Pirmiausia išsiaiškinsime, kas yra operatorius.

Gana dažnos funkcijos, kurių argumentai ir reikšmės yra ne skaičiai, o kokių nors kitokių aibių elementai. Pateiksime keletą tokių funkcijų pavyzdžių.

1. Lygiagrečiuoju poslinkiu plokštumoje nurodyta kryptimi ir nurodytu atstumu kiekvienam plokštumos taškui (x, y) vienareikšmiškai priskiriamas apibrėžtas taškas (x', y') (žr. 15 pav.).



15 pav.



16 pav.

Toks poslinkis yra funkcija, plokštumos taškus atvaizduojanti į plokštumos taškus. Taigi jos argumentas ir reikšmė yra plokštumos taškai.

2. Posūkiu nurodytu kampu φ apie tašką P plokštumoje (žr. 16 pav.) (jei $\varphi > 0$, sukama prieš laikrodžio rodyklę, jei $\varphi < 0$ – pagal laikrodžio rodyklę) kiekvienam taškui (x, y) vienareikšmiškai priskiriamas taškas (x', y') . Taigi posūkis taip pat yra funkcija, kurios argumentas ir reikšmė – plokštumos taškai.

3. Transponuojant matricas, kiekvienai $[m \times n]$ eilės matricai A vienareikšmiškai priskiriama apibrėžta $[n \times m]$ eilės matrica A^T .

Taigi matricų transponavimas yra funkcija, kurios argumentas – $[m \times n]$ eilės matrica, o reikšmė – $[n \times m]$ eilės matrica.

4. n -matės vektorinės erdvės bazę $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ keičiant nauja bazę $\beta_1, \dots, \beta_n$, kiekvieno tos erdvės vektoriaus $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$ koordinatėms $(x_1, \dots, x_n)$ vienareikšmiškai priskiriamos to vektoriaus koordinatės naujoje bazėje $(x'_1, \dots, x'_n)$; čia $\alpha = \sum_{i=1}^n x'_i \beta_i$. Bazės keitimas irgi yra funkcija, kurios argumentas – n -matis vektorius-eilutė, o reikšmė – toks pat vektorius.

Pirmojo ir antrojo pavyzdžių funkcijos erdvę $\mathbf{R}^2$ atvaizduoja į $\mathbf{R}^2$, o ketvirtąjo pavyzdžio funkcija erdvę $\mathbf{R}^n$ atvaizduoja į $\mathbf{R}^n$. Tuo tarpu trečiojo pavyzdžio funkcija erdvę $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbf{R})$ atvaizduoja į erdvę $\mathfrak{M}_{[n \times m]}(\mathbf{R})$.

Matematikoje pasitaiko ir tokių funkcijų, kurios vieną vektorinę erdvę arba jos dalį atvaizduoja į kitą kokią nors vektorinę erdvę arba jos dalį. Pateiksime dar vieną pavyzdį.

5. Pasirinkę matricą

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

erdvės $\mathbf{R}^2$ vektoriumi (x_1, x_2) priskirkime erdvės $\mathbf{R}^3$ vektorių (y_1, y_2, y_3) šitaip:

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2)A = (2x_1 - x_2, x_1, x_1 + x_2).$$

Aišku, toks atvaizdis yra funkcija, kurią visiškai apibrėžia matrica A . Šios funkcijos argumentas yra erdvės $\mathbf{R}^2$ vektorius, jos reikšmė – erdvės $\mathbf{R}^3$ vektorius.

Matricą A pasirinkome neatsitiktinai. Vėliau matysime, kad nagrinėjamos funkcijos (operatoriai) gali būti vienareikšmiškai apibrėžiami naudojantis matricomis.

Vektorinėje erdvėje V_1 apibrėžta funkcija, kurios reikšmės yra vektorinės erdvės V_2 elementai, vadinama operatoriumi.

Operatorius žymėsime didžiosiomis rašytomis raidėmis $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$. Be to, operatoriaus ženklą rašysime argumento dešinėje pusėje, t. y. operatoriaus $\mathcal{A}$ reikšmę taške α žymėsime $(\alpha)\mathcal{A}$. (Erdvių V_1 ir V_2 vektorius šiame skyriuje vadinsime dar ir taškais.)

Pažymėkime $\mathcal{A}(V_1)$ operatoriaus $\mathcal{A}$ reikšmių aibę, t. y. erdvės V_1 vaizdą. Iš apibrėžimo išplaukia, kad $\mathcal{A}(V_1) \subset V_2$.

Du apibrėžtus erdvėje V_1 operatorius $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$, kurių reikšmės yra tos pačios erdvės V_2 elementai, vadinsime lygiais, jeigu su kiekvienu $\alpha \in V_1$ teisinga lygybė $(\alpha)\mathcal{A} = (\alpha)\mathcal{B}$.

Visų penkių pateiktųjų pavyzdžių funkcijos yra operatoriai. Pirmojo ir antrojo pavyzdžių operatorių apibrėžimo ir reikšmių sritis yra $\mathbf{R}^2$. Trečiojo pavyzdžio operatoriaus apibrėžimo sritis yra $[m \times n]$ eilės matricų erdvė $\mathcal{M}_{[m \times n]}(\mathbf{R})$, o reikšmių sritis yra $[n \times m]$ eilės matricų erdvė $\mathcal{M}_{[n \times m]}(\mathbf{R})$. Ketvirtojo pavyzdžio operatoriaus apibrėžimo ir reikšmių sritis yra erdvė $\mathbf{R}^n$. Penktojo pavyzdžio operatoriaus apibrėžimo sritis yra $\mathbf{R}^2$, o reikšmių sritis – erdvės $\mathbf{R}^3$ dalis.

Operatorius $\mathcal{A}$, apibrėžtas erdvėje V_1 , vadinamas tiesiniu operatoriumi, jei su bet kokiais erdvės V_1 vektoriais α, β ir kiekvienu realiuoju skaičiumi l teisingos lygybės:

- 1) $(l\alpha)\mathcal{A} = l((\alpha)\mathcal{A})$,
- 2) $(\alpha + \beta)\mathcal{A} = (\alpha)\mathcal{A} + (\beta)\mathcal{A}$.

Tiesinių operatorių pavyzdžiai.

1. Penktojo pavyzdžio operatorius yra tiesinis, nes $(l(x_1, x_2))\mathcal{A} = l(x_1, x_2)\mathcal{A}$, o matricų daugyba ir sudėtis yra distributyvi.
2. Vektorinėje erdvėje V , kurios bazė $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, imkime vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($m < n$) generuotą poerdvį $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Vektoriumi $\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_m\alpha_m$ priskirkime vektorių

$$(\alpha)\mathcal{P} = \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i.$$

Taip apibrėžiamo operatorių $\mathcal{P}$, kuris yra tiesinis, nes

$$(l\alpha)\mathcal{P} = \sum_{i=1}^m (la_i) \alpha_i = l \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i = l((\alpha)\mathcal{P}),$$

$$(\alpha + \beta)\mathcal{P} = \sum_{i=1}^m (a_i + b_i) \alpha_i = \sum_{i=1}^m a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i = (\alpha)\mathcal{P} + (\beta)\mathcal{P}.$$

Tas operatorius vadinamas n -matės erdvės V projektavimo į m -matį poerdvį $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ operatoriumi, arba projektoriumi.

3. Erdvėje V apibrėžkime operatorių $\mathcal{E}$ šitaip: kiekvienam $\alpha \in V$ priskirkime $(\alpha)\mathcal{E} = \alpha$.

Operatorius, kiekvienam vektoriumi α priskiriantis jį patį, vadinamas *tapačiuoju*, arba *vienetiniu*, operatoriumi ir žymimas $\mathcal{E}$.

4. Apibrėžkime operatorių $\mathcal{O}$ šitaip: kiekvieną $\alpha \in V$ atvaizduokime į $\mathbf{0}$. Šis operatorius, vadinamas *nulinio operatoriumi*, yra taip pat tiesinis. Lengvai įrodomos šitokios tiesinių operatorių savybės.

1. *Tiesinis operatorius nulinį vektorių $\mathbf{0}$ atvaizduoja į nulinį vektorių.*

Kad tai įrodytume, nulinį vektorių užrašome šitaip: $\mathbf{0} = \alpha + (-\alpha)$. Remdamiesi tiesinio operatoriaus apibrėžimu, gauname lygybę

$$(\mathbf{0})\mathcal{A} = (\alpha + (-\alpha))\mathcal{A} = (\alpha)\mathcal{A} + (-1)(\alpha)\mathcal{A} = (\alpha)\mathcal{A} - (\alpha)\mathcal{A} = \mathbf{0}.$$

2. Su bet kokiais realiaisiais skaičiais $l_1, \dots, l_m$ ir erdvės vektoriais $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ galioja lygybė

$$\left(\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i \right) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m l_i (\alpha_i) \mathcal{A}.$$

Ji lengvai patikrinama matematinės indukcijos metodu.

Uždaviniai

Nustatykite, kokiose erdvėse apibrėžti nurodytieji operatoriai, kokioms erdvėms priklauso jų reikšmės, kurie iš operatorių yra tiesiniai.

1. $(x_1, x_2, x_3) \mathcal{A} = (2x_1 + x_2, -x_2 + 3x_3).$

2. $(x_1, x_2, x_3) \mathcal{B} = (x_1^2, x_1 + x_2^2, x_3 - x_1, x_1 + x_2, x_3).$

3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mathcal{C} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$

4. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mathcal{D} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 x_1 \end{pmatrix}.$

5. $(x_1, x_2) \mathcal{G} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$

6. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

7. Įrodykite: $(\forall l_1, \dots, l_m \in \mathbb{R}, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in V)$

$$\left(\sum_{i=1}^m l_i \alpha_i \right) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m l_i (\alpha_i) \mathcal{A},$$

kai $\mathcal{A}$ yra tiesinis operatorius.

§82. Tiesiniai operatoriai ir matricos.

Operatorių sudėtis ir daugyba iš skaičiaus

Nagrinėsime tiesinį operatorių $\mathcal{A}$, apibrėžtą vektorinėje erdvėje V_1 , kurios dimensija lygi m . Tarkime, kad šis operatorius įgyja reikšmes iš vektorinės erdvės V_2 , kurios dimensija n , ir kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra kokia nors erdvės V_1 bazė, o $\beta_1, \dots, \beta_n$ – erdvės V_2 bazė. Kiekvieną $\alpha \in V_1$ galima išreikšti šitaip:

$$\alpha = \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i.$$

Pasinaudoję antrąja savybe, gauname lygybę

$$(\alpha) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m x_i ((\alpha_i) \mathcal{A}), \quad (7.1)$$

kuri reiškia, kad kiekvieno vektoriaus $\alpha \in V_1$ vaizdas $(\alpha)\mathcal{A}$ apibrėžtas, kai apibrėžti bazės vektorių vaizdai, t. y. kai žinomi vektoriai

$$(\alpha_i)\mathcal{A} \quad (i=1, \dots, m).$$

Kadangi vektoriai $(\alpha_i)\mathcal{A}$ ($i=1, \dots, m$) priklauso erdvei V_2 , o tos erdvės bazė yra $\beta_1, \dots, \beta_n$, tai vektoriai $(\alpha_i)\mathcal{A}$ bus žinomi, kai žinomos jų koordinatės bazėje $\beta_1, \dots, \beta_n$, t. y. kai žinomi tokie skaičiai a_{ij} ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$), kad

$$(\alpha_i)\mathcal{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j \quad (i=1, \dots, m). \quad (7.2)$$

Vadinasi, tuo atveju, kai erdvių V_1 ir V_2 bazės fiksuotos, operatorius $\mathcal{A}$ bus apibrėžtas tada ir tik tada, kai žinoma $[m \times n]$ eilės matrica $A = (a_{ij})$ – bazės vektorių vaizdų koordinačių matrica.

Erdvės V_1 bazės $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ vektorių vaizdų $(\alpha_i)\mathcal{A}$ koordinačių erdvės V_2 bazėje $\beta_1, \dots, \beta_n$ matrica vadinama operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica.

Taigi tiesinį operatorių $\mathcal{A}$, kai nurodytos abiejų erdvių bazės, abipus vienareikšmiškai atitinka matrica A – operatoriaus matrica.

Parinę erdvių V_1 ir V_2 bazes, nustatėme bijekciją tarp aibės tiesinių operatorių, apibrėžtų m -matėje erdveje V_1 ir įgyjančių reikšmes n -matėje erdveje V_2 , ir $[m \times n]$ eilės matricų aibės $\mathcal{M}_{[m \times n]}(\mathbb{R})$. Šios aibės yra ekvivalenčios. Vėliau nustatysime, kad tarp jų yra žymiai glaudesnis ryšys.

Vektorių $(\alpha_i)\mathcal{A}$ ($i=1, \dots, m$) reikšmes iš (7.2) lygybių išrašę į (7.1) išraišką ir sukeitę sumavimo tvarką, gauname

$$(\alpha)\mathcal{A} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \right) \beta_j.$$

Kadangi $(\alpha)\mathcal{A} \in V_2$, tai egzistuoja tokie $y_1, \dots, y_n$, kad

$$(\alpha)\mathcal{A} = \sum_{j=1}^n y_j \beta_j.$$

Pasinaudoję teorema apie vektoriaus koordinačių nurodytoje bazėje vienetį, iš tų išraiškų gauname lygybes

$$y_j = \sum_{i=1}^m x_i a_{ij} \quad (j=1, \dots, n),$$

kurios reiškia, kad

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_m) A. \quad (7.3)$$

Taigi įrodėme šitokią teoremą.

112 teorema. *Operatoriaus reikšmės koordinačių vektorių-eilutė lygi argumento koordinačių vektorių-eilutės ir operatoriaus matricos sandaugai.*

Tiesinių operatorių, apibrėžtų erdvėje V_1 ir įgyjančių reikšmes erdvėje V_2 , aibę žymėkime $\mathcal{U}(V_1, V_2)$.

Šioje aibėje apibrėšime operatorių sudėtį, operatorių daugybą iš skaičių ir išnagrinėsime tų veiksmų savybes.

Dviejų tiesinių operatorių $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ suma vadinamas toks operatorius $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, kad su kiekvienu $\alpha \in V_1$

$$(\alpha)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B}.$$

Tiesinių operatorių suma yra tiesinis operatorius.

Įrodymas. Imame $\alpha \in V_1$ ir $a \in \mathbb{R}$; gauname lygybes

$$(a\alpha)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (a\alpha)\mathcal{A} + (a\alpha)\mathcal{B} = a((\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B}) = a((\alpha)(\mathcal{A} + \mathcal{B})).$$

Be to, su bet kokiais $\alpha, \beta \in V_1$ teisingos lygybės

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) &= (\alpha + \beta)\mathcal{A} + (\alpha + \beta)\mathcal{B} = (\alpha)\mathcal{A} + (\beta)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B} + (\beta)\mathcal{B} = \\ &= ((\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B}) + ((\beta)\mathcal{A} + (\beta)\mathcal{B}) = (\alpha)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + (\beta)(\mathcal{A} + \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Taigi aibė $\mathcal{U}(V_1, V_2)$ yra uždara operatorių sudėties atžvilgiu.

Padauginti tiesinį operatorių iš realiojo skaičiaus – reiškia kiekvieną jo reikšmę padauginti iš to skaičiaus.

Operatorius $1\mathcal{A}$ yra tiesinis.

Šis faktas įrodomas visiškai analogiškai kaip ir tiesinių operatorių sumos tiesiškumas.

Taigi nustatėme, kad tiesinių operatorių aibė $\mathcal{U}(V_1, V_2)$ yra uždara operatorių sudėties ir daugybos iš realiųjų skaičių atžvilgiu.

Įvestieji operatorių veiksmai turi šitokias savybes.

1. *Operatorių sudėtis yra komutatyvi, t. y. $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$.*

Kadangi $(\forall \alpha \in V_1) (\alpha)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B} = (\alpha)\mathcal{B} + (\alpha)\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B} + \mathcal{A})$, tai $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$.

2. *Operatorių sudėtis yra asociatyvi.*

Paėmę bet koki $\alpha \in V_1$ ir bet kokius tiesinius operatorius $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, turime lygybes:

$$\begin{aligned} (\alpha)((\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C}) &= (\alpha)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + (\alpha)\mathcal{C} = (\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B} + (\alpha)\mathcal{C} = \\ &= (\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = (\alpha)(\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})). \end{aligned}$$

Todėl $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$.

3. Tiesinių operatorių sudėtis turi neutralųjį elementą – nulinį operatorių.

Pažymėkime O_2 erdvės V_2 nulinį vektorių. Operatorius O :

$$(\forall \alpha \in V_1) \quad (\alpha)O = O_2$$

yra tiesinis. Su kiekvienu tiesiniu operatoriumi $\mathcal{A}$ ir su kiekvienu $\alpha \in V_1$ tiesingos lygybės

$$(\alpha)(\mathcal{A} + O) = (\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)O = (\alpha)\mathcal{A} + O_2 = (\alpha)\mathcal{A}.$$

Todėl $\mathcal{A} + O = \mathcal{A}$.

4. Kiekvienas tiesinis operatorius $\mathcal{A}$ turi priešingąjį tiesinį operatorių. Imkime bet kokį tiesinį operatorių $\mathcal{A}$. Operatorių $\mathcal{B}$ apibrėžkime šitaip:

$$(\forall \alpha \in V_1) \quad (\alpha)\mathcal{B} = -(\alpha)\mathcal{A}.$$

Kadangi $(\forall l \in \mathbf{R}, \alpha, \beta \in V_1)$

$$(l\alpha)\mathcal{B} = -(l\alpha)\mathcal{A} = -l(\alpha)\mathcal{A} = l(-(\alpha)\mathcal{A}) = l(\alpha)\mathcal{B}$$

ir

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\mathcal{B} &= -(\alpha + \beta)\mathcal{A} = -((\alpha)\mathcal{A} + (\beta)\mathcal{A}) = \\ &= -(\alpha)\mathcal{A} + (-(\beta)\mathcal{A}) = (\alpha)\mathcal{B} + (\beta)\mathcal{B}, \end{aligned}$$

tai operatorius $\mathcal{B}$ yra tiesinis.

Su kiekvienu $\alpha \in V_1$

$$\alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B} = (\alpha)\mathcal{A} + (-(\alpha)\mathcal{A}) = O_2.$$

Todėl $\mathcal{A} + \mathcal{B} = O$, t. y. $\mathcal{B} = -\mathcal{A}$.

5. Su kiekvienu tiesiniu operatoriumi $\mathcal{A}$

$$1 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

Ši savybė išplaukia iš daugybos apibrėžimo.

6. $(\forall l \in \mathbf{R}, \mathcal{A} \in \mathcal{U}(V_1, V_2)) \quad l\mathcal{A} = \mathcal{A}l.$

Matome, kad

$$(\forall \alpha \in V_1) \quad (\alpha)l\mathcal{A} = l((\alpha)\mathcal{A}) = ((\alpha)\mathcal{A})l = (\alpha)(\mathcal{A}l).$$

7. $(\forall l, t \in \mathbf{R}, \mathcal{A} \in \mathcal{U}(V_1, V_2)) \quad (lt)\mathcal{A} = l(t\mathcal{A}).$

Įrodymas išplaukia iš lygybių

$$(\forall \alpha \in V_1) \quad (\alpha)((lt)\mathcal{A}) = (lt)(\alpha\mathcal{A}) = l(t(\alpha)\mathcal{A}) = l((\alpha)t\mathcal{A}).$$

8. $(\forall l, t \in \mathbf{R}, \mathcal{A} \in \mathcal{U}(V_1, V_2)) \quad (l+t)\mathcal{A} = l\mathcal{A} + t\mathcal{A}.$

Pastarasis teiginys išplaukia iš lygybių

$$\begin{aligned} (\forall \alpha \in V_1) \quad (\alpha)((l+t)\mathcal{A}) &= (l+t)(\alpha)\mathcal{A} = (l\alpha + t\alpha)\mathcal{A} = l(\alpha)\mathcal{A} + t(\alpha)\mathcal{A} = \\ &= (\alpha)(l\mathcal{A}) + (\alpha)(t\mathcal{A}) = (\alpha)(l\mathcal{A} + t\mathcal{A}). \end{aligned}$$

9. $(\forall l \in \mathbf{R}, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{U}(V_1, V_2)) \quad l(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = l\mathcal{A} + l\mathcal{B}.$

Turime:

$$(\forall \alpha \in V_1) (\alpha)(l(\mathcal{A} + \mathcal{B})) = l(\alpha)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = l((\alpha)\mathcal{A} + (\alpha)\mathcal{B}) = \\ = l(\alpha)\mathcal{A} + l(\alpha)\mathcal{B} = (\alpha)(l\mathcal{A}) + (\alpha)(l\mathcal{B}) = (\alpha)(l\mathcal{A} + l\mathcal{B}).$$

Tai ir rodo, kad 9 savybė teisinga.

Pastebėję, kad 1–9 savybės yra ne kas kita, kaip vektorinės erdvės apibrėžimo aksiomos aibėje $\mathfrak{U}(V_1, V_2)$, gausime šitokios teoremos įrodymą.

113 teorema. *Tiesinių operatorių, kurie apibrėžti erdvėje V_1 ir įgyja reikšmes erdvėje V_2 , aibė $\mathfrak{U}(V_1, V_2)$ operatorių sudėties ir daugybos iš realiųjų skaičių atžvilgiu yra vektorinė erdvė (virš $\mathbb{R}$).*

Nustatytoji abipus vienareikšmė atitiktis tarp tiesinių operatorių iš aibės $\mathfrak{U}(V_1, V_2)$ ir $[m \times n]$ eilės matricų nėra paprasta bijekcija.

114 teorema. *Kai V_1 yra m -matė vektorinė erdvė, o V_2 – n -matė vektorinė erdvė, tai tiesinių operatorių erdvė $\mathfrak{U}(V_1, V_2)$ izomorfiška $[m \times n]$ eilės matricų erdvei $\mathfrak{M}_{[m \times n]}(\mathbb{R})$.*

Įrodymas. Jau žinome, kad šios aibės yra ekvivalenčios, t. y. egzistuoja bijekcija $\varphi(\mathcal{A}) = A$. Todėl užtenka įrodyti, kad ši bijekcija yra invariantiška operatorių sudėties ir operatorių daugybos iš realiųjų skaičių atžvilgiu.

Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – erdvės V_1 bazė, $\beta_1, \dots, \beta_n$ – erdvės V_2 bazė ir

$$(\alpha_i)\mathcal{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j, \quad (\alpha_i)\mathcal{B} = \sum_{j=1}^n b_{ij}\beta_j \quad (i=1, \dots, m),$$

t. y.

$$\varphi(\mathcal{A}) = A = (a_{ij}), \quad \varphi(\mathcal{B}) = B = (b_{ij}).$$

Kadangi

$$(\alpha_i)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\alpha_i)\mathcal{A} + (\alpha_i)\mathcal{B} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})\beta_j \quad (i=1, \dots, m),$$

tai

$$\varphi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = A + B = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}).$$

Kita vertus,

$$(\alpha_i)(l\mathcal{A}) = l(\alpha_i)\mathcal{A} = l \sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_j = \sum_{j=1}^n (la_{ij})\beta_j \quad (i=1, \dots, m),$$

todėl

$$\varphi(l\mathcal{A}) = lA = l\varphi(\mathcal{A}).$$

Išvada. *Operatorių erdvė $\mathfrak{U}(V_1, V_2)$ yra mn -matė.*

Uždaviniai

8. Tiesinis operatorius atvaizduoja trimatės erdvės bazės vektorius $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ į keturmatės erdvės vektorius, kurių koordinatės $(1, 0, 2, -1), (-3, 2, 1, 1), (4, -5, 3, -2)$.

Užrašykite šio operatoriaus matricą, raskite vektoriaus, kurio koordinatės $(5, -6, 7)$, vaizdo koordinatės.

9. Tiesinis operatorius atvaizduoja penkiamatės erdvės bazės vektorius $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ į trimatės erdvės vektorius, kurių koordinatės $(2, 1, -1), (3, -2, 2), (5, 1, -1), (-2, 4, -6), (6, 0, 1)$. Užrašykite to operatoriaus matricą ir raskite vektorių, kurių koordinatės $(-1, 1, 3, -2, 1)$ ir $(4, -6, 2, 3, -3)$, vaizdų koordinatės.

10. Įrodykite, kad egzistuoja vienintelis tiesinis operatorius, atvaizduojantis tiesiškai nepriklausomus n -matės vektorinės erdvės vektorius $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ į nurodytuosius vektorius $\beta_1, \dots, \beta_n$, ir išsiaiškinkite, kaip galima rasti to operatoriaus matricą bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

11. Raskite trimatės vektorinės erdvės tiesinio operatoriaus matricą, kai duotos trijų vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ir jų vaizdų $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ koordinatės toje pačioje bazėje:

a) vektorių koordinatės

vaizdų koordinatės

$(1, 3, 1),$

$(1, 0, 1),$

$(2, -1, 4),$

$(2, 3, 1),$

$(1, -4, 3),$

$(-1, -1, 3);$

b) $(3, 1, -2),$

$(0, 1, 2),$

$(-3, 1, 1),$

$(1, -1, 1),$

$(0, 0, -1),$

$(-2, -1, -1).$

12. Įrodykite, kad tiesinių operatorių aibė $\mathcal{U}(V_1, V_2)$ yra komutatyvioji grupė sudėties atžvilgiu.

13. Suformuluokite tiesinių operatorių sudėties savybes – grupės 1–8 savybių analogus – ir jas įrodykite.

§83. Tiesinių operatorių daugyba

Šiame ir kituose šio skyriaus paragrafuose nagrinėsime tik tokius tiesinius operatorius, kurie erdvę V atvaizduoja erdvėje V . Juos vadinsime *erdvės V tiesiniais operatoriais*.

Aišku, nagrinėjamuoju atveju $V_1 = V_2 = V$. Operatorių aibę $\mathcal{U}(V, V)$ žymėsime $\mathcal{U}(V)$.

Iš praeito paragrafo rezultatų išplaukia, kad n -matės vektorinės erdvės V operatorių $\mathcal{A}$ abipus vienareikšmiškai atitinka n -osios eilės kvadratinė matrica ir kad erdvė $\mathcal{U}(V)$ yra izomorfiška n -osios eilės kvadratinė matricų erdvei $M_{[n \times n]}(\mathbb{R})$.

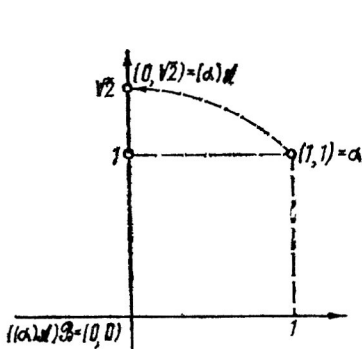
Tarkime, kad $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ yra n -matės erdvės V tiesiniai operatoriai ir jų matricos bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra A ir B .

Kadangi $(\alpha)\mathcal{A} \in V$, tai elementą $(\alpha)\mathcal{A}$ galime paveikti operatoriumi $\mathcal{B}$ ir $((\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B} \in V$.

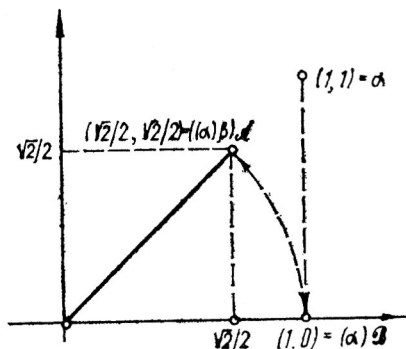
Erdvės V tiesinių operatorių $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ sandauga vadinamas operatorius $\mathcal{C}$, kuris apibrėžiamas šitaip: su kiekvienu $\alpha \in V$ $(\alpha)\mathcal{C} = ((\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B}$.

Operatorių $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ sandaugą žymėsime $\mathcal{A}\mathcal{B}$, t. y. $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

Kadangi ir $(\alpha)\mathcal{B} \in V$ su kiekvienu $\alpha \in V$, tai elementui $(\alpha)\mathcal{B}$ galime taikyti operatorių $\mathcal{A}$. Gausime elementą $((\alpha)\mathcal{B})\mathcal{A}$. Pasinaudoję operatorių sandaugos apibrėžimu, gauname dar vieną operatorių $\mathcal{B}\mathcal{A}$, kuris bendroju atveju nėra lygus operatoriui $\mathcal{A}\mathcal{B}$. Kad tuo įsitikintume, išnagrinėsime pavyzdį.



17 pav.



18 pav.

Tarkime, kad $V = \mathbb{R}^2$, ir interpretuokime ją plokštuma. Be to, sakykime, kad operatorius $\mathcal{A}$ reiškia posūkį apie koordinatų pradžios tašką kampu $\pi/4$, $\mathcal{B}$ reiškia projektavimą į x ašį. Abu tie operatoriai yra erdvės $\mathbb{R}^2$ tiesiniai operatoriai.

Paėmę $\alpha = (1, 1)$, turėsime (žr. 17 ir 18 pav.)

$$(\alpha)\mathcal{A} = (0, \sqrt{2}), \quad ((\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B} = (0, 0),$$

$$(\alpha)\mathcal{B} = (1, 0), \quad ((\alpha)\mathcal{B})\mathcal{A} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

t. y. $((\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B} \neq ((\alpha)\mathcal{B})\mathcal{A}$. Vadinasi, $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Trijų ir daugiau operatorių sandauga apibrėžiama naudojantis indukcija, t. y.

$$(\alpha)(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}) = (((\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B})\mathcal{C} \quad \text{ir t. t.}$$

Nagrinėkime kai kurias erdvės V tiesinių operatorių daugybos savybes.

Tiesinių operatorių sandauga yra tiesinis operatorius.

Šis faktas išplaukia iš to, kad su kiekvienu $l \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in V$ ir $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{U}(V)$ galioja lygybės:

$$1) (l\alpha)(\mathcal{A}\mathcal{B}) = ((l\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B} = (l(\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B} = l((\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B},$$

$$2) (\alpha + \beta)(\mathcal{A}\mathcal{B}) = ((\alpha + \beta)\mathcal{A})\mathcal{B} = ((\alpha)\mathcal{A} + (\beta)\mathcal{A})\mathcal{B} = ((\alpha)\mathcal{A})\mathcal{B} + ((\beta)\mathcal{A})\mathcal{B}.$$

115 teorema. Tiesinių operatorių sandaugos matrica lygi operatorių matricų sandaugai.

Irodymas. Tarkime, kad $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{U}(V)$, $\mathcal{A} \leftrightarrow A$, $\mathcal{B} \leftrightarrow B$; čia $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ yra n -osios eilės kvadratinės matricos. Iš (8.3) lygybės kiekvienam

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \text{ turime}$$

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) A;$$

čia

$$(\alpha) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i.$$

Kita vertus, kiekvienam $\beta = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i$ iš tos pačios lygybės išplaukia

$$(z_1, \dots, z_n) = (y_1, \dots, y_n) B;$$

čia

$$(\beta) \mathcal{B} = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i.$$

Pasinaudoję šiomis lygybėmis, gauname

$$(z_1, \dots, z_n) = ((x_1, \dots, x_n) A) B = (x_1, \dots, x_n) AB.$$

Kadangi

$$((\alpha) \mathcal{A}) \mathcal{B} = (\beta) \mathcal{B} = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i,$$

tai ši lygybė ir reiškia teoremos teiginį.

Iš 113 ir 115 teoremų lengvai prieiname išvadą, kad erdvės V tiesinių operatorių aibėje $\mathcal{U}(V)$ sudėties ir daugybos savybės yra analogiškos kvadratinėms matricų daugybos ir sudėties savybėms:

$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$ – daugybos asociatyvumo,

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$ – distributyvumo.

Ši aibė turi vienetinį elementą, kurį atitinka vienetinė matrica E_n . Iš tikrųjų, jei $\mathcal{E} \leftrightarrow E_n$, tai $(\alpha)\mathcal{E} = \alpha$ su kiekvienu $\alpha \in V$, nes $(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)E_n$. Taigi $\mathcal{E}$ yra tapatusis operatorius.

Aibės $\mathcal{U}(V)$ nulinį elementą atitinka nulinė matrica O , todėl, jeigu $\mathcal{O} \leftrightarrow O$, su kiekvienu $\alpha \in V$ turime $(\alpha)\mathcal{O} = O$.

Prisiminę tiesinių operatorių sudėties savybes, gauname šitokią teiginį: erdvės V tiesinių operatorių aibė $\mathcal{U}(V)$ su sudėtimi ir daugyba yra žiedas (nekomutatyvus) su vienetu.

Erdvės V operatorius $\mathcal{A}^{-1}$ vadinamas atvirkštiniu erdvės V tiesiniam operatoriui $\mathcal{A}$, jeigu $\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = \mathcal{E}$.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad

$$(\forall \alpha \in V) ((\alpha) \mathcal{A}) \mathcal{A}^{-1} = ((\alpha) \mathcal{A}^{-1}) \mathcal{A} = (\alpha) \mathcal{E} = \alpha.$$

116 teorema. Jeigu erdvės V tiesinis operatorius $\mathcal{A}$ turi atvirkštinį operatorių $\mathcal{A}^{-1}$, tai $\mathcal{A}^{-1}$ yra tiesinis operatorius.

Irodymas. Tarkime, kad

$$\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = \mathcal{E},$$

$$(\forall \alpha \in V, l \in \mathbb{R}) ((l\alpha) \mathcal{A}^{-1}) \mathcal{A} = l\alpha = l((\alpha) \mathcal{A}^{-1}) \mathcal{A}.$$

Iš šių lygybių išplaukia lygybė

$$((l\alpha) \mathcal{A}^{-1}) \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} = (l(\alpha) \mathcal{A}^{-1}) \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1},$$

kuri virsta lygybe

$$(l\alpha) \mathcal{A}^{-1} = l(\alpha) \mathcal{A}^{-1}.$$

Jeigu $\alpha, \beta \in V$ ir

$$(\alpha) \mathcal{A}^{-1} = \gamma, \quad (\beta) \mathcal{A}^{-1} = \delta,$$

tai

$$(\gamma) \mathcal{A} = (\alpha) \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = \alpha, \quad (\delta) \mathcal{A} = (\beta) \mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} = \beta,$$

ir

$$(\gamma + \delta) \mathcal{A} = (\gamma) \mathcal{A} + (\delta) \mathcal{A} = \alpha + \beta.$$

Tada

$$((\gamma + \delta) \mathcal{A}) \mathcal{A}^{-1} = \gamma + \delta$$

ir

$$((\gamma + \delta) \mathcal{A}) \mathcal{A}^{-1} = (\alpha + \beta) \mathcal{A}^{-1}.$$

Todėl

$$(\alpha + \beta) \mathcal{A}^{-1} = \gamma + \delta = (\alpha) \mathcal{A}^{-1} + (\beta) \mathcal{A}^{-1}.$$

Jeigu egzistuoja operatoriui $\mathcal{A}$ atvirkštinis operatorius, tai jis yra vienintelis.

Tarkime, kad $\mathcal{B}$ ir $\mathcal{G}$ yra du operatoriai, atvirkštiniai operatoriui $\mathcal{A}$. Tada jie tenkina lygybes $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}$ ir $\mathcal{G}\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

Pirmąją lygybę padauginę iš kairės pusės iš operatoriaus $\mathcal{G}$, gauname

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\mathcal{G}\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{E}\mathcal{B} = \mathcal{B}, \text{ t. y. } \mathcal{G} = \mathcal{B}.$$

117 teorema. Jei operatorius $\mathcal{A}$, kurio matrica yra A , turi atvirkštinį operatorių, tai jo matrica yra A^{-1} .

Irodymas. Jeigu $\mathcal{A} \leftrightarrow A$ ir $\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow B$, tai pagal 117 teoremą

$$\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow AB.$$

Kadangi $\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$, tai $\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow E_n$. Todėl $AB = E_n$. Vadinasi, $B = A^{-1}$.

Išvada. Tiesinis operatorius turi atvirkštinį operatorių tada ir tik tada, kai jo matrica yra reguliari.

Tiesiniai operatoriai, kurie turi atvirkštinius, vadinami neišsigimusiaisiais tiesiniais operatoriais arba erdvės tiesinėmis (neišsigimusiomis) transformacijomis.

Kadangi $(U(V), +, \cdot)$ yra žiedas su vienetu, tai iš žiedo daugybos savybių (žr. § 29) išplaukia, kad:

1. Vietiniam operatoriui atvirkštinis yra tas pats operatorius, t. y. $\mathcal{E}^{-1} = \mathcal{E}$;

2. Atvirkštiniam operatoriui atvirkštinis yra pats operatorius, t. y. $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$;

3. Jei operatoriai $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ turi atvirkštinius operatorius, tai jų sandauga $\mathcal{A}\mathcal{B}$ taip pat turi atvirkštinį operatorių ir $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$;

4. n -matės vektorinės erdvės neišsigimusių tiesinių operatorių aibė sudaro grupę (nekomutatyvią) operatorių daugybos atžvilgiu. Ši grupė yra izomorfiška n -osios eilės kvadratinų reguliariųjų matricų grupei.

Ši išvada išplaukia iš grupių izomorfizmo teoremos, pastebėjus, kad bi-jekcija $\mathcal{A} \leftrightarrow A$ yra invariantiška daugybos atžvilgiu.

Uždaviniai

14. Duotoje bazėje tiesinių operatorių $\mathcal{A}$ ir $\mathcal{B}$ matricos yra A ir B . Raskite operatorių $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{A}$ matricas, kai:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -7 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix};$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

15. Išsiaiškinkite, kurie iš matricas atitinkančių operatorių turi atvirkštinius, ir raskite jų matricas:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

f) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 9 & -3 \\ 2 & 5 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

§84. Tiesinės algebras

Trečiajame skyriuje nagrinėjome laukus – aibes, kuriose apibrėžtos dvi vidinės operacijos. Vektorinėse erdvėse virš lauko L buvo apibrėžta viena vidinė binarė operacija – vektorių sudėtis ir viena išorinė operacija $L \times$

$\times V \rightarrow V$ – daugyba iš skaliaro. Praeitame paragrafe matėme, kad erdvės V tiesinių operatorių aibėje taip pat galimos dvi operacijos: sudėtis ir daugyba, be to, viena išorinė operacija – daugyba iš lauko R elemento. Analogiškos operacijos apibrėžiamos ir kvadratinė n -osios eilės matricų aibėje. Yra ir daugiau įvairios prigimties aibių, kuriose galimos trys operacijos – dvi vidinės ir viena išorinė. Visoms tokioms aibėms suteikiamas atskiras pavadinimas – tiesinės algebras.

Baigtinės dimensijos vektorinė erdvė U virš lauko L vadinama tiesine algebra virš lauko L , jeigu joje yra apibrėžta vidinė binarė operacija – daugyba, turinti šias savybes: su bet kokiais $\alpha, \beta, \gamma \in U$ ir $l, t \in L$ teisingos lygybės:

$$1) (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$

$$2) \alpha(l\beta + t\gamma) = l(\alpha\beta) + t(\alpha\gamma) \text{ ir } (l\alpha + t\beta)\gamma = l(\alpha\gamma) + t(\beta\gamma).$$

Tiesinės algebras eile vadiname vektorinės erdvės U dimensiją.

Pavyzdžiai. 1. Remdamiesi 82–83 paragrafų rezultatais, konstatuojame, kad n -matės vektorinės erdvės V tiesinių operatorių aibė $U(V)$ apibrėžtų operatorių sudėties, daugybos bei operatoriaus daugybos iš skaičiaus operacijų atžvilgiu yra tiesinė algebra virš realiųjų skaičių lauko R . Jos eilė lygi n^2 .

2. n -osios eilės kvadratinė matricų aibė $M_{[n \times m]}(L)$, kurioje apibrėžtos matricų sudėties, matricų daugybos ir matricų daugybos iš lauko L elementų operacijos, yra tiesinė algebra virš lauko L . Jos eilė taip pat lygi n^2 .

3. Kompleksinių skaičių aibė yra tiesinė algebra virš realiųjų skaičių lauko R . Jos eilė lygi 2.

Tačiau grynai menamų kompleksinių skaičių aibė I jau nėra tiesinė algebra virš R , nes ji neuždara daugybos atžvilgiu.

Dvi tiesinės algebras U ir U^1 virš to paties lauko L vadinamos izomorfiskomis, jei egzistuoja bijekcija $\varphi: U \leftrightarrow U^1$, invariantiška visų trijų operacijų atžvilgiu.

n -matės vektorinės erdvės V tiesinių operatorių algebra $U(V)$ virš lauko R yra izomorfiska n -osios eilės kvadratinė matricų algebrai $M_{[n \times m]}(R)$.

Irodymas. Užtenka remtis 114 ir 115 teoremomis. Kad ir kokie būtų $l \in R$ ir $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in U(V)$, jei tik $\varphi(\mathcal{A}) = A$, $\varphi(\mathcal{B}) = B$, tai

$$\varphi(l\mathcal{A}) = l\varphi(\mathcal{A}), \quad \varphi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}), \quad \varphi(\mathcal{A}\mathcal{B}) = AB = \varphi(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{B}).$$

§85. Tiesinio operatoriaus matricos kitimas keičiant bazę. Panašiosios matricos

Vektorinės n -matės erdvės V tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica priklauso nuo bazės. Tarkime, kad bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica yra

$$A = (a_{kl}), \quad \text{t. y.} \quad (\alpha_k)\mathcal{A} = \sum_{l=1}^n a_{kl} \alpha_l \quad (k=1, \dots, n), \quad (7.4)$$

o bazėje $\beta_1, \dots, \beta_n$ to paties operatoriaus matrica yra

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}), \quad \text{t. y.} \quad (\beta_i) \mathcal{A} = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} \beta_j \quad (i=1, \dots, n). \quad (7.5)$$

Nustatysime tų matricų tarpusavio priklausomybę.

Pažymėkime bazės keitimo matricą

$$T = (t_{ik}), \quad \text{t. y.} \quad \beta_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} \alpha_k \quad (i=1, \dots, n), \quad (7.6)$$

ir jai atvirkštinę matricą

$$T^{-1} = (h_{lj}), \quad \text{t. y.} \quad \alpha_l = \sum_{j=1}^n h_{lj} \beta_j \quad (l=1, \dots, n). \quad (7.7)$$

118 teorema. *Tiesinio operatoriaus matrica naujoje bazėje lygi jo matricai senojoje bazėje, padaugintai iš kairės iš bazės keitimo matricos ir iš dešinės iš bazės keitimo matricai atvirkštinės matricos, t. y. $\bar{A} = TAT^{-1}$.*

Irodymas. Iš (7.6) išraiškų išplaukia

$$(\beta_i) \mathcal{A} = \sum_{k=1}^n t_{ik} (\alpha_k) \mathcal{A} \quad (i=1, \dots, n).$$

Vietoj $(\alpha_k) \mathcal{A}$ ($k=1, \dots, n$) įrašę jų išraiškas iš (7.4) lygybių, gauname

$$(\beta_i) \mathcal{A} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ik} a_{kl} \alpha_l \quad (i=1, \dots, n),$$

o į pastarąsias lygybes įrašę α_l ($l=1, \dots, n$) išraiškas iš (7.7) lygybių ir sukeitę sumavimo tvarką, gauname

$$(\beta_i) \mathcal{A} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ik} a_{kl} h_{lj} \right) \beta_j \quad (i=1, \dots, n).$$

Palyginę (7.5) bei šias išraiškas ir prisiminę, kad vektorių koordinatės bazėje nustatomos vienareikšmiškai, gauname teoremos tvirtinimą

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n t_{ik} a_{kl} h_{lj} \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Pasinaudoję operatoriaus sąvoka, bazės $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ keitimą nauja baze galime interpretuoti tiesiniu operatoriumi. Imkime naujos bazės vektorius $\beta_1, \dots, \beta_n$ ir apibrėžkime operatorių $\mathcal{C}$ taip, kad būtų

$$(\alpha_i) \mathcal{C} = \beta_i, \quad \text{t. y.} \quad (\alpha_i) \mathcal{C} = \sum_{j=1}^n t_{ij} \alpha_j \quad (i=1, \dots, n).$$

Šio operatoriaus matrica lygi bazės keitimo matricai T . Taigi bazės keitimas yra tiesinis operatorius, kurio matrica yra bazės keitimo matrica, t. y. $A=T$. Be to, šis operatorius neišsigimęs, t. y. tiesinė transformacija, nes $|T| \neq 0$. Todėl bazės keitimo matrica kartais vadinama bazės transformacijos matrica. Įdomu tai, kad bazės keitimo nauja bazė operatoriaus matrica abiejose bazėse, t. y. senojoje bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ir naujojoje bazėje $\beta_1, \dots, \beta_n$, yra ta pati. Iš tikrųjų, pasinaudoję 118 teorema, gauname

$$\bar{A} = TAT^{-1} = TTT^{-1} = TE_n = T.$$

Kadangi n -matė vektorinė erdvė V turi neaprėžtai daug bazių, tai tiesinių operatorių atitinka neaprėžtai daug n -osios eilės kvadratinų matricų, nes skirtingose bazėse tą patį operatorių atitiks skirtingos matricos.

Dvi n -osios eilės kvadratinės matricos A ir B vadinamos panašiomis, jei egzistuoja tokia reguliari n -osios eilės matrica U , kad $B = UAU^{-1}$.

Be abejo, tada ir $A = U^{-1}BU$, t. y. B ir A taip pat panašios. Šią lygybę gauname, lygybę $B = UAU^{-1}$ padauginę iš kairės iš U^{-1} ir iš dešinės iš U . Iš 118 teoremos išplaukia, kad tiesinio operatoriaus matricos skirtingose bazėse yra panašios.

Matricų panašumui būdinga tranzityvumo savybė: jei matricos A ir B panašios, matricos B ir C panašios, tai A ir C taip pat panašios.

Iš A ir B panašumo gauname lygybę $B = UAU^{-1}$; čia U – reguliarioji matrica. Iš B ir C panašumo gauname lygybę $C = VBV^{-1}$; čia V – reguliarioji matrica. Į pastarąją lygybę vietoj B įrašome jos išraišką iš pirmosios lygybės ir gauname $C = (VU)A(U^{-1}V^{-1})$. Reguliariųjų matricų sandauga – reguliarioji matrica ir $(VU)^{-1} = U^{-1}V^{-1}$. Todėl $T = VU$ yra reguliarioji matrica ir $C = TAT^{-1}$.

Kiekviena kvadratinė matrica yra panaši pati į save, nes $A = E_n A E_n^{-1}$, todėl kvadratinų matricų panašumo sąryšis yra ekvivalentumo sąryšis aibėje $\mathfrak{M}_{[n \times n]}(\mathbf{R})$. Visos panašios n -osios eilės kvadratinės matricos sudaro ekvivalentumo klasę.

Kiekviena reguliarioji matrica T gali būti bazės keitimo matrica, o skirtingose bazėse operatoriaus matricos A ir $\bar{A}$ susietos lygybe $\bar{A} = TAT^{-1}$. Paėmus bet kokią matricą B iš ekvivalentumo klasės, kuriai priklauso operatoriaus matrica A , galima taip parinkti erdvės bazę, kad matrica B taptų operatoriaus matrica. Taigi tiesinių operatorių, jei nefiksuosime erdvės bazės, atitinka visa panašiųjų matricų klasė.

Panašiosios matricos yra vienodų rangų.

Jei A ir B – panašiosios matricos, tai $B = UAU^{-1}$; čia U ir U^{-1} – reguliariosios matricos. Todėl $\text{rang } A = \text{rang } UA = \text{rang } (UA)U^{-1} = \text{rang } B$.

Pavyzdys. Kintamųjų keitinį

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2,$$

$$y_2 = -x_1 + 5x_2$$

galime interpretuoti kaip tiesinį operatorių dvimatėje erdvėje $\mathbb{R}^2$, kurio matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ nes } (y_1, y_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad erdvės $\mathbb{R}^2$ bazė yra $\varepsilon_1 = (1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1)$ ir $(x_1, x_2) = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2$. Imkime bazę $\beta_1 = (1, 0)$, $\beta_2 = (1, 1)$. Kadangi $\beta_1 = 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2$, $\beta_2 = 1 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$, tai bazės transformacijos matrica yra

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jai atvirkštinė matrica

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Taigi naujoje bazėje operatoriaus matrica yra

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matricos

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

yra panašios 2-osios eilės matricos.

Uždaviniai

16. Tiesinio operatoriaus matrica senojoje bazėje yra A . Raskite jo matricą naujojoje bazėje, jei bazės keitimo matrica yra T :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 8 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

§86. Tiesinio operatoriaus rangas, branduolys ir defektas

Praeitame paragrafe nustatėme, kad n -matės erdvės tiesinį operatorių atitinkančios matricos visose bazėse yra to paties rango. Taigi tiesinį operatorių atitinkančios matricos rangas yra to operatoriaus invariantas.

Tiesinį operatorių atitinkančios matricos rangą vadiname operatoriaus rangu: jei $\mathcal{A} \leftrightarrow A$, tai $\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A$.

Išsiaiškinsime, ką reiškia šis invariantas.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ apibrėžimo sritis yra n -matė vektorinė erdvė V . Jo reikšmių aibė $\mathcal{A}(V)$, kuri dažnai vadinama erdvės V (arba operatoriaus) vaizdu, yra vektorinės erdvės V poaibis t. y. $\mathcal{A}(V) \subset V$. Priminsime, kad erdvės V poaibio V_1 pirmvaizdžiu vadinama aibė $\{\alpha | \alpha \in V, (\alpha)\mathcal{A} \in V_1\}$. Aibės V_1 pirmvaizdį žymėsime $(V_1)\mathcal{A}^{-1}$.

119 teorema. *Vektorinės erdvės vaizdas yra vektorinė erdvė, kurios dimensija lygi operatoriaus rangui.*

Įrodymas. Tarkime, kad V – vektorinė erdvė, $\mathcal{A}$ – tiesinis operatorius, $\mathcal{A}(V) = V_1 \subset V$ – erdvės V vaizdas, t. y. operatoriaus reikšmių aibė, ir $\alpha, \beta \in V_1, l \in \mathbb{R}$. Užtenka įrodyti, kad $l\alpha \in V_1$ ir $\alpha + \beta \in V_1$.

Kadangi $\alpha \in V_1$, tai egzistuoja toks $\gamma \in V$, kad $(\gamma)\mathcal{A} = \alpha$. Tada, kad ir kokių l imtume realųjį skaičių l ,

$$(l\gamma)\mathcal{A} \in V_1, \quad \text{t. y.} \quad (l\gamma)\mathcal{A} = l((\gamma)\mathcal{A}) \Rightarrow l\alpha \in V_1.$$

Kadangi $\beta \in V_1$, tai egzistuoja toks $\delta \in V$, kad $(\delta)\mathcal{A} = \beta$. Tada ir

$$\alpha + \beta = (\gamma)\mathcal{A} + (\delta)\mathcal{A} = (\gamma + \delta)\mathcal{A} \in V_1.$$

Antrajai teiginio daliai įrodyti parinkime bet koki $\beta \in V_1$ ir tokį $\alpha \in V$ kad būtų $(\alpha)\mathcal{A} = \beta$. Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra kokia nors erdvės V bazė o operatorių $\mathcal{A}$ toje bazėje atitinka matrica A , kurios rangas lygus r , ir

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \quad \beta = (\alpha)\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n x_i (\alpha_i)\mathcal{A}.$$

Tarp vektorių $(\alpha_i)\mathcal{A}$ ($i=1, \dots, n$) yra tik r tiesiškai nepriklausomų, nes rang $A=r$. Todėl β yra r tiesiškai nepriklausomų vektorių tiesinė kombinacija, ir erdvės $\mathcal{A}(V)$ dimensija lygi r .

Išvada. *Jei $\mathcal{A}$ yra neišsigimęs operatorius, tai $\mathcal{A}(V) = V$.*

120 teorema. *Vektorinės erdvės pirmvaizdis taip pat yra vektorinė erdvė: jei V_1 yra vektorinė erdvė, tai $(V_1)\mathcal{A}^{-1}$ taip pat vektorinė erdvė.*

Įrodymas. Tarkime, kad V_1 – vektorinė erdvė, t. y. koks nors erdvės V poerdvis, $(V_1)\mathcal{A}^{-1}$ – šios erdvės pirmvaizdis ir

$$\alpha \in (V_1)\mathcal{A}^{-1}, \quad \beta \in (V_1)\mathcal{A}^{-1}.$$

Kadangi $(\alpha)\mathcal{A} \in V_1$, o V_1 – vektorinė erdvė, tai, kad ir kokių l imtume realųjį skaičių l , $l((\alpha)\mathcal{A}) \in V_1$. Kadangi $l((\alpha)\mathcal{A}) = (l\alpha)\mathcal{A}$, tai $l\alpha \in (V_1)\mathcal{A}^{-1}$. Iš to, kad ir $(\beta)\mathcal{A} \in V_1$, išplaukia $(\alpha)\mathcal{A} + (\beta)\mathcal{A} \in V_1$, o iš $(\alpha)\mathcal{A} + (\beta)\mathcal{A} = (\alpha + \beta)\mathcal{A}$ išplaukia $\alpha + \beta \in (V_1)\mathcal{A}^{-1}$.

121 teorema. *Jeigu n -matės erdvės V tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ rangas lygus r , tai egzistuoja $(n-r)$ -matis poerdvis V_B , kurį operatorius atvaizduoja į nulinį vektorių, t. y. $\mathcal{A}(V_B) = \{O\}$.*

Irodymas. Pasirinkime kokią nors erdvės V bazę $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ir, tarę, kad $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$, raskime visus tuos vektorius α , su kuriais $(\alpha)\mathcal{A} = O$.

Kadangi $O = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \alpha_i$, tai visų tokių vektorių koordinatės tenkina lygtį

$$(x_1, \dots, x_n)A = (0, \dots, 0);$$

čia A – operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica pasirinktoje bazėje. Šios lygties sprendinių aibė, kai $\text{rang } A = r$, yra $(n-r)$ -matė erdvė. Kadangi V_B yra izomorfiškas šios sistemos sprendinių erdvei, tai jo dimensija taip pat lygi $(n-r)$.

Erdvės V poerdvis, kurį tiesinis šios erdvės operatorius $\mathcal{A}$ atvaizduoja į nulinį vektorių, vadinamas operatoriaus $\mathcal{A}$ branduoliu ir žymimas $\text{Ker } \mathcal{A}$. Branduolio dimensija vadinama operatoriaus $\mathcal{A}$ defektu.

Operatoriaus $\mathcal{A}$ defektas lygus erdvės dimensijos ir operatoriaus rango skirtumui.

Jeigu $\text{rang } \mathcal{A} = n$, t. y. jei operatorius neišsigimęs, tai jo defektas lygus nuliui. Toks operatorius tik nulinį vektorių atvaizduoja į nulinį vektorių. Kita vertus, jei operatoriaus $\mathcal{A}$ defektas lygus nuliui, tai jo rangas lygus n ir toks operatorius yra neišsigimęs. Iš to išplaukia šitoks teiginys:

vektorinės erdvės tiesinis operatorius turi atvirkštinį operatorių tada ir tik tada, kai jo branduolys turi tik vieną – nulinį elementą.

Kokią vektorinės erdvės V dalį tiesinis rango r jos operatorius $\mathcal{A}$ atvaizduoja į to operatoriaus vaizdo $\mathcal{A}(V)$ kiekvieną elementą?

122 teorema. *Jei $\mathcal{A}$ yra erdvės V tiesinis operatorius ir $\mathcal{A}(V)$ – to operatoriaus vaizdas, tai kiekvieno $\beta \in \mathcal{A}(V)$ pirmvaizdis $\{\beta\}\mathcal{A}^{-1}$ yra tiesinė daugdara, gauta operatoriaus branduolį pastūmus vektoriumi α_0 ; čia $(\alpha_0)\mathcal{A} = \beta$.*

Irodymas. Tarkime, kad α yra toks erdvės V vektorius, kad $(\alpha)\mathcal{A} = \beta$. Kadangi $(\alpha_0)\mathcal{A} = \beta$, tai $(\alpha)\mathcal{A} - (\alpha_0)\mathcal{A} = (\alpha - \alpha_0)\mathcal{A} = O$. Ši lygybė reiškia, kad operatorius $\mathcal{A}$ skirtumą $\alpha - \alpha_0$ atvaizduoja į nulinį vektorių. Taigi vektorius $\delta = \alpha - \alpha_0$ yra operatoriaus branduolio elementas. Tuo būdu nustatėme, kad $\alpha = \delta + \alpha_0$, jeigu $(\alpha)\mathcal{A} = \beta$; čia δ yra operatoriaus branduolio elementas.

Kita vertus, jei δ yra branduolio elementas, tai $(\delta)\mathcal{A} = O$ ir tada $(\delta + \alpha_0)\mathcal{A} = (\delta)\mathcal{A} + (\alpha_0)\mathcal{A} = O + \beta = \beta$.

Kadangi branduolys yra $(n-r)$ -matė erdvė ($r = \text{rang } \mathcal{A}$), tai kiekvieno operatoriaus vaizdo $\mathcal{A}(V)$ elemento pirmvaizdis yra tiesinė daugdara, kurios dimensija lygi $n-r$, t. y. operatoriaus defektui.

Išvada. *Neišsigimęs erdvės V operatorius yra bijekcija $V \leftrightarrow V$.*

Irodymas. Užtenka pastebėti, kad šiuo atveju $r = n$, ir remtis 119 teoremos išvada bei 122 teorema.

Pavyzdžiai. 1. Kintamuosius $x_1, \dots, x_n$ keičiame kintamaisiais $y_1, \dots, y_n$, kurie yra pirmųjų tiesinės kombinacijos:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, \dots, n).$$

Matriciniu pavidalu šias lygybes užrašome šitaip:

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n) A^T;$$

čia $A = (a_{ij})$. Ši lygybė reiškia, kad kintamųjų $x_1, \dots, x_n$ keitimas jų tiesinėmis kombinacijomis $y_1, \dots, y_n$ yra erdvės R^n tiesinis operatorius, kurio matrica A^T . Jeigu šis operatorius turi atvirkštinį, tai galime grįžti prie senų kintamųjų, naudodamiesi formule

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) (A^{-1})^T.$$

Toks operatorius bus bijekcija. Kai atvirkštinis operatorius neegzistuoja, prie senų kintamųjų grįžti jau nebegalime. Šia prasme toks kintamųjų keitinys bus išsigimęs.

2. Bazėje $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1)$ operatoriaus A matrica yra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -6 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Erdvėje R^4 šio operatoriaus rangas lygus 3, nes

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Taigi šio operatoriaus defektas lygus 1, o branduolys yra vienmatė erdvė. Raskime branduolį. Tuo tikslu išspręskime tiesinių lygčių sistemą

$$(0, 0, 0, 0) = (x_1, x_2, x_3, x_4) A,$$

arba

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0 \cdot x_4 &= 0, \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Kadangi rang $A=3$, tai tos sistemos sprendinys yra $(0, 0, 0, t)$ pavidalo. Todėl operatoriaus branduolys yra

$$\{(0, 0, 0, t) \mid t \in R\}.$$

Šio operatoriaus vaizdas yra visuma vektorių $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, su kuriais lygtis

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) A = (b_1, b_2, b_3, b_4),$$

t. y. tiesinių lygčių sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 &= b_1, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0 \cdot x_4 &= b_2, \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 &= b_3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 &= 0 \end{aligned}$$

turi sprendinį (yra suderinta). Iš tiesinių lygčių teorijos žinome, kad ta sistema suderinta tada ir tik tada, kai jos laisvųjų narių stulpelis yra sistemos matricos stulpelių tiesinė kombinacija, t. y.

$$A(R^4) = \{\beta \mid \beta = I_1(2, -1, 5, 1) + I_2(-1, 2, -6, 2) + I_3(3, 4, -2, 1), I_1, I_2, I_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Raskime vektoriaus $\beta_1 = (0, 7, -13, 2)$ pirmvaizdį. Kadangi $\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, tai $\alpha_0 = (-1, 1, 1, 0)$. Todėl šio elemento pirmvaizdis yra tiesinė daugdara

$$\{(-1, 1, 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Bendruoju atveju operatoriaus branduolį ir elemento pirmvaizdį randame sprenddami tiesinių lygčių sistemas.

Jeigu reikia rasti operatoriaus $\mathcal{A}$ branduolį, kai bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nurodyta šio operatoriaus matrica A , tai reikia spręsti lygtį $(x_1, \dots, x_n)A = (0, \dots, 0)$, t. y. homogeninių tiesinių lygčių sistemą.

Operatoriaus branduolys yra aibė

$$\left\{ \alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^n h_i \alpha_i \right\};$$

čia $(h_1, \dots, h_n)$ – užrašytosios lygties sprendiniai.

Norint rasti kokio nors elemento

$$\beta = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$$

pirmvaizdį, pakanka rasti lygties

$$(x_1, \dots, x_n)A = (b_1, \dots, b_n)$$

vieną sprendinį $(I_1^{(0)}, \dots, I_n^{(0)})$. Tada elemento β pirmvaizdis yra visuma elementų $\alpha + \alpha_0$; čia

$$\alpha = \sum_{i=1}^n h_i \alpha_i, \quad \alpha_0 = \sum_{i=1}^n I_i^{(0)} \alpha_i.$$

Jeigu ši lygtis nesuderinta, tai elemento β pirmvaizdis neegzistuoja, t. y. $\beta \notin \mathcal{A}(V)$.

Uždaviniai

17. Nustatykite operatoriaus rangą ir defektą, kai žinoma jo matrica:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ 6 & -7 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -10 & 3 & 3 & -11 \\ 1 & 1 & 2 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

18. Raskite operatoriaus branduolį, kai žinoma jo matrica:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Raskite vektoriaus, kurio koordinatės $(-1, -2, 7)$, pirmvaizdį, kai operatorius aprašytas 18 uždavinio, a , matrica.

20. Raskite vektoriaus, kurio koordinatės $(0, 0, 1, -1)$, pirmvaizdį, kai operatorius aprašytas 18 uždavinio, b , matrica.

§87. Tiesinio operatoriaus tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai

Tarkime, kad $\mathcal{A}$ yra n -matės vektorinės erdvės V tiesinis operatorius ir V_1 – koks nors tos erdvės poerdvis. Kadangi operatorius $\mathcal{A}$ apibrėžtas erdvėje V ir $V_1 \subset V$, tai operatoriaus reikšmė $(\alpha)\mathcal{A}$ apibrėžta su kiekvienu $\alpha \in V_1$. Taigi šis operatorius apibrėžtas ir erdvėje V_1 . Poerdvį V_1 operatorius atvaizduoja į aibę $\mathcal{A}(V_1)$, kuri bendruoju atveju nėra aibės V_1 poaibis, t. y. $\mathcal{A}(V_1) \subset V_1$.

Jeigu $\mathcal{A}(V_1) \subset V_1$, tai toks poerdvis V_1 vadinamas invariantiniu operatoriaus $\mathcal{A}$ atžvilgiu.

Operatoriaus branduolys yra invariantinis poerdvis. Kadangi poerdvių suma ir poerdvių sankirta yra poerdviai, tai *invariantinių poerdvių suma ir sankirta yra invariantiniai poerdviai.*

Jeigu V_1 yra vienmatis erdvės V poerdvis, tai egzistuoja toks $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_1 \neq 0$, kad kiekvienas $\alpha \in V_1$ tenkina lygybę $\alpha = a\alpha_1$; čia a – realusis skaičius. Jeigu $\alpha \in V_1$, $\alpha \neq 0$ ir $\beta \in V_1$, tai $\alpha = a\alpha_1$, $\beta = b\alpha_1$, todėl $\beta = ba^{-1}\alpha = c\alpha$. Taigi bet kurie du poerdvio V_1 elementai $\alpha \neq 0$ ir β yra susieti lygybe $\beta = c\alpha$; čia c – realusis skaičius. Jeigu, be to, V_1 yra invariantinis vienmatis poerdvis, tai su kiekvienu $\alpha \in V_1$ teisinga lygybė $(\alpha)\mathcal{A} = l\alpha$.

Kaip galima rasti visus vienmačius invariantinius poerdvius? Kad galėtume atsakyti į šį klausimą, reikia apibrėžti kai kurias naujas sąvokas.

Realusis skaičius l vadinamas erdvės V tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ tikrine reikšme, o erdvės V nenulinis vektorius α vadinamas to operatoriaus tikriniu vektoriumi, atitinkančiu tikrinę reikšmę l , jeigu $(\alpha)\mathcal{A} = l\alpha$.

Jeigu V_1 – invariantinis vienmatis poerdvis ir $\alpha, \beta \in V_1$, $\alpha \neq 0$, tai $\beta = c\alpha$, $(\alpha)\mathcal{A} \in V_1$, $(\beta)\mathcal{A} \in V_1$. Tada

$$(\beta)\mathcal{A} = (c\alpha)\mathcal{A} = c(\alpha)\mathcal{A} = c(l\alpha) = l(c\alpha) = l\beta.$$

Ši lygybė reiškia, kad visi nelygūs nuliui invariantinio vienmačio poerdvio V_1 elementai yra operatoriaus $\mathcal{A}$ tikriniai vektoriai, atitinkantys vieną ir tą pačią tikrinę reikšmę l .

Vieną tikrinę reikšmę atitinkantys vektoriai turi dar ir šitokią savybę.

Jeigu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ yra tikriniai vektoriai, atitinkantys tikrinę reikšmę l , tai su kiekvienu realiųjų skaičių rinkiniu $c_1, \dots, c_k$ vektorius

$$\alpha = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i \neq O$$

yra tikrinis vektorius, atitinkantis tą pačią tikrinę reikšmę l .

Tai išplaukia iš šitokių samprotavimų. Jeigu $(\alpha_i) \mathcal{A} = l\alpha_i, i=1, \dots, k$, tai

$$(\alpha) \mathcal{A} = \left(\sum_{i=1}^k c_i \alpha_i \right) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^k c_i (\alpha_i) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^k c_i l \alpha_i = l \sum_{i=1}^k c_i \alpha_i = l \alpha.$$

Iš to išplaukia: jeigu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ yra tikriniai vektoriai, tai jų generuoto poerdvio

$$H(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

kiekvienas nenulinis vektorius yra tikrinis; jis atitinka tikrinę reikšmę l . (O iš čia savo ruožtu išplaukia, kad poerdvis $H(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ yra invariantinis.)

Kita vertus, jeigu $\alpha \neq O$ yra operatoriaus $\mathcal{A}$ tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę l , tai tiesinis poerdvis $H(\alpha)$, generuotas elemento α , yra invariantinis vienmatis poerdvis: kai $\beta \in H(\alpha)$, tada $\beta = c\alpha$ ir

$$(\beta) \mathcal{A} = (c\alpha) \mathcal{A} = c(\alpha) \mathcal{A} = c(l\alpha) = l(c\alpha) = l\beta.$$

Todėl, norint rasti operatoriaus $\mathcal{A}$ vienmačius invariantinius poerdvius reikia rasti visas jo tikrines reikšmes (šiuo atveju visas realiąsias reikšmes, nes erdvė V nagrinėjama realiųjų skaičių lauko atžvilgiu) ir jas atitinkančius tiesiškai nepriklausomus tikrinius vektorius. Šių vektorių generuoti vienmačiai poerdviai ir bus ieškomieji invariantiniai vienmačiai poerdviai.

Kaip randamos operatoriaus tikrinės reikšmės ir jas atitinkantys tikriniai vektoriai, aiškinsimės kitame paragrafe. Dabar įrodysime vieną tikrinių vektorių savybę.

123 teorema. Operatoriaus $\mathcal{A}$ tikriniai vektoriai, atitinkantys skirtingas tikrines reikšmes, yra tiesiškai nepriklausomi.

Įrodymas. 1. Imkime dvi skirtingas tikrines reikšmes $l_1 \neq l_2$ ir jas atitinkančius tikrinius vektorius α_1, α_2 . Tare, kad α_1 ir α_2 yra tiesiškai priklausomi, t. y. kad $\alpha_2 = c\alpha_1$, gausime lygybes

$$(\alpha_2) \mathcal{A} = (c\alpha_1) \mathcal{A} = c(\alpha_1) \mathcal{A} = c(l_1 \alpha_1) = l_1(c\alpha_1) = l_1 \alpha_2 = l_2 \alpha_2.$$

Iš paskutinės lygybės gauname $l_1 = l_2$. Tai prieštarauja sąlygai, todėl prielaida $\alpha_2 = c\alpha_1$ – neteisinga.

2. Tarkime, kad teorema teisinga, kai yra $k-1$ tikrinė reikšmė: jeigu $l_1, \dots, l_{k-1}$ – skirtingos tikrinės reikšmės, tai jas atitinkantys tikriniai vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi. Įrodysime, kad tada teorema teisinga ir imant k tikrinių reikšmių. Tarkime, kad $l_1, \dots, l_k$ yra skirtingos tikrinės reikšmės, o jas atitinkantys tikriniai vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tiesiškai priklausomi. Kadangi

pagal prielaidą $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ yra tiesiškai nepriklausomi, tai $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \alpha_i$, ir bent vienas iš c_i čia nelygus nuliui. Tada

$$l_k \alpha_k = (\alpha_k) \mathcal{A} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i \alpha_i \right) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i (l_i \alpha_i),$$

t. y.

$$l_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i (l_i \alpha_i),$$

arba

$$\sum_{i=1}^{k-1} (l_k - l_i) c_i \alpha_i = 0.$$

Kadangi $l_k - l_i \neq 0$ ($i=1, \dots, k-1$) ir bent vienas iš c_i nelygus nuliui, tai pastaroji lygybė reiškia, kad vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ tiesiškai priklausomi. Gavome prieštaravimą. Taigi prielaida, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tiesiškai priklausomi, yra neteisinga. Teisingas teoremos tvirtinimas.

Pakartoję samprotavimus, kai $k=3, \dots, m$, įsitikiname, kad teorema teisinga.

Kai kurias tikrines reikšmes gali atitikti ne vienas, o du ar daugiau tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių. Tuo atveju tikrinę reikšmę atitinka ne vienmatis, o didesnės dimensijos invariantinis poerdvis. Kad tuo įsitikintume, tarkime, jog tiesiškai nepriklausomi vektoriai $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ yra operatoriaus $\mathcal{A}$ tikriniai vektoriai, atitinkantys tikrinę reikšmę l , t. y. $(\alpha_i) \mathcal{A} = l \alpha_i$. Tada su bet kokiais realiaisiais skaičiais $c_1, \dots, c_m$ teisinga lygybė

$$\left(\sum_{i=1}^m c_i \alpha_i \right) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m c_i (\alpha_i) \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m c_i (l \alpha_i) = l \left(\sum_{i=1}^m c_i \alpha_i \right),$$

kuri reiškia, kad kiekvienas poerdvio $H(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ nenulinis vektorius yra tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę l .

§88. Charakteristinė lygtis

Jeigu $\mathcal{A}$ yra erdvės V tiesinis operatorius, kurį bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ atitinka matrica A , tai, norint rasti tikrinius vektorius, atitinkančius kurią nors to operatoriaus tikrinę reikšmę l , pakanka sužinoti tų vektorių koordinates toje pačioje bazėje. Pasinaudoję operatoriaus matrica, lygtį $(\alpha) \mathcal{A} = l \alpha$, kurioje $\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$, užrašome šitaip:

$$(x_1, \dots, x_n) A = l (x_1, \dots, x_n).$$

Kadangi $l(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)lE_n$ ir $AE_n = A$, tai, padauginę abi lygties puses iš E_n , gauname

$$(x_1, \dots, x_n)A = (x_1, \dots, x_n)lE_n,$$

arba

$$(x_1, \dots, x_n)(A - lE_n) = 0.$$

Pastaroji lygtis reiškia n homogeninių tiesinių lygčių su n kintamųjų sistemą, kurios matrica yra $(A - lE_n)^T$. Kai l žinomas, išsprendę tą sistemą, randame l atitinkančius tikrinius vektorius.

Tarkime, kad l nežinomas. Remdamiesi homogeninių tiesinių lygčių sistemų teorija, išsiaiškinsime, kaip randama tikrinė reikšmė. *Sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos determinantas lygus nuliui, t. y. kai $|A - lE_n| = 0$.*

Taigi įrodėme šitokią teoremą.

124 teorema. *Skaičius l yra operatoriaus, kurio matrica A , tikrinė reikšmė tada ir tik tada, kai jis yra lygties $|A - xE_n| = 0$ sprendinys.*

Lygtis $|A - xE_n| = 0$ vadinama operatoriaus $\mathcal{A}$ charakteristine lygtimi.

Jeigu bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica yra A , o bazėje $\beta_1, \dots, \beta_n$ jo matrica yra B , tai pagal 124 teoremą to operatoriaus tikrinės reikšmės yra lygties

$$|A - xE_n| = 0,$$

taip pat ir lygties

$$|B - xE_n| = 0$$

sprendiniai. Taigi gali susidaryti įspūdis, kad operatoriaus tikrinės reikšmės priklauso nuo bazės pasirinkimo. Iš tikrųjų taip nėra – tikrinės reikšmės nepriklauso nuo pasirinktos bazės. Iš 118 teoremos $B = TAT^{-1}$; čia T – bazės keitimo matrica, ir $xE_n = x(TE_nT^{-1}) = T(xE_n)T^{-1}$.

Todėl

$$B - xE_n = T(A - xE_n)T^{-1}.$$

Padauginę šią lygybę iš kairės iš T^{-1} ir iš dešinės iš T , gauname

$$T^{-1}(B - xE_n)T = A - xE_n.$$

Kadangi $|T| \neq 0$ ir $|T^{-1}| \neq 0$, tai iš lygybės

$$|A - xE_n| = |T^{-1}| |B - xE_n| |T|$$

išplaukia, kad $|B - xE_n| = 0$ tada ir tik tada, kai $|A - xE_n| = 0$. Lygčių $|A - xE_n| = 0$ ir $|B - xE_n| = 0$ sprendiniai sutampa. Todėl vietoj antrosios lygties galime spręsti pirmąją.

Išsiaiškinsime, ką reiškia charakteristinės lygties kairioji pusė. Determinantas

$$|A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

yra n -ojo laipsnio polinomas (daugianaris) x atžvilgiu, nes, kaip matome, visuose pagrindinės įstrižainės elementuose yra x pirmasis laipsnis. Šis polinomas vadinamas *operatoriaus $\mathcal{A}$ arba jį atitinkančios matricos A charakteristiniu polinomu*. *Charakteristinio polinomo realiosios šaknys yra operatoriaus $\mathcal{A}$ (kartu ir matricos A) tikrinės reikšmės.*

Kadangi charakteristinės lygties sprendiniai nepriklauso nuo bazės, tai panašiųjų matricų charakteristinių polinomų šaknys sutampa. Vadinasi, tie polinamai gali skirtis tik pastoviu daugikliu.

Matrica $A - xE_n$ vadinama matricos A *charakteristine matrica*, o charakteristinio polinomo $|A - xE_n|$ (t. y. lygties $|A - xE_n| = 0$) šaknys vadinamos *matricos A charakteristinėmis šaknimis*. *Visos panašiosios matricos turi tas pačias charakteristines šaknis.*

Radę kurią nors operatoriaus $\mathcal{A}$ tikrinę reikšmę l , tą reikšmę atitinkančių tikrinių vektorių koordinates bazėje, kurioje operatoriaus matrica yra A , gausime išsprendę tiesinių homogeninių lygčių sistemą

$$(x_1, \dots, x_n)(A - lE_n) = (0, \dots, 0).$$

Kai šios sistemos sprendinių erdvės dimensija lygi 1, t. y. $\text{rang}(A - lE_n) = n - 1$, tikrinę reikšmę l atitinka vienmatis invariantinis poerdvis, o kai $\text{rang}(A - lE_n) = n - k$, tikrinę reikšmę l atitinka k -matis invariantinis poerdvis, t. y. k tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių, kurie sudaro invariantinio poerdvio bazę. Tų vektorių koordinatės yra sistemos fundamentinės sprendinių sistemos sprendinių komponentės.

Pavyzdys. Keturmatės erdvės V tiesinio operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica bazėje $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ yra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Raskime to operatoriaus tikrines reikšmes ir jas atitinkančius tikrinius vektorius.

Užrašome charakteristinę lygtį

$$|A - xE_4| = \begin{vmatrix} 1-x & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -3-x & 1 \\ 3 & -2 & 9 & 5-x \end{vmatrix} = 0$$

ir, pasinaudoję Laplaso teorema, gauname matricos A charakteristinį polinomą

$$|A - xE_4| = \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3-x & 1 \\ 9 & 5-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)(x^2 - 2x - 24).$$

Charakteristinė lygtis yra

$$(1-x)(2-x)(x^2 - 2x - 24) = 0.$$

Jos šaknys, t. y. operatoriaus tikrinės reikšmės (kartu ir matricos A charakteristinės šaknys) yra

$$l_1=1, l_2=2, l_3=6, l_4=-4.$$

Operatoriaus tikrinių vektorių koordinatės bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ rasime išsprendę lygtis (sistemas)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)(A - l_k E_4) = (0, 0, 0, 0),$$

t. y. homogeninių tiesinių lygčių su keturiais kintamaisiais sistemas.

1. Imame $l_1=1$. Gauname:

$$A - l_1 E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tikrinių vektorių, atitinkanti reikšmę $l_1=1$, rasime išsprendę sistemą

$$5x_2 + 3x_4 = 0,$$

$$3x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0,$$

$$-4x_3 + 9x_4 = 0,$$

$$x_3 + 4x_4 = 0.$$

Jos sprendinys yra $(t_1, -3t_1, 0, 0)$, $t_1 \in \mathbb{R}$.

Taigi tikrinę reikšmę $l_1=1$ atitinka vektorius, kurio koordinatės bazėje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ yra $(t_1, -3t_1, 0, 0)$, t. y. $\alpha = c_1(\alpha_1 - 3\alpha_2)$; čia c_1 – bet koks nelygus nuliui realusis skaičius.

2. Paėmę $l_2=2$, gauname

$$A - l_2 E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Šiuo atveju sprendžiame sistemą

$$-x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$3x_1 + 6x_3 - 2x_4 = 0,$$

$$-5x_3 + 9x_4 = 0,$$

$$x_3 + 3x_4 = 0;$$

jos bendrasis sprendinys yra $(0, t_2, 0, 0)$, $t_2 \in \mathbb{R}$. Todėl tikrinę reikšmę $l_2=2$ atitinkantis tikrinis vektorius yra $c\alpha_2$; čia c – bet koks nelygus nuliui realusis skaičius.

3. Tikrinių vektorių, atitinkanti reikšmę $l_3=6$, rasime išsprendę sistemą

$$-5x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$3x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0,$$

$$-9x_3 + 9x_4 = 0,$$

$$x_3 - x_4 = 0.$$

Jos sprendinys yra $(8t, 11t, 5t, 5t)$, $t \in \mathbb{R}$, todėl $l_3=6$ atitinka tikrinis vektorius $c_3(8\alpha_1 + 11\alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4)$; čia c_3 – bet koks nelygus nuliui realusis skaičius.

4. Tikrinių vektorių, atitinkanti tikrinę reikšmę $l_4=-4$, rasime išsprendę sistemą

$$5x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 0,$$

$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0,$$

$$x_3 + 9x_4 = 0,$$

$$x_3 + 9x_4 = 0.$$

Šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$\left(\frac{42}{5}t, \frac{77}{15}t, -9t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jį padauginę iš 15, gauname

$$(126t, 77t, -135t, 15t), \quad t \in \mathbb{R},$$

todėl reikšmę $l_4 = -4$ atitinka tikrinis vektorius

$$c(126\alpha_1 + 77\alpha_2 - 135\alpha_3 + 15\alpha_4);$$

čia c – bet koks nelygus nuliui realusis skaičius.

Taigi operatorius $\mathcal{A}$ turi keturias skirtingas tikrines reikšmes. Todėl jis turi ir keturis vienmačius invariantinius poerdvius, kuriuos generuoja tas reikšmes atitinkantys tikriniai vektoriai.

§89. Paprastojo spektro tiesiniai operatoriai

Praeito paragrafo pavyzdyje tiesinio operatoriaus tikrinių reikšmių skaičius buvo lygus erdvės dimensijai. Be to, visos tikrinės reikšmės buvo skirtingos. Be abejo, ir bet kokiaje n -matėje erdvėje yra tiesinių operatorių, turinčių n skirtingų tikrinių reikšmių. Kad tuo įsitikintume, užtenka imti operatorių, kurio matrica kokioje nors bazėje yra

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix};$$

čia $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) ir $a_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Šios matricos charakteristinis polinomas yra

$$|A - xE_n| = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_i - x),$$

o charakteristinės šaknys $l_i = a_i$ ($i = 1, \dots, n$) skirtingos.

n -matės erdvės tiesinis operatorius $\mathcal{A}$ vadinamas paprastojo spektro tiesiniu operatoriumi, jeigu jis turi n tikrinių reikšmių ir visos jos yra skirtingos.

125 teorema. *Erdvės V tiesinis operatorius $\mathcal{A}$ yra paprastojo spektro tiesinis operatorius tada ir tik tada, kai jo matrica panaši į ištiržaininę matricą, kurios pagrindinės ištiržainės elementai yra skirtingi realieji skaičiai.*

Įrodymas. Pakankamumas. Tarkime, kad $\mathcal{A} \leftrightarrow A$, $A = UA_1U^{-1}$ ir

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

$a_1 \neq a_2 \neq \dots \neq a_n$ — realieji skaičiai. Prisiminę charakteristinę lygtį, gauname lygtį

$$|A - zE_n| = |A_1 - zE_n| = \prod_{i=1}^n (a_i - z) = 0,$$

kurios sprendiniai yra $a_1, a_2, \dots, a_n$ — skirtingi tikriniai skaičiai.

Būtinumas. Paprastojo spektro operatorius $\mathcal{A}$ turi n skirtingų tikrinių reikšmių, o jas atitinkantys tikriniai vektoriai yra nepriklausomi. Imkime tikrinius vektorius $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, atitinkančius skirtingas tikrines reikšmes $l_1, \dots, l_n$. Būdami tiesiškai nepriklausomi, jie sudaro bazę. Tačiau $(\alpha_i, \mathcal{A}) = l_i \alpha_i$ ($i = 1, \dots, n$). Todėl operatoriaus $\mathcal{A}$ matrica šioje bazėje yra įstrižaininė matrica, kurios pagrindinės įstrižainės elementai yra operatoriaus tikrinės reikšmės, t. y.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_n \end{pmatrix}.$$

Operatorių $\mathcal{A}$ atitinkančios matricos visose bazėse yra panašios, todėl visos jos yra panašios į šią matricą.

Kadangi $l_1, \dots, l_n$ yra operatoriaus matricos charakteristinės šaknys, tai iš čia išplaukia išvada:

matrica su realiais elementais panaši į įstrižaininę matricą su realiais skirtingais pagrindinės įstrižainės elementais tada ir tik tada, kai jos charakteristinės šaknys yra realios ir skirtingos.

Iš praeitame paragrafe išnagrinėto pavyzdžio matome, kad matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \text{ panaši į matricą } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Norint gauti įstrižaininę matricą, panašią į matricą A , reikia rasti matricos A charakteristines šaknis $l_1, \dots, l_n$, t. y. charakteristinio polinomo $|A - zE_n|$ šaknis. Jeigu tos šaknys yra skirtingos ir priklauso tam pačiam laukui kaip ir matricos A elementai, tai įstrižaininė matrica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

panaši į matricą A . Priešingu atveju nėra įstrižaininės matricos, panašios į matricą A . Beje, kai n didelis ($n > 4$), rasti charakteristinio polinomo šaknis nėra paprastas uždavinys. Radus matricą Λ , lengvai galima rasti ir tokią matricą T , kad būtų $\Lambda = TAT^{-1}$. Tuo tikslu pakanka rasti tikrines reikšmes atitin-

kančių tikrinių vektorių koordinates ir iš jų sudaryti matricą – tai ir bus ieškomoji matrica.

Pavyzdžiui, praeitame paragrafe nagrinėto pavyzdžio matrica T yra

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 11 & 5 & 5 \\ 126 & 77 & -135 & 15 \end{pmatrix}.$$

Uždaviniai

21. Raskite operatoriaus tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius, kai jo matrica yra:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Raskite šių matricų charakteristinius polinomus:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

23. Įrodykite, kad vektorinės erdvės poerdvis, invariantinis neišsigimusio tiesinio operatoriaus atžvilgiu, yra invariantinis ir jam atvirkštinio operatoriaus atžvilgiu.

24. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra tiesinio operatoriaus tikriniai vektoriai. Įrodykite, kad $H(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ yra invariantinis operatoriaus atžvilgiu.

25. Įrodykite:

1. Jeigu tiesinis operatorius $\mathcal{A}$ turi atvirkštinį operatorių $\mathcal{A}^{-1}$, tai tų operatorių tikriniai vektoriai sutampa. Raskite ryšį tarp tų operatorių tikrinių reikšmių.

2. Operatoriaus $\mathcal{A}$ ir $c\mathcal{A}$ tikriniai vektoriai sutampa, o tikrines reikšmes skiriasi daugikliu c .

3. Jeigu α yra tiesinio operatoriaus tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę l , tai α yra tikrinis vektorius ir operatorių $\mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3, \dots, \mathcal{A}^k$ su bet koku natūriniu k . Raskite operatorių $\mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3, \dots, \mathcal{A}^k$ tikrines reikšmes, kai žinomos operatoriaus $\mathcal{A}$ tikrines reikšmes $l_1, l_2, \dots, l_k$.

§90. Simetriniai operatoriai

Šiame ir kituose paragrafuose laikysime, kad vektorinėje erdvėje $\mathbf{R}^n$ apibrėžta skaliari nė daugyba ir kad bazė $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, kurios atžvilgiu nagrinėsime operatorių matricas, yra ortonomuota, t. y.

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Tuo atveju vektorių $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ ir $\beta = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i$ skaliarinė sandauga bus šitokia:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Tiesinis operatorius, kurio matrica ortonormuotoje bazėje yra simetrinė, vadinamas simetriniu.

Pavyzdžiui, vienetinis operatorius yra simetrinis, nes jo matrica bet kokioje bazėje yra simetrinė.

Susipažinsime su kai kuriomis simetrinių operatorių savybėmis.

1. Kadangi simetrinių matricų suma yra simetrinė matrica, simetrinės matricos ir realiojo skaičiaus sandauga — irgi simetrinė matrica, tai *simetrinių operatorių aibė yra vektorinė erdvė — tiesinių Euklido erdvių operatorių erdvės poerdvis.*

2. Būtina ir pakankama sąlyga, kad operatorius S būtų simetrinis, — kiekviena vektorių pora α, β turi tenkinti lygybę $\langle (\alpha)_{\mathcal{S}}, \beta \rangle = \langle \alpha, (\beta)_{\mathcal{S}} \rangle$.

Kadangi operatoriaus matrica $S = (s_{ij})$ yra simetrinė: $s_{ij} = s_{ji}$, tai, paėmę vektorius α, β ir pažymėję vektoriaus $(\alpha)_{\mathcal{S}}$ koordinates $z_1, \dots, z_n$, o vektoriaus $(\beta)_{\mathcal{S}}$ koordinates $v_1, \dots, v_n$, be to, pasinaudoję išraiškomis

$$(z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n) S, \quad (v_1, \dots, v_n) = (y_1, \dots, y_n) S,$$

gauname:

$$\langle (\alpha)_{\mathcal{S}}, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n z_i y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j s_{ji} y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j s_{ij} y_i,$$

$$\langle \alpha, (\beta)_{\mathcal{S}} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j v_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n s_{ij} y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j s_{ij} y_i.$$

Šios lygybės reiškia sąlygos būtinumą.

Kita vertus, jei $\langle (\alpha)_{\mathcal{S}}, \beta \rangle = \langle \alpha, (\beta)_{\mathcal{S}} \rangle$, t. y. jei lygybė

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j s_{ji} y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j s_{ij} y_i$$

teisinga su visais α, β , tai, paėmę tokį α , kurio koordinatės $x_k = 1, x_j = 0 (j \neq k)$, ir tokį β , kurio koordinatės $y_m = 1, y_i = 0 (i \neq m)$, gauname lygybes $s_{km} = s_{mk} (k, m = 1, \dots, n)$. Šios lygybės reiškia, kad operatoriaus matrica S yra simetrinė.

3. Kiekviena simetrinės matricos charakteristinė šaknis yra realusis skaičius.

Tarkime, kad l yra kokia nors lygties $|S - xE_n| = 0$ šaknis. Tada sistema

$$(x_1, \dots, x_n) (S - xE_n) = (0, \dots, 0)$$

turi nenulinį sprendinį $(l_1, \dots, l_n)$. Lygybes

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} l_j = l l_i \quad (i=1, \dots, n)$$

padauginę iš skaičiams l_i jungtinių skaičių $\bar{l}_i (i=1, \dots, n)$ ir sudėję, gauname

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} l_j \bar{l}_i = l \sum_{i=1}^n |l_i|^2.$$

Dešinėje pusėje esantį realųjį skaičių pažymime raide d ; užrašę abiejų pusių jungtinius, gauname

$$\bar{l} d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{s_{ij} l_j \bar{l}_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ij} \bar{l}_j l_i,$$

nes $\bar{\bar{l}}_i = l_i, s_{ij}$ — realusis skaičius. Kadangi $s_{ij} = s_{ji}$, tai ši lygybė reiškia, kad $\bar{l} d = l d$, o iš čia $\bar{l} = l$, nes $d \neq 0$.

4. Simetrinio operatoriaus skirtingas tikrines reikšmes atitinkantys tikriniai vektoriai yra ortogonalūs.

Kad tuo įsitikintume, imkime tikrines reikšmes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ir jas atitinkančius vektorius α_1, α_2 . Kadangi $(\alpha_1) \mathcal{D} = \lambda_1 \alpha_1$, o $(\alpha_2) \mathcal{D} = \lambda_2 \alpha_2$, tai iš lygbių

$$\lambda_1 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle (\alpha_1) \mathcal{D}, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_1, (\alpha_2) \mathcal{D} \rangle = \lambda_2 \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$$

gauname $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$. Tačiau $\lambda_1 \neq \lambda_2$, todėl $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$.

5. Operatorius yra simetrinis tada ir tik tada, kai egzistuoja ortonormuota bazė, sudaryta iš to operatoriaus tikrinių vektorių.

Kai ortonormuotos bazės vektoriai $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra tikriniai operatoriaus vektoriai, jo matrica

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

yra simetrinė.

Norint įrodyti sąlygos būtinumą, reikia šitokios lemos.

Lema. Jei poerdvis V_1 yra invariantinis simetrinio operatoriaus atžvilgiu, tai ir jo ortogonalusis papildinys V_2 yra invariantinis.

■ Lemos įrodymui užtenka pastebėti: jei $\alpha_1 \in V_1$, tai ir $(\alpha) \mathcal{D} \in V_1$ ir su kiekvienu $\beta \in V_2$ teisinga lygybė

$$\langle (\alpha) \mathcal{D}, \beta \rangle = \langle \alpha, (\beta) \mathcal{D} \rangle = 0.$$

Vadinasi,

$$(\beta) \mathcal{D} \perp \alpha, \quad \text{t. y.} \quad (\beta) \mathcal{D} \in V_2.$$

Tarkime, kad $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ yra simetrinio operatoriaus skirtingos tikrinės reikšmės ir reikšmę λ_i ($i=1, \dots, s$) atitinka ortonormuoti tikriniai vektoriai $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{k_i}^{(i)}$. Poerdvis H ($\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(1)}, \dots, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{k_s}^{(s)}$) yra invariantinis, jo bazė $\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(1)}, \dots, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{k_s}^{(s)}$ yra ortonormuota, o jo dimensija lygi $k_1 + \dots + k_s$. Jeigu $k_1 + \dots + k_s = n$, tai sukonstruoti bazę ir yra ieškomoji ortonormuota bazė, sudaryta iš tikrinių vektorių. Jeigu $k_1 + \dots + k_s = n_1 < n$, tai imkime poerdviui H ortogonalų papildinį H_1 , kurio dimensija lygi $n - n_1 > 0$. Pagal lemą H_1 irgi invariantinis, todėl jame bus bent vienas tikrinis vektorius, atitinkantis kurią nors iš tikrinių reikšmių. Tačiau visus tokius vektorius įjungę į sistemą $\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{k_1}^{(1)}, \dots, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{k_s}^{(s)}$. Gautasis prieštaravimas rodo, jog prielaida klaidinga. Todėl $n_1 = n$.

§91. Ortogonalieji operatoriai

Matematikoje, ypač geometrijoje, labai dažnai naudojamosi kintamųjų tiesinėmis transformacijomis, kurios nekeičia atkarpų ilgio, t. y. nekeičia skaliarinės sandaugos reikšmės. Tokios transformacijos yra postūmiai, posūkiai, veidrodiniai atspindžiai ir kt. Šiame paragrafe nagrinėsime tokių transformacijų (operatorių) savybes bendruoju atveju.

Euklido erdvės tiesinis operatorius $\mathcal{D}$ vadinamas *ortogonalioju*, jeigu jis nekeičia skaliarinės sandaugos, t. y. bet kokiems erdvės vektoriams tinka lygybė

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle (\alpha) \mathcal{D}, (\beta) \mathcal{D} \rangle.$$

Susipažinsime su ortogonaliojo operatoriaus savybėmis.

1. Ortogonalusis operatorius nekeičia vektoriaus normos ir ilgio, taip pat kampų tarp vektorių, — jis gali pakeisti tik jų orientaciją.

Visai nesunku tuo įsitikinti, tarus, kad $\mathcal{D}$ ortogonalus. Pakanka pastebėti, jog iš lygybės $\langle (\alpha) \mathcal{D}, (\alpha) \mathcal{D} \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle$ išplaukia $|\alpha| = |(\alpha) \mathcal{D}|$, o iš lygybės $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle (\alpha) \mathcal{D}, (\beta) \mathcal{D} \rangle$ išplaukia $\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \cos \langle (\alpha) \mathcal{D}, (\beta) \mathcal{D} \rangle$.

2. Ortogonaliojo operatoriaus matricos $\mathcal{D}=(d_{ij})$ ortonormuotoje bazėje eilutės (stulpeliai) sudaro ortonormuotą vektorių rinkinį, t. y.

$$\sum_{j=1}^n d_{kj}d_{mj} = \begin{cases} 1, & k=m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n d_{ij}d_{ik} = \begin{cases} 1, & j=k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Kad tuo įsitikintume, tarkime, jog $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra ortonormuota bazė ir

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^n y_i \varepsilon_i, \quad (\alpha) \mathcal{D} = \sum_{i=1}^n z_i \varepsilon_i, \quad (\beta) \mathcal{D} = \sum_{i=1}^n v_i \varepsilon_i.$$

Tada iš lygybės $\langle (\alpha) \mathcal{D}, (\beta) \mathcal{D} \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ gauname

$$\sum_{j=1}^n z_j v_j = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Tačiau

$$z_j = \sum_{k=1}^n x_k d_{kj}, \quad v_j = \sum_{m=1}^n y_m d_{mj},$$

todėl

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{j=1}^n z_j v_j = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left(\sum_{j=1}^n d_{kj} d_{mj} \right) x_k y_m.$$

Ši lygybė teisinga su visais α ir β . Paėmę jų koordinatėmis $x_i=1, x_k=0$ ($k \neq i$), $y_i=1, y_m=0$ ($m \neq i$), gauname $\sum_{j=1}^n d_{ij} d_{ij} = 1$, o paėmę $x_i=1, x_k=0$ ($k \neq i$), $y_s=1, y_m=0$ ($m \neq s$), kai $i \neq s$, gauname

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} d_{sj} = 0.$$

Pastarosios lygybės rodo, kad operatoriaus matricos eilutės yra ortonormuoti vektoriai-eilutės. Norėdami įrodyti analogišką tvirtinimą apie stulpelius, pastebėsime, kad $DD^T = E_n$, t. y. D yra reguliari. Bet tada ir $D^T D = E_n$. Vadinasi, matricos D stulpeliai taip pat yra ortonormuoti vektoriai-stulpeliai.

Matrica, kurios eilutės (stulpeliai) yra ortonormuoti, vadinama ortogonaliaja.

3. Matrica yra ortogonaliai tada ir tik tada, kai jos transponuotoji matrica yra lygi atvirkštinei, t. y. $D^T = D^{-1}$.

Tarus, kad $D=(d_{ij})$, šio teiginio teisingumą rodo lygybė

$$DD^T = (c_{ik}); \quad \text{čia} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n d_{ij} d_{kj} \quad (i, k=1, \dots, n).$$

4. Kadangi $|D^T| = |D|$ ir $D^T D = E_n$, tai $|D|^2 = 1$. Taigi ortogonaliosios matricos determinantas lygus 1 arba -1.

5. Jeigu D_1 ir D_2 – ortogonaliosios matricos, t. y. $D_1^T = D_1^{-1}$ ir $D_2^T = D_2^{-1}$, tai $(D_1 D_2)^{-1} = D_2^{-1} D_1^{-1} = D_2^T D_1^T = (D_1 D_2)^T$. Ši lygybė reiškia, kad ortogonalųjų matricų sandauga yra ortogonalioji matrica.

6. Remdamiesi ketvirtąja ir penktąja ortogonalųjų matricių savybėmis, įsitikiname, kad *ortogonalusis operatorius yra neišsigimęs operatorius ir ortogonalųjų operatorių sandauga yra ortogonalusis operatorius*. Taigi *ortogonalųjų operatorių aibė sudaro multiplikacinę grupę*, kuri yra Euklido erdvės neišsigimusių operatorių multiplikacinės grupės pogrupis.

7. *Tiesinis operatorius $\mathcal{D}$ yra ortogonalus tada ir tik tada, kai jis ortonormuotą bazę atvaizduoja į ortonormuotą.*

Sąlygos būtinumas išplaukia iš to, kad ortogonalusis operatorius nekeičia skaliarinės sandaugos reikšmės.

Pakankamumui įrodyti tarkime, kad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra ortonormuota bazė ir vektoriai $(\varepsilon_1)\mathcal{D}, \dots, (\varepsilon_n)\mathcal{D}$ taip pat sudaro ortonormuotą bazę, t. y.

$$\langle (\varepsilon_i)\mathcal{D}, (\varepsilon_k)\mathcal{D} \rangle = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Kai operatoriaus matrica yra $D=(d_{ij})$,

$$(\varepsilon_i)\mathcal{D} = \sum_{j=1}^n d_{ij} \varepsilon_j, \quad (\varepsilon_k)\mathcal{D} = \sum_{j=1}^n d_{kj} \varepsilon_j,$$

ir

$$\langle (\varepsilon_i)\mathcal{D}, (\varepsilon_k)\mathcal{D} \rangle = \sum_{j=1}^n d_{ij} d_{kj} = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Šios lygybės reiškia, kad matrica D yra ortogonalinė.

Uždaviniai

Įrodykite šiuos teiginius.

26. Jeigu $\mathcal{S}$ simetrinis operatorius, tai $l\mathcal{S}$ simetrinis su kiekvienu $l \in \mathbb{R}, l \neq 0$.

27. Jeigu $\mathcal{D}$ ortogonalusis operatorius, tai $l\mathcal{D}$ ortogonalus su kiekvienu $l \in \mathbb{R}$ ir $\mathcal{D}^k$ ortogonalus su kiekvienu $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$.

28. Jeigu $\mathcal{S}$ simetrinis operatorius turi atvirkštinį $\mathcal{S}^{-1}$, tai $\mathcal{S}^{-1}$ yra simetrinis operatorius.

29. Ortogonaliojo operatoriaus $\mathcal{D}$ vienmačiai invariantiniai poerdviai yra poromis ortogonalūs.

Tiesinių nelygybių sistemos. Tiesinio programavimo elementai

§92. Tiesinių nelygybių sistema, jos išvados

Tiesinė nelygybė su n kintamųjų vadiname predikata

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b; \quad (8.1)$$

čia $a_j \in \mathbf{R}$ ($j=1, \dots, n$), $b \in \mathbf{R}$.

Kiekvieną realiųjų skaičių rinkinį $l_1, \dots, l_n$, su kuriuo teiginys

$$\sum_{j=1}^n a_j l_j \leq b$$

teisingas, vadiname (8.1) *nelygybės sprendiniu*.

Predikatą

$$\bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \right) \quad (\mathcal{N})$$

(čia $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $b_i \in \mathbf{R}$ ($i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$)) vadiname tiesinių nelygybių sistema su m nelygybių ir n kintamųjų; m ir n – natūriniai skaičiai.

Realiųjų skaičių rinkinį ($l_1, \dots, l_n$) vadiname nelygybių sistemos ($\mathcal{N}$) sprendiniu, jei teiginys

$$\bigwedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} l_j \leq b_i \right)$$

teisingas.

Pažymėję $\mathcal{N}_i$ nelygybės

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

sprendinių aibę, $i=1, 2, \dots, m$, o $\mathcal{N}$ – nelygybių sistemos sprendinių aibę, turėsime

$$\mathcal{N} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{N}_i \subset \mathbb{R}^n.$$

Kai $\mathcal{N} \neq \emptyset$, nelygybių sistema ($\mathcal{N}$) vadinama suderinta, kai $\mathcal{N} = \emptyset$, nelygybių sistema ($\mathcal{N}$) vadinama nesuderinta.

Sakykime, kad erdvėse $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, yra apibrėžta skaliarinė daugyba natūraliu būdu: kai $\alpha = (a_1, \dots, a_k)$, $x = (x_1, \dots, x_k)$,

$$\langle \alpha, x \rangle = \sum_{j=1}^k a_j x_j.$$

Pastebėję, kad

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = \langle \alpha, x \rangle,$$

$\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ ir $x = (x_1, \dots, x_n)$, (8.1) nelygybę galėsime užrašyti šitaip:

$$\langle \alpha, x \rangle \leq b,$$

o nelygybių sistemą ($\mathcal{N}$) taip:

$$\bigwedge_{i=1}^m (\langle \alpha_i, x \rangle \leq b_i);$$

čia $\alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ – sistemos ($\mathcal{N}$) matricos $A = (a_{ij})$ i -oji eilutė.

Susitarę rašyti $\alpha \leq \beta$, kai $\alpha = (a_1, \dots, a_k)$, $\beta = (b_1, \dots, b_k)$ ir $a_j \leq b_j$, $j=1, 2, \dots, k$ ($k=2, 3, \dots$), nelygybių sistemą galėsime užrašyti šitokiu pavidalu:

$$Ax^T \leq \beta^T; \quad (8.2)$$

čia A – sistemos ($\mathcal{N}$) matrica, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\beta = (b_1, \dots, b_m)$.

Domėsimės tiesinių nelygybių sistemos ($\mathcal{N}$) suderintumo sąlygomis. Tas sąlygas gausime išnagrinėję homogeninių tiesinių nelygybių sistemą

$$Ax^T \leq 0 \quad (H)$$

ir jos išvadas.

Tiesinė nelygybė

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq 0$$

yra tiesinių nelygybių sistemos (H) išvada, jei kiekvienas tos sistemos sprendinys yra ir nelygybės sprendinys.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad yra teisingas teiginys:

$$\text{jei } A\alpha^T \leq O, \alpha = (l_1, \dots, l_n), \text{ tai } \sum_{j=1}^n c_j l_j \leq 0.$$

Pažymėję nelygybės koeficientų eilutę $\gamma = (c_1, \dots, c_n)$, tą nelygybę galime užrašyti šitaip: $\langle \gamma, x \rangle \leq 0$.

Minkovskio teorema. Nelygybė $\langle \gamma, x \rangle \leq 0$ yra tiesinių homogeninių nelygybių sistemos (H) išvada tada ir tik tada, kai vektorius-eilutė γ yra sistemos (H) matricos A eilučių neneigiama tiesinė kombinacija, t. y. kai egzistuoja tokie neneigiami skaičiai $l_1, \dots, l_m$, kad

$$\gamma = l_1 \alpha_1 + \dots + l_m \alpha_m.$$

Kadangi $\alpha_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ ($i=1, 2, \dots, m$), tai teoremos sąlyga virsta šitoku teiginiu: yra tokie neneigiami skaičiai $l_1, \dots, l_m$, su kuriais teisingos lygybės

$$c_j = l_1 a_{1j} + l_2 a_{2j} + \dots + l_m a_{mj} \quad (j=1, \dots, n).$$

Pastarasis teiginys reiškia, kad lygčių sistema

$$\bigwedge_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \right)$$

turi sprendinį su neneigiamomis komponentėmis. Tos sistemos matrica yra A^T , taigi sistemą galima užrašyti šitaip:

$$(y_1, \dots, y_m) A = (c_1, \dots, c_n).$$

Irodymas. Pakankamumas. Tarkime, kad $l_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$) ir $c_j = l_1 a_{1j} + \dots + l_m a_{mj}$ ($j=1, 2, \dots, n$). Jeigu $\gamma' = (h_1, \dots, h_n)$ yra sistemos (H) sprendinys, tai

$$A(\gamma')^T \leq O,$$

arba

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} h_j \leq 0 \quad (i=1, \dots, m).$$

Bet tada

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m l_i a_{ij} \right) h_j = \sum_{i=1}^m l_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} h_j \right) \leq 0.$$

Tai reiškia, kad $(h_1, \dots, h_n)$ yra nelygybės $\langle \gamma, x \rangle \leq 0$ sprendinys. Ta nelygybė yra nelygybių sistemos (H) išvada.

Būtinumas. Taikysime sustiprintą matematinės indukcijos principą.
1. Tikrinsime, ar teorema teisinga tuo atveju, kai sistemoje (H) tėra viena nelygybė

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq 0. \quad (8.3)$$

Jeigu kiekvienas $c_j = qa_j$ ir $q < 0$, tai kiekvienas tos nelygybės sprendinys $(h_1, \dots, h_n)$, kuriam $\sum_{j=1}^n a_j h_j < 0$, tenkina nelygybę

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j = \sum_{j=1}^n (qa_j) h_j = q \sum_{j=1}^n a_j h_j > 0.$$

Taigi šiuo atveju nelygybė

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq 0 \quad (8.4)$$

nėra (8.3) nelygybės išvada.

Jeigu koeficientai c_j ($j=1, \dots, n$) nėra proporcingi koeficientams a_j , tai galime rasti bent du tokius numerius j_1, j_2 , kad būtų

$$\begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{j_2} \\ c_{j_1} & c_{j_2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tada, esant bet kokiems skaičiams $a < 0$ ir $c > 0$, sistema

$$a_{j_1} x_{j_1} + a_{j_2} x_{j_2} = a,$$

$$c_{j_1} x_{j_1} + c_{j_2} x_{j_2} = c,$$

kartu ir sistema

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = a,$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = c$$

turi sprendinių. Vadinasi, (8.4) nelygybė nėra (8.3) nelygybės išvada.

Taigi lieka vienintelis trečiasis atvejis: $c_j = la_j$ ($j=1, \dots, n$), $l > 0$.

2. Tarsime, kad teorema teisinga, kai $m=1, \dots, r-1$, ir įrodysime, kad tada ji teisinga ir kai $m=r$.

Imkime $m=r > 1$ ir pažymėkime

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i=1, \dots, m), \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Kadangi pagal teoremos sąlygą nelygė $f(x) \leq 0$ yra nelygybių sistemos $f_i(x) \leq 0$ ($i = 1, \dots, r$) išvada, tai galima rasti tokius skaičius $q_1, \dots, q_r$, kad būtų

$$f(x) = \sum_{i=1}^r q_i f_i(x). \quad (8.5)$$

Priešingu atveju sistema

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \\ f_i(x) &= 0 \quad (i = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

turėtų sprendinį. Tai reikštų, kad egzistuoja sistemos (H) sprendinys, kuris netenkina nelygės $f(x) \leq 0$.

Jeigu skaičiai $q_1, \dots, q_r$ yra neneigiami, tai teorema įrodyta.

Jeigu tarp jų yra neigiamų, tai galima sakyti, kad $q_1, \dots, q_s$ yra neigiami, o $q_{s+1}, \dots, q_r$ — neneigiami.

Kai

$$f^*(x) = q_1 f_1(x) + \sum_{i=s+1}^r q_i f_i(x),$$

iš (8.5) lygybės ir teoremos sąlygų išplaukia, kad nelygė $f^*(x) \leq 0$ yra nelygybių sistemos (H) išvada.

Iš funkcijos $f^*(x)$ išraiškos matome, kad nelygė $f^*(x) \leq 0$ yra nelygybių sistemos

$$\begin{aligned} f_1(x) &\geq 0, \\ f_i(x) &\leq 0 \quad (i = s+1, \dots, r) \end{aligned}$$

išvada. Į sistemą (H) įeina nelygė $f_1(x) \leq 0$, o į pastarąją sistemą — $f_1(x) \geq 0$. Prijungdami naujas nelygybes, tik susiauriname sprendinių aibę. Taigi nelygė $f^*(x) \leq 0$ yra sistemos $f_i(x) \leq 0$ ($i = 2, \dots, r$) išvada. Todėl pagal indukcijos prielaidą egzistuoja tokie neneigiami skaičiai $t_2, \dots, t_r$, kad

$$f^*(x) = \sum_{i=2}^r t_i f_i(x).$$

Pasinaudoję šia lygybe, gauname funkcijos $f(x)$ išraišką

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^r q_i f_i(x) = f^*(x) + \sum_{i=2}^s q_i f_i(x) = \\ &= \sum_{i=2}^s (t_i + q_i) f_i(x) + \sum_{i=s+1}^r t_i f_i(x) = \sum_{i=1}^r q'_i f_i(x), \end{aligned}$$

$$q'_1 = 0, \quad q'_i = t_i + q_i \quad (i = 2, \dots, s), \quad q'_i = t_i \quad (i = s+1, \dots, r),$$

kurioje yra mažiau kaip s neigiamų koeficientų (neigiami gali būti tik $q'_j = -t_j + q_j$ ($j = 2, \dots, s$), t. y. ne daugiau kaip $(s-1)$ koeficientas).

Pakartoję šiuos samprotavimus ne daugiau kaip s kartų, gausime išraišką

$$f(x) = \sum_{i=1}^r l_i f_i(x),$$

kurioje nebus nė vieno neigiamo koeficiento.

Iš sustiprinto matematinės indukcijos principo išplaukia, kad teorema teisinga imant bet kokią m .

Remdamiesi Minkovskio teorema, lengvai gauname būtinas ir pakankamas sąlygas, kad tiesinių nelygybių sistema neturėtų sprendinio. Tokios sąlygos pateikiamos 126 teoremoje.

126 teorema. *Tiesinių nelygybių sistema ($\mathcal{H}$) neturi sprendinio tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie neneigiami skaičiai $l_1, \dots, l_m$, kurie tenkina tapatybę*

$$\sum_{i=1}^m l_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0$$

su visais n -matės erdvės vektoriais $(x_1, \dots, x_n)$ ir nelygybę

$$\sum_{i=1}^m l_i b_i < 0.$$

Irodymas. Tarkime, kad sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m)$$

nesuderinta. Tada nelygybių sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i t \leq 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

suderinta ir nelygybė $t \leq 0$ yra jos išvada. Todėl pagal Minkovskio teoremą egzistuoja tokie neneigiami skaičiai $l_1, \dots, l_m$, kad

$$\sum_{i=1}^m l_i a_{ij} = 0 \quad (j=1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^m l_i b_i = -1.$$

Pirmąsias lygybes padauginę atitinkamai iš $x_1, \dots, x_n$ ir sudėję, gauname lygybę

$$\sum_{i=1}^m l_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0,$$

kuri kartu su nelygybe

$$\sum_{i=1}^m l_i b_i < 0$$

reiškia, jog teoremos sąlygos yra būtinos.

Sakykime, egzistuoja tokie neneigiami skaičiai $l_1, \dots, l_m$, kad

$$\sum_{i=1}^m l_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad (8.6)$$

$$\sum_{i=1}^m l_i b_i < 0.$$

Jei tarsime, kad sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

turi kokį nors sprendinį $(t_1, \dots, t_n)$, tai, sudėję nelygybes

$$l_i \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \leq l_i b_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

gausime nelygybę

$$\sum_{i=1}^m l_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} t_j \right) \leq \sum_{j=1}^m l_i b_j < 0,$$

kuri prieštarauja (8.6) lygybei. Taigi prielaida, kad sistema turi sprendinį, yra neteisinga. Vadinas, teoremos sąlygos yra ir pakankamos.

126 teoremą gana lengva pritaikyti praktikoje. Pastebėsime, kad lygybė

$$\sum_{i=1}^m l_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$$

su visais $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ teisinga tada, kai $(l_1, \dots, l_m)$ yra tiesinių homogeninių lygčių sistemos

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} z_i = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

sprendinys. Jeigu ši sistema turi neneigiamą sprendinį $(l_1, \dots, l_m)$, kuris tenkina nelygybę

$$\sum_{i=1}^m l_i b_i < 0,$$

tai nelygybių sistema $(\mathcal{L})$ neturi sprendinio. Jeigu tokio sprendinio nėra, tai nelygybių sistema $(\mathcal{L})$ sprendinį turi.

Pavyzdžiai. 1. Nelygybių sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq -3, \\ -8x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &\leq 5, \\ 2x_1 + \frac{7}{2}x_2 - 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 &\leq -4 \end{aligned}$$

neturi sprendinio, nes, padauginę pirmąją nelygybę iš 2, antrąją – iš 1, trečiąją – iš 2 ir visas jas sudėję, kairėje pusėje gausime nulį, o dešinėje pusėje $2(-3) + 1 \cdot 5 + 2(-4) = -9$. Taigi teoremos sąlygos tenkinamos, kai $l_1 = 2$, $l_2 = 1$, $l_3 = 2$.

2. Nelygybių sistema

$$\begin{aligned} -3x_1 - 12x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 &\leq -8, \\ 11x_1 - 3x_2 + 11x_3 + 10x_4 &\leq 1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 3x_4 &\leq -7 \end{aligned}$$

turi sprendinį, nes matricos determinantas

$$\begin{vmatrix} -3 & -12 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -5 \\ 11 & -3 & 11 & 10 \\ 4 & -8 & 8 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ir atitinkama lygčių sistema

$$\begin{aligned} -3z_1 + 2z_2 + 11z_3 + 4z_4 &= 0, \\ -12z_1 + 2z_2 - 3z_3 - 8z_4 &= 0, \\ 3z_1 + 2z_2 + 11z_3 + 8z_4 &= 0, \\ 2z_1 - 5z_2 + 10z_3 + 3z_4 &= 0 \end{aligned}$$

turi tiksliai nulinį sprendinį.

Uždaviniai

Nustatykite, ar šios nelygybių sistemos turi sprendinių:

- $-6x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2$,
 $8x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq -14$,
 $10x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 \leq -8$.
- $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 3$,
 $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 2$,
 $-2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 5$.

§93. Neneigiamų sprendinių egzistavimo sąlyga

Aiškinsimės, kokiomis sąlygomis nelygybių sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (\mathcal{N})$$

turi neneigiamą sprendinį.

Remsimės 126 teorema. Prie sistemos $(\mathcal{L})$ prijungę nelygybes $x_k \geq 0$ ($k=1, \dots, n$), gauname nelygybių sistemą

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (\mathcal{L}^*)$$

$$-x_k \leq 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

Aišku, kad sistema turi neneigiamą sprendinį tada ir tik tada, kai sistema $(\mathcal{L}^*)$ turi sprendinį. Šiai sistemai taikome 126 teoremą ir konstatuojame, kad sistema $(\mathcal{L})$ neturi neneigiamo sprendinio tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie neneigiami skaičiai $l_1, \dots, l_m, l_{m+1}, \dots, l_{m+n}$, su kuriais teisingi teiginiai

$$\sum_{i=1}^m l_i a_{ij} - l_{m+j} = 0 \quad (j=1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^m l_i b_i < 0.$$

Dabar nagrinėsime tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (S)$$

ir aiškinsimės, kada ši sistema turi neneigiamą sprendinį. Sakysime, $A = (a_{ij})$ yra sistemos matrica, β_j – matricos A j -asis ($j=1, \dots, n$) stulpelis, β – laisvųjų narių vektorius-stulpelis, $\text{rang } A = r$. Sistema (S) ekvivalenti vektorinei lygčiai

$$\beta = \sum_{j=1}^n x_j \beta_j. \quad (S_v)$$

Sistema (S) turi neneigiamą sprendinį tada ir tik tada, kai egzistuoja tokie neneigiami skaičiai $(l_1, \dots, l_n)$, kad

$$\beta = \sum_{j=1}^n l_j \beta_j.$$

Tuo atveju, kai $r = \text{rang } A = m = n$, sistema (S) turi vienintelį sprendinį; jį radę, sužinome, ar jis neneigiamas. Bendruoju atveju uždavinys komplikotas. Tačiau kai kuriais konkrečiais atvejais jis išsprendžiamas palyginti nesunkiai.

Pavyzdys. Nustatykite, ar tiesinių lygčių sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 &= 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= -11, \\ -3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 &= 13, \\ -3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned}$$

turi neneigiamą sprendinį.

Šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$(1+24t, -2-49t, 1-29t, t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Jis bus neneigiamas, kai

$$1+24t \geq 0,$$

$$-2-49t \geq 0,$$

$$1-29t \geq 0,$$

$$t \geq 0.$$

Ši sistema neturi sprendinio, nes $-2-49t < 0$, kai $t \geq 0$. Todėl duotoji lygčių sistema neturi neneigiamo sprendinio.

Bendruoju atveju, kai yra n lygčių su m kintamųjų, rang $A=r$ ir sistema suderinta, sprendinio komponentės yra $n-r$ kintamųjų $t_1, \dots, t_{n-r}$ tiesinės funkcijos $x_j = f_j(t_1, \dots, t_{n-r})$ ($j=1, \dots, r$). Todėl, norint išsiaiškinti, ar sistema (S) turi neneigiamų sprendinių, reikia nustatyti, ar nelygybių sistema

$$f_j(t_1, \dots, t_{n-r}) \geq 0 \quad (j=1, \dots, r), \quad t_k \geq 0 \quad (k=1, \dots, n-r)$$

turi sprendinį. Pastarojoje sistemoje turime n tiesinių nelygybių ir $n-r$ kintamųjų. Ar ji turi sprendinių, nustatysime remdamiesi 126 teorema. Tačiau tai irgi nėra paprasta.

I klausimą, ar tiesinių lygčių sistema (S) turi neneigiamų sprendinių, galime atsakyti nežinodami tos sistemos bendrojo sprendinio išraiškos. Išsiaiškinsime, kaip tai galima atlikti.

Imkime sistemos matricos A r tiesiškai nepriklausomų stulpelių $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ ir sudarykime sistemą

$$\sum_{k=1}^r a_{ij_k} x_{j_k} = b_i \quad (i=1, \dots, m). \quad (S_r)$$

Pastaroji gaunama iš sistemos (S), išbraukus kiekvienoje lygtyje $n-r$ narių su atitinkamais kintamaisiais x_j , $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$. Be to, sistemos (S_r) rangas lygus r , t. y. kintamųjų skaičiui.

127 teorema. Tiesinių lygčių sistema (S) turi neneigiamą sprendinį tada ir tik tada, kai bent viena iš sistemų (S_r) turi neneigiamą sprendinį.

Irodymas. Tarkime, kad su kokiais nors $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ sistema (S_r) turi neneigiamą sprendinį, t. y.

$$\sum_{k=1}^r l_{j_k} \beta_{j_k} = \beta, \quad l_{j_k} \geq 0 \quad (k=1, \dots, r).$$

Paėmę $l_j = 0$, kai $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$, gauname

$$\sum_{j=1}^n l_j \beta_j = \beta.$$

Taigi ($l_1, \dots, l_n$) yra sistemos (S) neneigiamas sprendinys. Vadinasi, sąlyga yra pakankama.

Tarkime, kad sistema (S) turi neneigiamą sprendinį. Iš visų neneigiamų sprendinių išrenkame tą, kuris turi mažiausiai teigiamų komponentių. Sa-
kykime, teigiamos komponentės yra

$$l_{j_k} > 0 \quad (k = 1, \dots, r).$$

Tada

$$\beta = \sum_{k=1}^r l_{j_k} \beta_{j_k}.$$

Jeigu vektoriai $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ yra tiesiškai priklausomi, tai egzistuoja tokie skaičiai $h_{j_1}, \dots, h_{j_r}$ (bent vienas iš jų nelygus nuliui), kad

$$0 = \sum_{k=1}^r h_{j_k} \beta_{j_k}.$$

Šią lygybę padauginę iš t ir atėmę iš pirmosios lygybės, gauname

$$\beta = \sum_{k=1}^r (l_{j_k} - t h_{j_k}) \beta_{j_k}.$$

Nelygybių sistema

$$l_{j_k} - t h_{j_k} \geq 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

turi sprendinį, nes tiems k , kuriems $h_{j_k} = 0$, nelygybę

$$l_{j_k} - t h_{j_k} \geq 0$$

tenkina visos t reikšmės, o tiems k , kuriems $h_{j_k} \neq 0$, nelygybę

$$l_{j_k} - t h_{j_k} \geq 0$$

tenkina t reikšmės, ne didesnės už $l_{j_k} h_{j_k}^{-1}$, kai $h_{j_k} > 0$, ir ne mažesnės už $l_{j_k} h_{j_k}^{-1}$, kai $h_{j_k}^{-1} < 0$. Todėl visas nelygybes tenkina t reikšmės iš intervalo

$$[\max_{h_{j_k} < 0} l_{j_k} h_{j_k}^{-1}, \min_{h_{j_k} > 0} l_{j_k} h_{j_k}^{-1}].$$

Paėmę tokį k_0 , kad

$$\min_{h_{j_k} > 0} l_{j_k} h_{j_k}^{-1} = l_{j_{k_0}} h_{j_{k_0}}^{-1} = t_0,$$

gaušime

$$l_{j_k} - t_0 h_{j_k} \geq 0, \quad k \neq k_0,$$

$$l_{j_{k_0}} - t_0 h_{j_{k_0}} = 0.$$

ir lygybę

$$\beta = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^r (l_k - t_0 h_k) \beta_{j_k}.$$

Šioje išraiškoje yra tik $(r-1)$ vektorius, ir visi koeficientai yra neneigiami. Vadinasi, sprendinys

$$(l'_1, \dots, l'_n), \quad l'_{j_k} = l_{j_k} - t_0 h_{j_k} \geq 0, \quad k \neq k_0, \\ l'_{j_{k_0}} = 0, \quad l'_j = 0, \quad j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$$

turi ne daugiau kaip $(r-1)$ teigiamą komponentę. Taigi gavome prieštaravimą sprendinio su mažiausiu teigiamų komponentių skaičiumi parinkimui. Todėl prielaida, kad vektoriai

$$\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$$

tiesiškai priklausomi, yra neteisinga. Teisingas tvirtinimas: vektoriai $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ tiesiškai nepriklausomi.

Tada lygybė

$$\beta = \sum_{k=1}^r l_{j_k} \beta_{j_k}$$

reiškia, kad $(l_{j_1}, \dots, l_{j_r})$ yra neneigiamas sistemos

$$\beta = \sum_{k=1}^r \beta_{j_k} x_{j_k},$$

kuri yra (S_r) tipo sistema, sprendinys. Taigi sąlyga būtina.

Reikia pažymėti, kad praktiniam naudojimui šios sąlygos nėra labai patogios, bet kai kuriais konkrečiais atvejais, jomis remiantis, atsakymą galima gauti labai paprastai.

Pavyzdys. Nustatykime, ar tiesinių lygčių sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 - 8x_5 &= -6, \\ -3x_1 + 9x_2 + 7x_3 - 11x_4 + 13x_5 &= 11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 5x_5 &= 9, \\ 3x_1 - 3x_2 &+ x_4 - 13x_5 = 3 \end{aligned}$$

turi neneigiamą sprendinį.

Lengva patikrinti, kad sistema suderinta ir jos rangas lygus 3. Išbraukę narius su x_4 ir x_5 , gauname sistemą

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 &= -6, \\ -3x_1 + 9x_2 + 7x_3 &= 11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9, \\ 3x_1 - 3x_3 &= 3, \end{aligned}$$

kurios sprendinys yra $(1, 0, 2)$. Kadangi šis sprendinys neneigiamas, tai iš teoremos išplaukia, kad duotoji sistema taip pat turi neneigiamų sprendinių.

Uždaviniai

3. Patikrinkite, ar turi neneigiamų sprendinių šios nelygybių sistemos:

- a) $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq 6,$
 $-4x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 1,$
 $2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 2;$
- b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10,$
 $-3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 2,$
 $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 0,$
 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 3.$

4. Patikrinkite, ar turi neneigiamų sprendinių šios tiesinių lygčių sistemos:

- a) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2,$
 $-3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 8,$
 $-3x_1 + 2x_2 + 23x_3 = 22;$
- b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$
 $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1,$
 $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5.$

§94. Tiesinio programavimo uždavinys

Su tiesinėmis nelygybėmis glaudžiai siejasi daugelis praktikos uždavinių, kurių sprendimo bendrasis metodas vadinamas tiesiniu programavimu. Pirmiausia pavyzdžiais išaiškinsime, kokie tai uždaviniai, po to suformuluosime bendrą abstraktų tiesinio programavimo uždavinį ir pateiksime jo sprendimo simplekso* metodą.

1. Kolūkis augina rugius, kviečius, miežius ir žirnius. Iš viso apsėjama N hektarų. Iš 1 ha rugių pasėlių gaunama pelno c_1 rb, iš 1 ha kviečių — c_2 rb, iš 1 ha miežių — c_3 rb, iš 1 ha žirnių — c_4 rb. Kad sėkmingai įvykdytų gamybos ir pardavimo valstybei planą, kolūkis privalo apsėti rugiais ne mažiau kaip N_1 hektarų ($N_1 < N$) ir miežiais ne mažiau kaip N_2 hektarų ($N_2 < N$). Kaip reikia planuoti pasėlių plotus, kad ūkis gautų didžiausias pajamas?

Pažymėkime x_1, x_2, x_3, x_4 rugių, kviečių, miežių ir žirnių pasėlių plotus (hektarais). Pagal sąlygą turi būti

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = N,$$

$$x_1 \geq N_1,$$

$$x_3 \geq N_2,$$

$$x_2 \geq 0,$$

$$x_4 \geq 0.$$

* Metodo pavadinimas kilęs nuo žodžio „simpleksas“ (lot. *simplex* — „paprastas“), reiškiančio paprasčiausią iškilų briaunainį erdvėje R^n . Kai $n=3$, tai — tetraedras, kai $n=2$ — trikampis.

Pelnas lygus $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$.

Reikia rasti tokias x_1, x_2, x_3, x_4 reikšmes, kurios tenkina užrašytas sąlygas ir su kuriomis reiškinys

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

igyja didžiausią reikšmę.

2. Iš trijų sandėlių į vieną vietovę reikia pervežti per mėnesį 325 t, o į kitą vietovę – 720 t kroviniių. Vienos tonos pervežimo iš i -ojo sandėlio ($i=1, 2, 3$) į j -ąją vietovę ($j=1, 2$) kaina pateikta lentelėje

Sandėlys Vietovė	1	2	3
	1	2	3
1	c_{11}	c_{21}	c_{31}
2	c_{12}	c_{22}	c_{32}

Be to, žinoma, kad iš pirmojo sandėlio per tą laiką galima paimti ne daugiau kaip 168 t, o iš trečiojo reikia paimti ne mažiau kaip 430 t.

Kaip organizuoti pervežimus, kad jų kaina būtų mažiausia?

Pažymėkime x_{ij} – skaičių tonų, pervežamų iš i -ojo sandėlio į j -ąją vietovę ($i=1, 2, 3; j=1, 2$). Tada pagal sąlygą

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 325,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 720,$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 168,$$

$$x_{31} + x_{32} \geq 430, \quad x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, 3; j=1, 2).$$

Visas pervežimas kainuoja

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{31}x_{31} + c_{32}x_{32}.$$

Reikia rasti tokias x_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2$) reikšmes, kurios tenkintų užrašytas sąlygas ir su kuriomis reiškinys f įgytų mažiausią reikšmę.

Abu šie uždaviniai yra analogiški. Ir vienu, ir kitu atveju reikia spręsti mišrią tiesinių lygčių ir nelygybių sistemą. Tikslai pirmuoju atveju reikia rasti sudarytosios funkcijos maksimumą, o antruoju – analogiškos funkcijos minimumą. Reikia pažymėti, kad abiem atvejais funkcijos maksimalios ir minimalios reikšmės ieškoma sudarytosios sistemos neneigiamų sprendinių

aibėje. Be to, abiem atvejais funkcijos yra tiesinės – jos yra $f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ pavidalo. Jeigu žinome funkcijos f minimumą n -matės erdvės R^n poaibyje G

$$f(x) = \min_{x \in G} f(x)$$

(čia $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$), tai $\max_{x \in G} (-f) = -\min_{x \in G} f = -f(x)$. Taigi, norint rasti funkcijos f maksimumą srityje G , užtenka rasti funkcijos $-f$ minimumą toje srityje, nes

$$\max_{x \in G} f = -\min_{x \in G} (-f).$$

Todėl užtenka mokėti rasti tik funkcijos minimumą.
Nelygybę

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$$

galime pakeisti jai ekvivalenčia nelygybe

$$\sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i,$$

kurią gauname, abi nelygybės puses padauginę iš -1 .

Be to, tiesinę lygtį

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$$

visada galime pakeisti jai ekvivalenčia nelygybių sistema

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b,$$

arba sistema

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b,$$

$$\sum_{j=1}^n (-a_j x_j) \leq -b.$$

Iš čia aišku, kad mišrią tiesinių lygčių ir tiesinių nelygybių sistemą galima pakeisti tiesinių nelygybių sistema. Suformuluosime tiesinio programavimo uždavinį.

Tarkime, kad $f(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \langle \gamma, x \rangle$ yra tiesinė realių kintamųjų $x_1, \dots, x_n$ funkcija. Reikia rasti tokias kintamųjų reikšmes, kurios tenkintų nelygybes

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (\mathcal{N})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (T)$$

ir su kuriomis funkcija $f(x)$ įgytų mažiausią reikšmę.

Tokia uždavinio formuluoė vadinama *standartine*.

Tiesinių nelygybių sistemą $(\mathcal{N})$ su papildomomis sąlygomis (T) galime pakeisti tiesinių lygčių sistema, įvedę papildomus (fiktyvius) kintamuosius $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, atitinkančius papildomas sąlygas:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad (S)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n+m). \quad (T_1)$$

128 teorema. Jeigu $(l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_{n+m})$ yra sistemos (S) sprendinys, tenkinantis sąlygas (T_1) , tai $(l_1, \dots, l_n)$ yra tiesinių nelygybių sistemos $(\mathcal{N})$ sprendinys, tenkinantis sąlygas (T) .

Jei $(l_1, \dots, l_n)$ yra sistemos $(\mathcal{N})$ sprendinys, tenkinantis sąlygas (T) , tai $(l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_{n+m})$,

$$l_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j \quad (i = 1, \dots, m),$$

yra tiesinių lygčių sistemos (S) sprendinys, tenkinantis sąlygas (T_1) .

Įrodymas. Tarkime, kad

$$l_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n+m), \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} l_k + l_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Tada

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} l_k \leq b_i.$$

Vadinasi, $(l_1, \dots, l_n)$ yra sistemos $(\mathcal{N})$ sprendinys, tenkinantis sąlygas (T) .

Kadangi

$$l_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j \leq b_i,$$

tai

$$l_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Be to,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} l_j + l_{n+i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j + b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} l_j = b_i.$$

Vadinasi, $(l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_{n+m})$ yra sistemos (S) sprendinys, tenkinantis sąlygas (T_1) .

Nagrinėkime funkciją

$$f_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j + 0 \cdot \sum_{i=1}^m x_{n+i}.$$

Sakykime, $(l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_{n+m})$ – jos minimumo taškas tiesinių lygčių sistemos (S) neneigiamų sprendinių aibėje. Tada $(l_1, \dots, l_n)$ yra funkcijos

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

minimumo taškas nelygybių sistemos $(\mathcal{L})$ neneigiamų sprendinių aibėje.

Kad tuo įsitikintume, tarkime priešingai. Tegul yra toks neneigiamas sistemos $(\mathcal{L})$ sprendinys $(t_1, \dots, t_n)$, su kuriuo

$$\sum_{j=1}^n c_j t_j < \sum_{j=1}^n c_j l_j.$$

Tada, paėmę $(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m})$, su

$$t_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

gausime

$$f_1(t_1, \dots, t_{n+m}) = \sum_{j=1}^n c_j t_j < \sum_{j=1}^n c_j l_j.$$

Pastaroji nelygybė reiškia, kad $(l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_{n+m})$ nėra funkcijos f_1 minimumo taškas. Gautasis prieštaravimas rodo, jog suformuluotasis teiginys teisingas.

Todėl vietoj funkcijos f minimumo tiesinių nelygybių sistemos $(\mathcal{L})$ neneigiamų sprendinių aibėje galime ieškoti funkcijos f_1 minimumo tiesinių lygčių sistemos (S) neneigiamų sprendinių aibėje.

Remdamiesi šia teorema, galime tiesinių nelygybių sistemą pakeisti jai ekvivalenčia tiesinių lygčių sistema. Todėl tiesinio programavimo uždavinį galime suformuluoti kiek kitaip.

Tarkime, kad A yra $[m \times n]$ eilės matrica, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\beta^T = (b_1, \dots, b_m)$. Pažymėkime S_T sistemos

$$Ax^T = \beta$$

neneigiamų sprendinių aibę, t. y. $S_T = \{x | x \in \mathbb{R}^n, Ax^T = \beta, x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n)\}$. Šioje aibėje reikia rasti tokį tašką $\underline{x}$, kuriame funkcija

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle \gamma, x \rangle \quad (\gamma = (c_1, \dots, c_n))$$

įgyja minimalią reikšmę, t. y. $\min_{x \in S_T} f(x) = f(\underline{x})$.

Tokia tiesinio programavimo uždavinio formuluoatė vadinama *kanonine*. Iš karto kyla klausimas, ar šis uždavinys turi sprendinį? Jeigu turi, tai kaip jį rasti?

Be abejo, uždavinys neturi sprendinio tada, kai aibė S_T yra tuščia.

93 paragrafe išmokome nustatyti, ar tiesinių lygčių sistema (S) turi neneigiamų sprendinių. Todėl, prieš pradėdami spresti uždavinį, visada galime patikrinti, ar aibė S_T , kurioje ieškosime funkcijos $f(x)$ minimumo (arba maksimumo), yra netuščia.

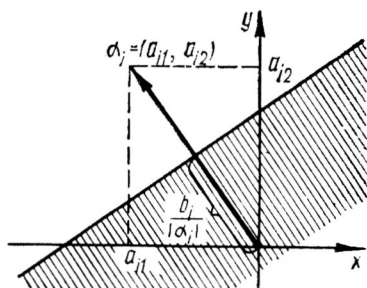
§95. Tiesinio programavimo uždavinio sprendimo paprasčiausi atvejai

Pirmiausia išnagrinėkime tiesinio programavimo uždavinį, pateiktą standartine forma, kai kintamųjų skaičius lygus dviem.

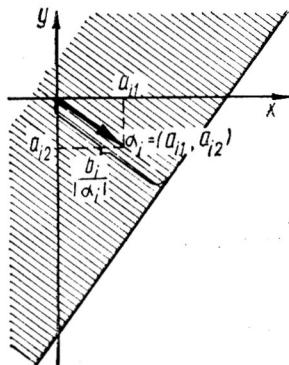
Duota funkcija $f=c_1x+c_2y$ ir nelygybių sistema

$$a_{i1}x + a_{i2}y \leq b_i \quad (i=1, \dots, m), \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

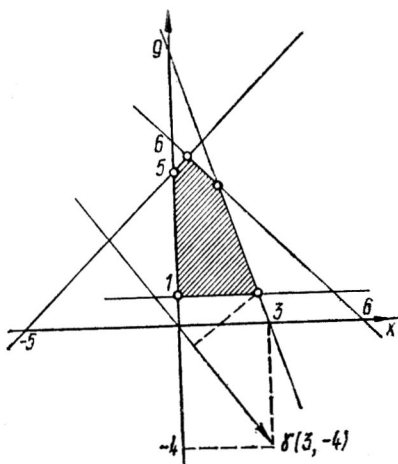
Reikia rasti tokį šios nelygybių sistemos sprendinį (l_1, l_2) , kad būtų $c_1l_1 + c_2l_2 = \min f$.



19 pav.



20 pav.



21 pav.

Kadangi $a_{i1}x + a_{i2}y = \langle (a_{i1}, a_{i2}), (x, y) \rangle$ yra skaliarinė sandauga, tai, pažymėję $\alpha = (x, y)$ ir $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2})$, gauname nelygybes

$$\langle \alpha_i, \alpha \rangle \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Geometriškai tokios nelygybės reiškia pusplokštumes (žr. 19 ir 20 pav.). Taigi duotosios nelygybių sistemos sprendinių aibė yra pusplokštumių $\langle \alpha_i, \alpha \rangle \leq b_i$ ($i = 1, \dots, m$) sankirta su plokštumos x, y pirmuoju kvadrantu, t. y. daugiakampis, arba tuščioji aibė, arba daugiakampis su be galo nutolusia viena ar keliomis kraštinėmis.

Kadangi $c_1x + c_2y = \langle (c_1, c_2), (x, y) \rangle$ irgi yra skaliarinė sandauga, tai, norint rasti tos funkcijos minimumą, užtenka rasti (tašką) vektorių (x, y) , kurio projekcija kryptyje $\gamma = (c_1, c_2)$ yra mažiausia (įskaitant ženklą). Toks taškas gali būti arba begalybė (tada $\min (c_1x + c_2y) = -\infty$), arba tiesių $\langle \alpha_i, \alpha \rangle = b_i$ ($i = 1, \dots, m$) kirtimosi taškas, o kartais atkarpa.

Pavyzdžiai. 1. Raskime funkcijos $3x - 4y$ minimumą srityje

$$\begin{aligned} x + y &\leq 6, \\ 3x + y &\leq 9, \\ y &\geq 1, \\ -x + y &\leq 5, \\ x &\geq 0, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Nelygybių sistemos sprendinių aibė yra penkiakampis, kurio viršūnių koordinatės (žr. 21 pav.)

$$(0, 5), (0, 1), \left(\frac{8}{3}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

ir

$$\min (3x - 4y) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{11}{2} = -20,5.$$

Paveiksle matyti, kad šios viršūnės projekcija kryptyje $(3, -4)$ yra ilgiausia neigiama projekcija.

Funkcijos $3x - 4y$ maksimumą randame analogiškai, t. y.

$$\max (3x - 4y) = 3 \cdot \frac{8}{3} - 4 = 4.$$

2. Raskime funkcijos $-5x - 5y$ minimumą toje pačioje srityje. Kadangi tiesė $x + y = 6$ statmena kryptčiai $(-5, -5)$, o atkarpa, jungianti taškus $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$, yra toje tiesėje, tai ši atkarpa taip pat statmena kryptčiai $(-5, 5)$. Visi tos atkarpos taškai

$$t \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) + (1-t) \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + t, \frac{11}{2} - t\right) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

turės ilgiausias neigiamas projekcijas kryptyje $(-5, 5)$.

Todėl

$$\min (-5x - 5y) = -\frac{5}{2} - 5t - \frac{55}{2} + 5t = -30.$$

Taigi, spęsdami tiesinio programavimo uždavinį, plokštumoje pirmiausia nubraižome daugiakampį (sritį), kurio taškai yra duotosios nelygybių sistemos sprendiniai. Po to randame šio daugiakampio viršūnių koordinatas ir tarp jų randame tą viršūnę, kurioje funkcija $c_1x + c_2y$ įgyja mažiausią reikšmę. Dažnai tą viršūnę galime rasti grafiškai.

Simplekso metodas, kaip vėliau matysime, yra šio uždavinio sprendimo plokštumoje apibendrinimas.

Kanoninį tiesinio programavimo uždavinį tam tikrais atvejais taip pat galime lengvai išspręsti.

Reikia rasti funkcijos $f(x) = \langle \gamma, x \rangle$ minimumo tašką ir minimumą aibėje

$$S_T = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Ax^T = \beta, x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)\}.$$

1. Kai rang $A = n$, aibė S_T turi vienintelį elementą arba yra tuščia. Užtenka rasti sistemos $Ax^T = \beta$ vienintelį sprendinį ir nustatyti, ar jis neturi neigiamų komponentų.

2. Kai rang $A = n - 1$, sistemos $Ax^T = \beta$ bendrasis sprendinys yra $x_i = g_i t + h_i$, $i \neq i_0$, $x_{i_0} = t$ ($t \in \mathbf{R}$). Įrašę šias išraiškas į $f(x)$, gauname $f = at + b$. Tuo atveju duotąjį uždavinį galima pakeisti šitokiu: *reikia rasti funkcijos $at + b$ minimumo tašką aibėje $\{t \mid g_i t + h_i \geq 0 \ (i \neq i_0), t \geq 0\}$* . Kadangi šios nelygybės turi vieną kintamąjį, tai jos sprendžiamos kaip įprasta spręsti pirmojo laipsnio nelygybių sistemą su vienu kintamuoju. Radus tos nelygybių sistemos sprendinių aibę, nustatomas funkcijos $at + b$ minimumas ir minimumo taškas. Po to rastoji t reikšmė įrašoma į išraiškas $x_i = g_i t + h_i$ ($i \neq i_0$) ir gaunamas ieškomasis minimumo taškas.

3. Kai rang $A = n - 2$, sistemos $Ax^T = \beta$ sprendinys yra

$$x_i = g_i t_1 + h_i t_2 + l_i \quad (i \neq i_0, i \neq k_0),$$

$$x_{i_0} = t_1, \quad x_{k_0} = t_2 \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R}).$$

Sprendžiamasis uždavinys šiuo atveju suvedamas į tokį: *reikia rasti funkcijos $at_1 + bt_2 + c$ minimumą aibėje $\{(t_1, t_2) \mid g_i t_1 + h_i t_2 + l_i \geq 0 \ (i \neq i_0, i \neq k_0), t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$* .

Tai standartinis tiesinio programavimo uždavinys su dviem kintamaisiais, kurį jau mokame spręsti.

4. Lengva suvokti, kad tuo atveju, kai rang $A = r$, kanoninis tiesinio programavimo uždavinys, naudojantis sistemos $Ax^T = \beta$ bendrojo sprendinio išraiška, suvedamas į standartinį tiesinio programavimo uždavinį su $n - r$ kintamųjų.

Uždaviniai

5. Išspręskite tiesinio programavimo uždavinius plokštumoje, naudodamiesi brėžiniu. Raskite funkcijos $f = 3x_1 - 4x_2$ maksimumą nelygybių sistemos

$$x_1 - x_2 \geq -12,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18,$$

$$2x_1 + 18x_2 \leq 36,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

sprendinių aibėje.

6. Raskite funkcijos $f = 16x_1 + 23x_2$ minimumą nelygybių sistemos

$$2x_1 - 3x_2 \leq 23,$$

$$-x_1 + 4x_2 \geq 20,$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 36,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

sprendinių aibėje.

7. Raskite funkcijos $f = -5x_1 + 7x_2$ maksimumą ir minimumą nelygybių sistemos

$$2x_1 + 3x_2 \leq 17,$$

$$x_1 + x_2 \leq 11,$$

$$x_1 \leq 7,$$

$$x_2 \leq 5,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

sprendinių aibėje.

8. Raskite funkcijos $f = 20x_1 + 33x_2$ minimumą nelygybių sistemos

$$7x_1 + 11x_2 \geq 21,$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 18,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

sprendinių aibėje.

9. Raskite funkcijos $f = 4x_1 - 9x_2$ maksimumą ir minimumą nelygybių sistemos

$$x_1 - x_2 \leq 16,$$

$$x_1 + x_2 \leq 14,$$

$$-x_1 + x_2 \leq 15,$$

$$x_1 + 7x_2 \leq 35,$$

$$8x_1 + 2x_2 \leq 23, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

sprendinių aibėje.

Išspręskite tiesinio programavimo uždavinius, suvesdami juos į programavimo uždavinius plokštumoje arba tiesėje.

10. Raskite funkcijos $f = 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 - 8x_4$ maksimumą ir minimumą bei taškus, kuriuose jie pasiekiami, sistemos

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 11x_4 = 13,$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 17,$$

$$-5x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 3,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

sprendinių aibėje.

11. Raskite funkcijos $f = -6x_1 + 3x_2 + 18x_3 - 5x_4 + 6x_5$ maksimumą ir minimumą bei taškus, kuriuose jie pasiekiami, sistemos

$$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0,$$

$$-2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4 - 8x_5 = 5,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -3,$$

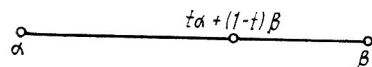
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5)$$

sprendinių aibėje.

§96. Iškilosios aibės erdvėje $\mathbf{R}^n$. Tiesinės funkcijos ekstremumas iškilojoje uždaroje aibėje

Kad galėtume geriau suprasti tiesinio programavimo uždavinio sprendimą, įvesime keletą naujų sąvokų. Kai $n=2$, tos sąvokos gana paprastai interpretuojamos geometriškai. Todėl pirmiausia jas ir aptarsime tuo atveju,

kai $n=2$, po to apibendrinsime bet kokiame sveikajam $n \geq 2$.



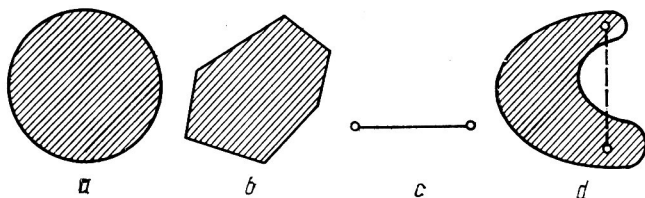
22 pav.

$0 \leq t \leq 1$, $\alpha = (x_1, y_1)$, $\beta = (x_2, y_2)$, reiškia atkarpą, jungiančią taškus, kurių koordinatės (x_1, y_1) , (x_2, y_2) (žr. 22 pav.).

Be to, kai $t=1$, gausime tašką (x_1, y_1) , o kai $t=0$, gausime tašką (x_2, y_2) .

Kai $0 < t < 1$, gausime tašką, esantį atkarpoje tarp taškų (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) .

Prisiminę iškilojo daugiakampio apibrėžimą, kiekvieną plokštumos taškų poaibį vadinsime iškila aibe, jeigu, pasirinkus bet kuriuos du tos aibės taškus, visi juos jungiančios atkarpos taškai priklausys tai aibei. Štai, pavyzdžiui, 23 pav., a , b ir c , atvaizduotos aibės yra iškilos, o 23 pav., d , atvaizduota aibė nėra iškila.



23 pav.

Iškilosios aibės plokštumoje turi šitokią savybę: *ne visi jų taškai yra vidiniai taškai atkarpos, jungiančios kuriuos nors du tos aibės taškus*. Tokie yra 23 pav., c , atvaizduotos atkarpos galai, 23 pav., b , – daugiakampio viršūnės, 23 pav., a , – apskritimo taškai. Juos visus vadiname *ekstreminiais* taškais.

Pereikime prie n -matės erdvės $\mathbf{R}^n$. Sakykime, joje skaliarinė daugyba apibrėžta natūraliu būdu.

Erdvės $\mathbf{R}^n$ poaibis G vadinamas iškila aibe, jei, pasirinkus bet kuriuos tos aibės elementus α ir β ir realųjį skaičių $0 \leq t \leq 1$, elementas $t\alpha + (1-t)\beta$ taip pat bus aibės G elementas.

Jeigu analogiškai plokštumai erdvės $\mathbf{R}^n$ elementus vadinsime taškais, o elementų $\{t\alpha + (1-t)\beta \mid 0 \leq t \leq 1\}$ aibę – atkarpą, jungiančią taškus α ir β , tai iškila aibę galėsime apibrėžti visiškai panašiai kaip ir plokštumoje.

Lengva suvokti, kad, kai $n=3$, rutulys ir kiekvienas iškilasis briaunainis yra iškilosios aibės.

129 teorema. Tiesinių lygčių sistemos neneigiamų sprendinių aibė yra iškila.

Irodymas. Imkime du neneigiamus sistemos $Ax^T = \beta$ sprendinius

$$\alpha_1 = (l'_1, \dots, l'_n), \quad \alpha_2 = (l''_1, \dots, l''_n).$$

Jie tenkina lygybes

$$A\alpha_1^T = \beta, \quad A\alpha_2^T = \beta.$$

Pasirinkus bet koki $t (0 \leq t \leq 1)$, vektoriaus $t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$ koordinatės $tl'_i + (1-t)l''_i$ yra neneigiamos. Be to,

$$A(t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2)^T = tA\alpha_1^T + (1-t)A\alpha_2^T = t\beta + (1-t)\beta = \beta.$$

Taigi $t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$, kai $0 \leq t \leq 1$, taip pat yra sistemos neneigiamas sprendinys.

n -matėje Euklido erdvėje $\mathbf{R}^n$ elemento $x = (x_1, \dots, x_n)$ ilgis $|x|$ lygus $\sqrt{\langle x, x \rangle}$.

n -matės Euklido erdvės iškiląją aibę G vadiname aprėžta, jei visi tos aibės elementai yra aprėžto ilgio, t. y. jei $|x| \leq M$ visiems $x \in G$.

Toliau įvedamos sąvokos daug kuo primena matematinės analizės sąvokas.

Aibės G taško α_0 ε -aplinka vadiname aibę taškų α , kuriems $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, t. y. $\{\alpha \mid |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon\}$. Tašką $\alpha_0 \in G$ vadiname aibės G kraštiniu tašku, jeigu kiekviena taško α_0 ε -aplinka turi bendrų taškų su aibe G , bet nėra tos aibės poaibis. Aibės G kraštinių taškų aibę vadiname aibės G siena. Jeigu aibei G priklauso visi kraštiniai taškai, tai toji aibė vadinama uždara.

130 teorema. Tiesinių lygčių sistemos $Ax^T = \beta$ neneigiamų sprendinių aibė S_T yra uždara.

Irodymas. Tarkime, kad $\alpha_0 = (t_1, \dots, t_n)$ yra aibės S_T kraštinis taškas. Kadangi kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja $\alpha = (l_1, \dots, l_n) \in S_T$ ir $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, tai

$$|A\alpha_0^T - A\alpha^T|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t_j - l_j) \right)^2.$$

Pažymėję $\max_{ij} |a_{ij}| = a$ ir pasinaudoję kėlimo kvadratu formule, gauname:

$$|A\alpha_0^T - A\alpha^T|^2 < (ma^2(1+n^2))\varepsilon^2.$$

Kadangi ši nelygybė teisinga su kiekvienu $\varepsilon > 0$, tai iš jos išplaukia lygybė $A\alpha_0^T = \beta$. Taigi kiekvienas aibės S_T kraštinis taškas α_0 priklauso S_T . Aibė S_T yra uždara.

Iškilosios aibės G elementas vadinamas tos aibės ekstreminiu tašku, jeigu jo negalima užrašyti išraiška $t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2$, kurioje $0 < t < 1$ ir $\alpha_1 \neq \alpha_2$ - aibės G elementai.

Nesunku suvokti, kad aibės ekstreminis taškas būtinai priklauso aibės sienai: tarė, kad jis nėra kraštinis taškas, galėsime jį išreikšti suma $\alpha t + (1 - t)\beta$, kur $0 < t < 1$ ir $\alpha \neq \beta$ – aibės elementai. Tai visiškai sutampa su daugiakampio viršūnių bei briaunainio viršūnių įvaizdžiais.

Tolesniems samprotavimams pagrįsti reikia lemos, kurią pateikiame be įrodymo.

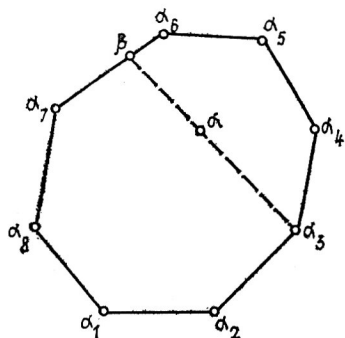
Lema. Jeigu uždara ir aprėžta iškiloji aibė turi baigtinį skaičių ekstreminių taškų, tai kiekvieną jos elementą α galima išreikšti suma

$$\alpha = \sum_{i=1}^N t_i \alpha_i,$$

kurioje $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – ekstreminiai taškai, $t_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, N$) ir

$$t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1.$$

Kadangi bendruoju atveju, kai erdvė n -matė, lemos įrodymo čia nepateikiame, tai paaiškinsime jos prasmę, kai erdvė dvimatė ir iškiloji aibė yra daugiakampis. Lemą įrodysime trimatėje erdvėje iškilajam briaunainiui.



24 pav.

Jeigu G yra daugiakampis plokštumoje ir α – bet kuris to daugiakampio vidinis taškas (Žr. 24 pav.), tai, sujungę šį tašką su viena daugiakampio viršūne ir atkarpą pratęsę iki susikirtimo su daugiakampio kraštine, gausime tašką β ir išraišką $\alpha = t_3 \alpha_3 + (1 - t_3)\beta$. Tačiau $\beta = t \alpha_6 + (1 - t)\alpha_7$, $t \in [0, 1]$. Todėl $\alpha = t_3 \alpha_3 + t(1 - t_3)\alpha_6 + (1 - t)(1 - t_3)\alpha_7$. Pažymėję $t(1 - t_3) = t_6$, $(1 - t)(1 - t_3) = t_7$, $t_1 = t_2 = t_4 = t_5 = t_8 = 0$, gauname $t_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, 8$), $t_1 + \dots + t_8 = t_3 + t(1 - t_3) + (1 - t)(1 - t_3) = 1$ ir išraišką

$$\alpha = t_1 \alpha_1 + \dots + t_8 \alpha_8.$$

Jeigu α yra kurios nors daugiakampio kraštinės, jungiančios viršūnes α_i, α_{i+1} , taškas, tai $\alpha = t_i \alpha_i + (1 - t_i)\alpha_{i+1}$. Likusius (viršūnių) ekstreminius taškus galime pridėti padauginę iš nulio.

Jeigu G yra iškilusis briaunainis trimatėje erdvėje, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ – to briaunainio viršūnės, o α – jo taškas, tai pastarąjį sujungę su viena viršūne α_i ir pratęsę atkarpą iki susikirtimo su briaunainio siena, gausime briaunainio sienoje tašką β ir išraišką

$$\alpha = t_i \alpha_i + (1 - t_i) \beta.$$

Kadangi iškilojo briaunainio siena yra iškilusis daugiakampis, kurio viršūnės yra ir briaunainio viršūnės, tai lema bus įrodyta, įrodžius tą patį teiginį apie iškilųjį daugiakampį.

131 teorema. Apręžtoje uždaroje iškilojoje aibėje, turinčioje baigtinį skaičių ekstreminių taškų, kiekviena tiesinė funkcija $f(x) = \langle \gamma, x \rangle$ įgyja minimalią reikšmę bent viename ekstreminiame taške.

Įrodymas. Tarkime, kad $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ yra aibės ekstreminiai taškai ir $\langle \gamma, \alpha_m \rangle = \min_{1 \leq j \leq N} \langle \gamma, \alpha_j \rangle$. Jeigu $x = \underline{x}$ yra funkcijos $f(x) = \langle \gamma, x \rangle$ minimumo taškas, t. y. jei $\inf_{x \in G} f(x) = f(\underline{x}) = \langle \gamma, \underline{x} \rangle$, tai, pasinaudoję išraiška

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^N t_i \alpha_i, \quad t_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad t_1 + \dots + t_N = 1,$$

gauname

$$\langle \gamma, \underline{x} \rangle = \sum_{i=1}^N t_i \langle \gamma, \alpha_i \rangle \geq \min_{1 \leq j \leq N} \langle \gamma, \alpha_j \rangle \sum_{i=1}^N t_i = \langle \gamma, \alpha_m \rangle.$$

Kaip matome, jeigu tik $\underline{x} \neq \alpha_m$, tai $f(\underline{x}) > f(\alpha_m)$, o tai prieštarauja $\underline{x}$, kaip minimumo taško, apibrėžimui.

Akivaizdu, kad funkcija $f(x) = \langle \gamma, x \rangle$ įgyja maksimalią reikšmę irgi bent viename iš ekstreminių taškų. Šio fakto įrodymui pakanka prisiminti, kad $\sup_{x \in G} f(x) = -\inf_{x \in G} (-f(x))$.

Taip pat nesunkiai įsitikiname, kad teisinga ši taisyklė: jeigu funkcija $f(x)$ įgyja minimalią reikšmę dviejuose taškuose, tai tokia pat reikšmė yra ir tuos taškus jungiančios atkarpos kiekviename taške. Taip yra štai kodėl: jeigu $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)})$, tai su kiekvienu $x = tx^{(1)} + (1-t)x^{(2)}$ ($0 \leq t \leq 1$) galioja lygybės

$$f(x) = tf(x^{(1)}) + (1-t)f(x^{(2)}) = f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}).$$

Jeigu iškiloji aibė nėra apręžta, tai tiesinės funkcijos minimumas toje aibėje gali būti lygus $-\infty$, o jos maksimumas $+\infty$.

§97. Simplekso metodo teorija

Sakykime, reikia rasti tiesinės funkcijos

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle \gamma, x \rangle$$

minimumo tašką tiesinių lygčių sistemos

$$Ax^T = \beta$$

neneigiamų sprendinių aibėje S_T . Matrica A yra $[m \times n]$ eilės matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Galime laikyti, kad rang $A=m$, ir mūsų samprotavimai dėl to nebus mažiau bendri: jeigu duotajai sistemai $Ax^T=\beta$ ši lygybė negalioja, tai galėtume ją pakeisti ekvivalenčia sistema, kurios rangas lygus lygčių skaičiui.

Pasinaudoję V skyriuje įvestais matricos stulpelių žymėjimais,

$$\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=1, \dots, n),$$

nagrinėjamą sistemą užrašome vektoriaus forma:

$$\sum_{j=1}^n x_j \beta_j = \beta.$$

Kai $(l_1, \dots, l_n)$ yra sistemos sprendinys ir $l_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$), tai

$$\beta = \sum_{j=1}^n l_j \beta_j.$$

Ši lygybė reiškia, kad vektorius β yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ tiesinė kombinacija su neneigiamais koeficientais. Simplekso metodu galima spręsti tik tuos tiesinio programavimo uždavinius, kurie tenkina čia formuluojamą svarbią sąlygą, vadinamą neišsigimimo sąlyga.

Neišsigimimo sąlyga. Išraiškoje $\beta = \sum_{j=1}^n l_j \beta_j$, kurioje $l_j \geq 0$ ($j=1, \dots, n$), tarp $l_1, \dots, l_n$ yra ne mažiau kaip m teigiamų koeficientų.

Išsiaiškinsime šios sąlygos prasmę. Kadangi rang $A=m$, tai tarp vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ yra m tiesiškai nepriklausomų ir bet kurie $m+1$ vektoriai yra tiesiškai priklausomi. Todėl, išrinkę tiesiškai nepriklausomus vektorius (matricos stulpelius) $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$, jais galėsime išreikšti visus vektorius $\beta_1, \dots, \beta_n$ ir vektorių β .

Taigi išrinktieji vektoriai sudaro vektorių sistemos $\beta_1, \dots, \beta_n$ bazę, ir

$$\beta_j = \sum_{k=1}^m q_{i_k j} \beta_{i_k} \quad (j=1, \dots, n), \quad (8.7)$$

$$\beta = \sum_{k=1}^m l_{i_k} \beta_{i_k}. \quad (8.8)$$

Be to, reikia pažymėti, kad tuo atveju, kai $j \in \{i_1, \dots, i_m\}$, galioja lygybės

$$q_{i_k j} = \begin{cases} 1, & j=i_k, \\ 0, & j \neq i_k \end{cases} \quad (k=1, \dots, m).$$

Vektoriaus β koordinatės yra neneigiamos. Neišsigimimo sąlyga reiškia, kad visos koordinatės $l_{i_1}, \dots, l_{i_m}$ yra teigiamos kiekvienoje bazėje $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$. (8.7) lygybės yra visų matricos A stulpelių išraiškos tiesiškai nepriklausomais stulpeliais, o (8.8) lygybė – laisvojo nario išraiška tiesiškai nepriklausomais matricos A stulpeliais. Vektorius-eilutė, kurio i_k -oji komponentė yra $l_{i_k} > 0$ ($k=1, \dots, m$), o kitas vietas užima nuliai, yra sistemos

$$Ax^T = \beta$$

neneigiamas sprendinys su m teigiamų komponenčių. Vadinasi, pastarąją sistemą galima užrašyti šitaip:

$$x_{i_k} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} a'_{i_k j} x_j = l_{i_k} \quad (k=1, \dots, m). \quad (8.9)$$

Jos sprendinys yra

$$x_{i_k} = l_{i_k} \quad (k=1, \dots, m), \quad x_j = 0 \quad (j \notin \{i_1, \dots, i_m\}).$$

Neneigiamą sistemos sprendinį su m teigiamų komponenčių, atitinkančių tiesiškai nepriklausomus matricos A stulpelius, vadiname baziniu sprendiniu.

Bazinį sprendinį lengvai rasime sistemą pakeitę taip, kad ji būtų (8.9) pavidalo ir laisvieji nariai būtų teigiami.

Pavyzdys. Rasime tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 12, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 8, \\ -x_1 + x_3 - 10x_4 - x_5 + 3x_6 + x_7 &= 5 \end{aligned}$$

bazinį sprendinį. Sistemos išplėstojoje matricioje

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -10 & -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

trečią eilutę atimame iš antros eilutės; gautoje matricioje antrą eilutę atimame iš pirmos, trečios ir ketvirtos eilučių; gautoje matricioje pirmą eilutę atimame iš antros ir pridėdami prie trečios ir ketvirtos ir pagaliau šitaip gautoje matricioje trečią eilutę pridėdami prie ketvirtos. Tuo būdu gaujame ekvivalenčios sistemos išplėstąją matricą

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 10 & 0 & 0 & -5 & 0 & 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

ir sistema

$$\begin{aligned}x_2 + 3x_1 + 2x_4 + x_6 &= 3, \\x_3 - 4x_1 - 2x_4 - x_6 &= 1, \\x_5 + 7x_1 + 3x_4 + 2x_6 &= 7, \\x_7 + 10x_1 - 5x_4 + 6x_6 &= 11.\end{aligned}$$

Vienas šios sistemos sprendinys yra $x_2=3$, $x_3=1$, $x_5=7$, $x_7=11$, $x_1=x_4=x_6=0$. Taigi $(0, 3, 1, 0, 7, 0, 11)$ yra duotosios sistemos bazinis sprendinys, o antrasis, trečiasis, penktasis ir septyntasis stulpeliai sudaro matricos B bazę.

132 teorema. *Tiesinių lygčių sistemos $Ax^T = \beta$, kurios rang A lygus matricos A eilučių skaičiui ir kuri tenkina neišsigimimo sąlygą, neneigiamas sprendinys yra jos neneigiamų sprendinių aibės S_T ekstreminis taškas tada ir tik tada, kai jis yra bazinis.*

Įrodymas. Sakykime, kad $\lambda = (l_1, \dots, l_n)$, $l_k > 0$ ($k=1, \dots, m$) ir $l_j = 0$ ($j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$), yra bazinis sprendinys. Įrodysime, kad jis yra aibės S_T ekstreminis taškas.

Tarkime priešingai, kad egzistuoja toks t ($0 < t < 1$) ir du tokie neneigiami sprendiniai

$$\lambda^{(i)} = (l_1^{(i)}, \dots, l_n^{(i)}), \quad i = 1, 2, \quad \lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)},$$

jog

$$\lambda = t\lambda^{(1)} + (1-t)\lambda^{(2)}.$$

Kadangi

$$l_j = 0 \quad (j \notin \{i_1, \dots, i_m\}), \quad l_j^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, \dots, n), \quad 0 < t < 1,$$

tai iš lygybių $l_j = tl_j^{(1)} + (1-t)l_j^{(2)}$ išplaukia, kad $l_j^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2, j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$). Todėl turime lygybes

$$\beta = \sum_{k=1}^m l_k^{(1)} \beta_{i_k}, \quad \beta = \sum_{k=1}^m l_k^{(2)} \beta_{i_k},$$

iš kurių gauname

$$0 = \sum_{k=1}^m (l_k^{(1)} - l_k^{(2)}) \beta_{i_k}. \quad (8.10)$$

Kadangi iš nelygybės $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)}$ išplaukia nelygybė $l_k^{(1)} \neq l_k^{(2)}$ bent su vienu i_k , tai (8.10) lygybė reiškia, kad vektoriai $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$ yra tiesiškai priklausomi. Tačiau λ yra bazinis sprendinys, todėl vektoriai $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$, atitinkantieji teigiamas koordinatas, yra tiesiškai nepriklausomi. Taigi gavome prieštaravimą. Todėl prielaida, kad bazinis sprendinys nėra aibės S_T ekstreminis taškas, yra neteisinga (teisinga teoremos teiginio pirmoji dalis apie sąlygos pakankamumą).

Tarkime, kad $(l_1, \dots, l_n)$ yra neneigiamas sprendinys ir ekstreminis aibės S_T taškas. Įrodysime, kad jis yra ir bazinis sprendinys. Turime

$$l_k > 0 \quad (k = 1, \dots, r), \quad r \leq n, \quad l_j = 0 \quad (j \notin \{i_1, \dots, i_r\})$$

ir

$$\beta = \sum_{k=1}^r l_{i_k} \beta_{i_k}. \quad (8.11)$$

Įrodysime, kad vektoriai $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}$ tiesiškai nepriklausomi ir kad $r = m$.

Jeigu $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}$ – tiesiškai priklausomi, tai egzistuoja tokie skaičiai $h_{i_1}, \dots, h_{i_r}$ (tarp jų yra nelygių nuliui), kad

$$0 = \sum_{k=1}^r h_{i_k} \beta_{i_k}.$$

Bet tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ teisingos lygybės

$$0 = \sum_{k=1}^r (\pm \varepsilon) h_{i_k} \beta_{i_k}.$$

Iš šių ir (8.11) lygybių gauname išraiškas

$$\beta = \sum_{k=1}^r (l_{i_k} \pm \varepsilon h_{i_k}) \beta_{i_k},$$

kurios yra teisingos su kiekvienu $\varepsilon > 0$. Parinkę tokį ε , kad būtų

$$l_{i_k} + \varepsilon h_{i_k} > 0, \quad l_{i_k} - \varepsilon h_{i_k} > 0 \quad (k = 1, \dots, r)$$

(o tai tikrai galima, nes $l_{i_k} > 0$), gauname du neneigiamus sprendinius

$$\lambda^{(1)} = (l_1 + \varepsilon h_1, \dots, l_n + \varepsilon h_n),$$

$$\lambda^{(2)} = (l_1 - \varepsilon h_1, \dots, l_n - \varepsilon h_n);$$

čia $l_j = h_j = 0$ ($j \in \{i_1, \dots, i_r\}$). Be to, aiškiai matyti, kad

$$(l_1, \dots, l_n) = \frac{1}{2} \lambda^{(1)} + \frac{1}{2} \lambda^{(2)}.$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad $(l_1, \dots, l_n)$ nėra ekstreminis aibės S_T taškas. Tai prieštarauja šio vektoriaus parinkimui. Todėl prielaida, kad vektoriai $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}$ tiesiškai priklausomi, yra neteisinga – teisingas teiginys, kad jie tiesiškai nepriklausomi.

Kadangi matricos A tiesiškai nepriklausomų stulpelių yra ne daugiau kaip $m = \text{rang } A$, tai $r \leq m$. Kita vertus, iš neišsigimimo sąlygos išplaukia, kad $r \geq m$. Todėl $r = m$.

133 teorema. *Tiesinių lygčių sistema, tenkinanti neišsigimimo sąlygą, turi baigtinį ekstreminių taškų skaičių.*

Įrodymas. Iš 132 teoremos išplaukia, kad ekstreminių taškų yra tiek, kiek skirtingų bazių turi matrica A . Kadangi $\text{rang } A = m$, tai skirtingų bazių yra ne daugiau kaip C_n^m .

Pavyzdys. Jeigu nagrinėtoji sistema tenkintų neišsigimimo sąlygą, tai jos ekstreminių taškų, t. y. bazinių sprendinių, rastume ne daugiau kaip $C_7^4 = 35$. Tačiau nežinome, ar ji tenkina tą sąlygą, ar ne.

Toliau tiesinio programavimo uždavinį nagrinėsime laikydami, kad yra žinomas kuris nors bazinis sprendinys.

Turime sistemą $Ax^T = \beta$, jos neneigiamų sprendinių aibę S_T ir tiesinę funkciją $f(x) = \langle \gamma, x \rangle$. Reikia rasti tokį $\lambda \in S_T$, kad būtų

$$\min_{x \in S_T} f(x) = f(\lambda).$$

Iš 132 ir 133 teoremų bei pračio paragrafo 131 teoremos išplaukia, jog pakanka rasti tokį aibės S_T ekstreminį tašką, kuriame funkcija $f(x)$ įgyja mažiausią reikšmę. Kadangi ekstreminių taškų skaičius yra baigtinis, tai, juos suradus, įmanoma išrinkti tokį, kuriame funkcija $f(x)$ įgyja mažiausią reikšmę. Beje, taip darant tektų labai daug skaičiuoti.

Aiškinsimės, kaip, žinodami vieną kurį ekstreminį tašką, galime rasti kitą ekstreminį tašką, kuriame tiesinės funkcijos reikšmė yra mažesnė negu duotajame.

Tarkime, kad $\lambda^{(0)} = (l_1^{(0)}, \dots, l_n^{(0)})$, $l_k^{(0)} > 0$ ($k=1, \dots, m$), $l_j^{(0)} = 0$ ($j \in \{i_1, \dots, i_m\}$), yra ekstreminis taškas, t. y. bazinis sprendinys. Reikia rasti tokį bazinį sprendinį $\lambda^{(1)}$, kad būtų

$$f(\lambda^{(1)}) < f(\lambda^{(0)}).$$

Pasinaudoję (8.7) ir (8.8) išraiškomis, gauname lygybes

$$\beta_j = \sum_{k=1}^m q_{i_k j} \beta_{i_k} \quad (j=1, \dots, n),$$

$$\beta = \sum_{k=1}^m l_k^{(0)} \beta_{i_k}$$

ir

$$q_{i_k i_k} = 1, \quad q_{i_k i_l} = 0, \quad l \neq k.$$

Pažymėkime

$$z_j = \sum_{k=1}^m c_{i_k} q_{i_k j} \quad (j=1, \dots, n)$$

ir

$$z_0 = f(\lambda^{(0)}) = \sum_{k=1}^m c_{i_k} l_k^{(0)}.$$

134 teorema (pagrindinė simplekso metodo teorema). Tarkime, kad $z_0 = f(\lambda^{(0)})$ ir $\lambda^{(0)}$ yra bazinis sprendinys.

1. Jeigu tarp $j \in \{i_1, \dots, i_m\}$ egzistuoja toks j^* , kad $c_{j^*} - z_{j^*} < 0$, tai galimi 2 atvejai:

a) $\min_{x \in S_T} f(x) = -\infty$, jei $q_{i_k j^*} \leq 0$ ($k=1, \dots, m$);

b) egzistuoja toks bazinis sprendinys $\lambda^{(1)}$, kad $f(\lambda^{(1)}) < f(\lambda^{(0)})$, kai $q_{i_k j^*} > 0$ su bent vienu k .

2. Jeigu $c_j - z_j \geq 0$ su visais $j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, tai

$$\min_{x \in S_T} f(x) = f(\lambda^{(0)}).$$

Irodymas. 1. Pasirenkame $\theta > 0$ ir, iš lygybės

$$\beta = \sum_{k=1}^m l_k^{(0)} \beta_{i_k}$$

atėmę lygybę

$$\theta \beta_j = \sum_{k=1}^m (\theta q_{i_k j}) \beta_{i_k},$$

gauname

$$\beta - \theta \beta_j = \sum_{k=1}^m (l_k^{(0)} - \theta q_{i_k j}) \beta_{i_k},$$

arba

$$\beta = \sum_{k=1}^m (l_k^{(0)} - \theta q_{i_k j}) \beta_{i_k} + \theta \beta_j \quad (j \notin \{i_1, \dots, i_m\}).$$

Ši lygybė reiškia, kad vektorius

$$\lambda^{(j)} = (l_1, \dots, l_n), \quad l_{i_k} = l_{i_k}^{(0)} - \theta q_{i_k j} \quad (k=1, \dots, m),$$

$$l_j = \theta, \quad l_t = 0, \quad t \neq j \quad (t \notin \{i_1, \dots, i_m\}),$$

yra sistemos sprendinys. Apskaičiavę funkcijos $f(x)$ reikšmę šiame taške, randame

$$f(\lambda^{(j)}) = \sum_{k=1}^m c_{i_k} l_{i_k}^{(0)} - \theta \sum_{k=1}^m c_{i_k} q_{i_k j} + \theta c_j = z_0 + \theta (c_j - z_j). \quad (8.12)$$

Tarkime, kad egzistuoja $j^* \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, su kuriuo teisinga nelygybė $c_{j^*} - z_{j^*} < 0$:

a) jeigu $q_{i_k j^*} \leq 0$ su visais $k=1, \dots, m$, tai, kad ir kokiį imtume $\theta > 0$, visada $l_{i_k}^{(0)} - \theta q_{i_k j^*} > 0$. Todėl su visais $\theta > 0$, $\lambda^{(j^*)}$ yra neneigiamas sprendinys, ir iš (8.12) lygybės gauname

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} f(\lambda^{(j^*)}) = z_0 + (c_{j^*} - z_{j^*}) \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta = -\infty.$$

Ši lygybė ekvivalenti teoremos 1 atvejo, a, teiginiui;

b) jeigu egzistuoja tokie k , su kuriais $q_{i_k j^*} > 0$, tai galime taip pasirinkti $\theta = \theta_1 > 0$, kad skirtumai $l_k^{(0)} - \theta_1 q_{i_k j^*}$ būtų teigiami, išskyrus vieną, kuris būtų lygus nuliui. Tuo tikslu turime imti

$$\theta_1 = \min_{\substack{1 \leq k \leq m \\ q_{i_k j^*} > 0}} \frac{l_k^{(0)}}{q_{i_k j^*}} = \frac{l_{i_k^*}^{(0)}}{q_{i_k^* j^*}}. \quad (8.13)$$

Kadangi neišsigimimo sąlyga tenkinama, tai šis minimumas pasiekiamas viename taške, nes priešingu atveju išraiškoje $\beta = \sum_{j=1}^n l_j \beta_j$ ($l_j \geq 0$) būtų mažiau kaip m teigiamų koeficientų.

Parinkę θ_1 pagal (8.13) sąlygą, gauname bazinį sprendinį

$$\lambda^{(1)} = (l_1^{(1)}, \dots, l_n^{(1)}),$$

kurio komponentės

$$l_k^{(1)} = l_k^{(0)} - \theta_1 q_{i_k j^*} \quad (k \neq k^*, \quad k = 1, \dots, m), \quad l_{j^*}^{(1)} = \Theta_1, \quad (8.14)$$

kitos $n-m$ komponentės lygios nuliui. Iš (8.12) lygybės gauname

$$f(\lambda^{(1)}) = z_0 + \theta_1 (c_{j^*} - z_{j^*}) < z_0.$$

Ši nelygybė ekvivalenti teoremos 1 atvejo, b, teiginiui. Pirmoji teoremos dalis įrodyta.

2. Jeigu $c_j - z_j > 0$ su visais $j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, tai imkime bet koki bazinį sprendinį λ ir įrodykime, kad $f(\lambda) \geq f(\lambda^0)$.

Tarkime, kad $\lambda = (l_1, \dots, l_n)$ yra bazinis sprendinys su

$$l_{j_t} > 0 \quad (t = 1, \dots, m) \quad \text{ir} \quad l_j = 0 \quad (j \notin \{j_1, \dots, j_m\}), \quad \text{t. y.}$$

$$\beta = \sum_{t=1}^m l_{j_t} \beta_{j_t}, \quad f(\lambda) = \sum_{t=1}^m c_{j_t} l_{j_t}.$$

Vektorius $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_m}$ išreiškiame vektoriais $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$ ir, pasinaudoję išraiškėmis

$$\beta_{j_t} = \sum_{k=1}^m q_{i_k j_t} \beta_{i_k},$$

gauname

$$\beta = \sum_{t=1}^m l_{j_t} \sum_{k=1}^m q_{i_k j_t} \beta_{i_k} = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{t=1}^m l_{j_t} q_{i_k j_t} \right) \beta_{i_k} = \sum_{k=1}^m l_k^{(0)} \beta_{i_k}.$$

Iš šios lygybės ir teoremos, teigiančios, jog vektoriaus koordinatės pasirinktoje bazėje yra vienintelės, gauname lygybės

$$l_k^{(0)} = \sum_{t=1}^m l_{j_t} q_{i_k j_t} \quad (k = 1, \dots, m).$$

Todėl

$$f(\lambda^{(0)}) = \sum_{k=1}^m c_{i_k} \sum_{t=1}^m l_{j_t} q_{i_k j_t} = \sum_{t=1}^m l_{j_t} z_{j_t}.$$

Kadangi, kai $j_t \in \{i_1, \dots, i_m\}$, galioja lygybės

$$q_{i_k j_t} = \begin{cases} 1, & j_t = i_k, \\ 0, & j_t \neq i_k, \end{cases}$$

tai

$$z_{j_t} \leq c_{j_t} \quad (j_t \notin \{i_1, \dots, i_m\}), \quad z_{j_t} = c_{j_t} \quad (j_t \in \{i_1, \dots, i_m\}).$$

Taigi gauname nelygybę

$$f(\lambda^{(0)}) \leq \sum_{t=1}^m l_{j_t} c_{j_t} = f(\lambda).$$

Tai ir reikėjo įrodyti.

§98. Bazinio sprendinio radimas. Dirbtinė bazė

Remdamiesi pagrindine simplekso metodo teorema, sudarysime paprastą ir patogią schemą funkcijos minimumo taškui rasti. Pagal šią schemą, turėdami vieną ekstreminį tašką, galėsime nustatyti kitą ekstreminį tašką, kuriame tiesinė funkcija įgyja mažesnę reikšmę. Tačiau pirmiausia reikia rasti tiesinių lygčių sistemos

$$Ax^T = \beta,$$

kurioje $\text{rang } A = m$ ir m — lygčių skaičius, neneigiamų sprendinių aibės S_T koki nors ekstreminį tašką, t. y. bazinį sprendinį.

Sakykime, kad neišsigimimo sąlyga yra išpildyta.

Norint rasti šios sistemos neneigiamą sprendinį, kuris turi m teigiamų koordinačių, pakanka sudaryti jai ekvivalenčią sistemą

$$x_{i_k} + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} a'_{kj} x_j = l_{i_k},$$

kurioje $l_{i_k} > 0$ ($k=1, \dots, m$).

Šios sistemos sprendinys $x_{i_k} = l_{i_k}$ ($k=1, \dots, m$), $x_j = 0$ ($j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$) yra bazinis sprendinys.

Pažymime, kad bendruoju atveju gauti tokio pavidalo ekvivalenčią sistemą su teigiamais laisvaisiais nariais nėra paprasta. Tačiau, kai lygčių skaičius nėra didelis, tokia sistema gaunama nesunkiai.

Pavyzdžiai. 1. Raskime tiesinių lygčių sistemos

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7,$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$

bazinį sprendinį.

Prie antrosios lygties pridedame pirmąją ir gauname

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$$

Gautąją lygtį pridedame prie pirmosios ir gauname

$$4x_1 + 3x_2 + x_4 = 15.$$

Tuo būdu gauname duotajai sistemai ekvivalenčią sistemą

$$x_3 + 3x_1 + 2x_2 = 8,$$

$$x_4 + 4x_1 + 3x_2 = 15,$$

kurios sprendinys yra (0, 0, 8, 15).

2. Raskime tiesinių lygčių sistemos

$$x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 7$$

bazinį sprendinį.

Sistemos antrąją lygtį pridedame prie pirmosios ir atimame iš trečiosios. Po to gautoje sistemoje prie antrosios lygties pridedame pirmąją, padauginą iš $-1/2$, ir trečiąją, padalytą iš 2. Gauname ekvivalenčią sistemą

$$x_1 + 2x_4 - x_5 = 1,$$

$$x_2 + x_4 + x_5 = 4,$$

$$x_3 + 2x_4 - x_5 = 2.$$

Taigi bazinis sprendinys yra (1, 4, 2, 0, 0).

Jeigu atitinkamo pavidalo ekvivalenčią sistemą sunku sudaryti, galima tiesinio programavimo uždavinį pakeisti jam ekvivalenčiu uždaviniu, įvedant papildomus kintamuosius. Tai atliekama šitaip.

Tarkime, kad sistemoje

$$Ax^T = \beta$$

visi laisvieji nariai yra teigiami. (Jeigu būtų neigiamų laisvųjų narių, tai juos padarytume teigiamais pakeitę lygties koeficientų ženklus. Jei būtų lygių nuliui laisvųjų narių, tai prie atitinkamos lygties pridėtume lygtį su teigiamu laisvuju nariu.) Vietoj sistemos su n kintamųjų imame sistemą

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

su $n+m$ kintamųjų. Šios sistemos bazinis sprendinys yra

$$(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m).$$

Aišku, kad iš kiekvieno tos sistemos sprendinio, kurio paskutinės m komponentų lygios nuliui, atmetę tuos nulius, gausime sistemos $Ax^T = \beta$ sprendinį.

Vietoj funkcijos $f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ nagrinėjame funkciją

$$f_1 = f + M \sum_{i=1}^m x_{n+i};$$

čia M – pakankamai didelis skaičius.

Kadangi $\min f_1 = \min f$, tai, užuot ieškoję funkcijos f minimumo taško duotosios sistemos neneigiamų sprendinių aibėje, galime ieškoti funkcijos f_1 minimumo taško naujos sistemos neneigiamų sprendinių aibėje.

Kitame paragrafe aiškinsimės naujo bazinio sprendinio skaičiavimo schemą, kai vienas bazinis sprendinys žinomas.†

§99. Skaičiavimo simplekso metodu schema

Kai bazinis sprendinys žinomas, kitą bazinį sprendinį, kuriame funkcijos $f(x)$ reikšmė yra mažesnė, galima rasti naudojantis neįeinančių į bazę sistemos matricos stulpelių koordinatėmis. Reikia atlikti analizę remiantis pagrindine simplekso metodo teorema ir naudotis (8.13) bei (8.14) formulėmis. Po to viskas kartojama naudojantis rastuoju baziniu sprendiniu. Šio paragrafo tikslas – kiek galima supaprastinti sprendimo procesą, formalizuoti jį, kad būtų galima naudotis lentelėmis.

Tarkime, kad reikia rasti tiesinės funkcijos $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ minimumo tašką ir minimumą tiesinių lygčių sistemos

$$Ax^T = \beta$$

su m lygčių ir n kintamųjų, tenkinančios neišsigimimo sąlygą neneigiamų sprendinių aibėje. Kaip ir anksčiau, žymėsime $\beta_1, \dots, \beta_n$ matricos A stulpelius. Jeigu žinomas bazinis sprendinys $\lambda^{(0)} = (l_1^{(0)}, \dots, l_n^{(0)})$, kurio komponentės $l_k^{(0)} > 0$ ($k=1, \dots, m$) ir $l_j^{(0)} = 0$ ($j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$), tai jį atitinkanti bazė yra $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$. Pirmiausia reikia rasti neįeinančių į bazę vektorių (matricos stulpelių) koordinates toje bazėje. Tuo tikslu reikia išspręsti $n-m$ lygčių sistemų

$$\beta_j = \sum_{k=1}^m q_{i_k j} \beta_{i_k} \quad (j \notin \{i_1, \dots, i_m\}),$$

kuriuose yra po m kintamųjų $q_{i_k j}$ ($k=1, \dots, m$).

Jeigu, ieškodami bazinio sprendinio, sistemą taip pertvarkome, kad ji tampa šitokia:

$$x_k + \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_m\}} a'_{kj} x_j = l_k^{(0)} \quad (k=1, \dots, m),$$

tai pastarosios spręsti nereikia, nes joje vektoriai $\beta_k^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (čia 1 yra k -ojoje vietoje). Taigi $q_{ikj} = a'_{kj}$, t. y. vektorių β_j ($j \in \{i_1, \dots, i_m\}$) koordinatės bazėje $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$ yra pačių vektorių komponentės. Visai analogiškai randamos vektorių (matricos stulpelių) koordinatės dirbtinėje bazėje.

Kai koordinatės q_{ikj} jau žinomos, reikia apskaičiuoti dydžius

$$z_j = \sum_{k=1}^m c_{i_k} q_{ikj} \quad (j \notin \{i_1, \dots, i_m\})$$

bei skirtumus $c_j - z_j$ ir pritaikyti pagrindinę simplekso metodo teoremą. Toliau skaičiavimams pravartu naudotis 6 lentele.

Stulpelyje „Bazinis sprendinys“ surašomos teigiamos bazinio sprendinio komponentės, atitinkančios bazinius vektorius, t. y. laisvųjų narių vektoriaus β koordinatės bazėje $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$. Stulpelyje „ γ “ surašomi tiesinės funkcijos

6 lentelė

Bazės vektoriai	γ	Bazinis sprendinys	Bazei nepriklausantys vektoriai				
			...	j	...	j^*	
i_1	c_{i_1}	l_{i_1}		$q_{i_1 j}$		$q_{i_1 j^*}$	
i_2	c_{i_2}	l_{i_2}		$q_{i_2 j}$		$q_{i_2 j^*}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
i_{k^*}	$c_{i_{k^*}}$	$l_{i_{k^*}}$		$q_{i_{k^*} j}$		$q_{i_{k^*} j^*}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
i_k	c_{i_k}	l_{i_k}		$q_{i_k j}$		$q_{i_k j^*}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
i_m	c_{i_m}	l_{i_m}		$q_{i_m j}$		$q_{i_m j^*}$	
$m+1$		z_0		z_j		z_{j^*}	
$m+2$				c_j		c_{j^*}	
$m+3$				$c_j - z_j$		$c_{j^*} - z_{j^*}$	

f koeficientai, atitinkantys teigiamas bazinio sprendinio komponentes. Stulpelyje „ j “ surašomos vektoriaus β_j koordinatės. „ $m+1$ “ eilutėje surašoma: stulpelyje „bazinis sprendinys“ funkcijos f reikšmė $z_0=f(\lambda^{(0)})$, stulpelyje „ j “ – dydis z_j , kuris yra lygus stulpelio „ γ “ ir stulpelio „ j “ skaliarinei sandaугai, t. y. atitinkamų elementų sandaugų sumai. Eilutėje „ $m+2$ “ surašomos atitinkamos funkcijos f koeficientų reikšmės c_j ; eilutėje „ $m+3$ “ – skirtumai $c_j - z_j$.

Kai lentelė sudaryta, ją analizuojame remdamiesi 134 teorema.

Galimi 2 atvejai.

1. $c_j - z_j \geq 0$ su visais $j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, t. y. visi paskutinės eilutės skaičiai yra neneigiami. Vadinasi, sprendinys $\lambda^{(0)}$ yra ieškomasis funkcijos f minimumo taškas. Tuo atveju $\lambda^{(0)}$ yra tiesinio programavimo uždavinio sprendinys ir $z_0 = f(\lambda^{(0)})$ yra funkcijos f minimumas.

2. Yra tokių stulpelių j , kuriuose eilutėje „ $m+3$ “ yra neigiamų skaičių. Tuo atveju reikia peržiūrėti visus stulpelius, kuriuose paskutinėje eilutėje yra neigiami skaičiai:

2a. Jeigu paaiškės, kad kuriame nors iš tų stulpelių visi $(1-m)$ eilučių skaičiai neteigiami, tai $\min f = -\infty$;

2b. Jeigu visuose tuose stulpeliuose $(1-m)$ eilučių yra bent po vieną teigiamą skaičių, reikia nagrinėti toliau.

Tuo atveju kiekviename stulpelyje, kurio paskutinėje eilutėje yra neigiamas skaičius, randame

$$\theta_j = \min_{q_{i_k j} > 0} \frac{l_{i_k}}{q_{i_k j}}.$$

Po to iš šių minimumų imame tą, kuriame sandauga $\theta_j(z_j - c_j)$ didžiausia.

Sakykime, tai yra stulpelis j^* , t. y. $\theta_{j^*} = \frac{l_{i_k^*}}{q_{i_k^* j^*}}$. Pažymime pastarąjį santykį θ_1 ir naują bazinį sprendinį

$$\lambda^{(1)} = (l_1^{(1)}, \dots, l_0^{(1)})$$

ir, naudodamiesi (8.14) formulėmis, iš kurių nustatome, kad $l_{i_k}^{(1)} = l_{i_k} - \theta_1 q_{i_k j^*}$ ($k \neq k^*$, $k=1, \dots, m$), randame $l_{j^*}^{(1)} = \theta_1$. Visos kitos komponentės lygios nuliui. Neišsigimimo sąlyga garantuoja, kad minėtasis minimumas kiekvienam j , kuriam $c_j - z_j < 0$, pasiekiamas tik viename taške. Todėl taip gautas sprendinys yra bazinis ir $f(\lambda^{(1)}) < f(\lambda^{(0)})$. Tą sprendinį atitinka bazė $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_{k^*-1}}, \beta_{j^*}, \beta_{i_{k^*+1}}, \dots, \beta_{i_m}$, gaunama iš senosios bazės $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}$, vektorių $\beta_{i_{k^*}}$ pakeitus vektoriumi β_{j^*} .

Dabar, turėdami naują bazinį sprendinį $\lambda^{(1)}$, viską kartojame, t. y. sudarome naują lentelę ir ją taip pat išanalizuojame. Sprendimą tęsiame tol, kol gauname lentelę, kuri atitinka 1 arba 2a atvejį.

Išsiaiškinsime, kaip reikia sudaryti antrą lentelę, kai žinoma pirmoji.

Eilutę, pirmoje lentelėje pažymėtą raide „ i_k “, naujoje lentelėje pažymime raide „ j^* “, o stulpelį, pirmoje lentelėje pažymėtą raide „ j^* “, pažymime „ i_{k^*} “. Stulpelį „ γ “ paliekame tą patį, tik vietoj $c_{i_{k^*}}$ įrašome c_{j^*} . Stulpelyje „bazinis sprendinys“ vietoj l_{i_k} įrašome $l_{i_k} - \theta_1 q_{i_k j^*}$, kai $k \neq k^*$, o vietoj $l_{i_{k^*}}$ įrašome θ_1 ir vietoj z_0 įrašome $f(\lambda^{(1)})$.

Po to apskaičiuojame vektorių, neįeinančių į naują bazę, koordinates naujoje bazėje ir jas įrašome atitinkamuose langeliuose. Irgi naudojames senąją lentelę.

Kadangi

$$\beta_{j*} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k^*}}^m q_{i_k j^*} \beta_{i_k} + q_{i_{k^*} j^*} \beta_{i_{k^*}}, \quad (8.15)$$

tai

$$\beta_{i_{k^*}} = \frac{1}{q_{i_{k^*} j^*}} \beta_{j^*} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k^*}}^m \left(-\frac{q_{i_k j^*}}{q_{i_{k^*} j^*}} \right) \beta_{i_k}. \quad (8.16)$$

Kai $j \neq j^*$, į

$$\beta_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k^*}}^m q_{i_k j} \beta_{i_k} + q_{i_{k^*} j} \beta_{i_{k^*}}$$

įrašę $\beta_{i_{k^*}}$ išraišką, gauname

$$\beta_j = \frac{q_{i_{k^*} j}}{q_{i_{k^*} j^*}} \beta_{j^*} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k^*}}^m \left(q_{i_k j} - q_{i_{k^*} j} \frac{q_{i_k j^*}}{q_{i_{k^*} j^*}} \right) \beta_{i_k}. \quad (8.17)$$

Vektorių koordinates naujoje bazėje žymime, kaip ir anksčiau, raide q su indeksais ir brūkšneliu viršuje. Tada iš (8.16) ir (8.17) formulių gauname šitokias koordinatų naujoje bazėje išraiškas:

$$q'_{j^* i_{k^*}} = \frac{1}{q_{i_{k^*} j^*}}, \quad (8.18)$$

$$q'_{j^* j} = \frac{q_{i_{k^*} j}}{q_{i_{k^*} j^*}} = q_{i_{k^*} j} q'_{j^* i_{k^*}}, \quad (8.19)$$

$$q'_{i_k i_{k^*}} = -\frac{q_{i_k j^*}}{q_{i_{k^*} j^*}} = (-q_{i_k j^*}) \cdot q'_{j^* i_{k^*}} \quad (k = 1, \dots, m, k \neq k^*), \quad (8.20)$$

$$q_{i_k j} = q_{i_k j} - q_{i_k j^*} \frac{q_{i_{k^*} j}}{q_{i_{k^*} j^*}} = q_{i_k j} - q_{i_k j^*} q'_{j^* j} \quad (8.21)$$

$$(k \neq k^*, j \neq j^*, j \notin \{i_1, \dots, i_m\}).$$

Remdamiesi (8.15) ir šiomis formulėmis, naują lentelę galime užpildyti labai paprastai. Antrosios lentelės stulpelį „bazinis sprendinys“ gauname, pirmojoje lentelėje iš to paties stulpelio atėmę stulpelį „ j^* “, padauginą iš rastosios θ_1 reikšmės. Toliau naują lentelę geriausia pildyti šitokiu būdu. Pirmiausia apskaičiuojame $q'_{j^* i_{k^*}}$ iš (8.18) formulės ir jį įrašome naujos lentelės „ j^* “ eilutės ir „ i_{k^*} “ stulpelio sankirtoje. Lengva pastebėti, kad tai yra skaičius,

atvirkštinis skaičiui, esančiam pirmosios lentelės „ i_k^* “ eilutės ir „ j^* “ stulpelio sankirtoje. Po to, naudodamiesi rastuoju skaičiumi ir (8.19) bei (8.20) formulėmis, apskaičiuojame q'_{j^*j} bei $q'_{i_k^*i_k^*}$ ir surašome juos į atitinkamus „ j^* “ eilutės ir „ i_k^* “ stulpelio langelius. Kitus langelius užpildome naudodamiesi (8.21) formulėmis. „ $m+1$ “, „ $m+2$ “ ir „ $m+3$ “ eilutes užpildome kaip pirmoje lentelėje.

Kai lentelė sudaryta, vėl ją analizuojame remdamiesi pagrindine teorema ir, jeigu reikia, tuo pačiu būdu sudarome kitas lenteles.

7 lentelė

Bazės vektoriai	γ	Bazinis sprendinys	Bazei nepriklausantys vektoriai				
			...	j	...	i_k^*	
i_1	c_{i_1}	$l_{i_1} - \theta_1 q_{i_1 j^*}$	...	$q_{i_1 j} - q_{i_1 j^*} q'_{j^* j}$	...	$(-q_{i_1 j^*}) q'_{j^* i_k^*}$	...
.....							
j^*	c_{j^*}	θ_1	...	$q_{i_k^* j} q'_{j^* i_k^*}$	...	$q'_{j^* i_k^*} = \frac{1}{q_{i_k^* j^*}}$	...
.....							
i_k	c_{i_k}	$l_{i_k} - \theta_1 q_{i_k j^*}$	...	$q_{i_k j} - q_{i_k j^*} q'_{j^* j}$	...	$(-q_{i_k j^*}) q'_{j^* i_k^*}$	...
.....							
i_m	c_{i_m}	$l_{i_m} - \theta_1 q_{i_m j^*}$	...	$q_{i_m j} - q_{i_m j^*} q'_{j^* j}$	...	$(-q_{i_k j^*}) q'_{j^* i_k^*}$	...
$m+1$		$f(\lambda^{(1)})$	...	z'_j	...	$z'_{i_k^*}$	...
$m+2$			...	c_j	...	$c_{i_k^*}$	...
$m+3$			...	$c_j - z'_j$	...	$c_{i_k^*} - z'_{i_k^*}$	...

Pavyzdžiai. 1. Raskime funkcijos $f(x) = -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5$ minimumą tiesinių lygčių sistemos

$$x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 = 7$$

neneigiamų sprendinių aibėje.

Kadangi duotosios sistemos bazinį sprendinį jau esame radę ir kartu esame nustatę, kad sistema

$$x_1 + 2x_4 - x_5 = 1,$$

$$x_2 + x_4 + x_5 = 4,$$

$$x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$$

ekvivalenti duotajai, tai ieškosime duotosios funkcijos minimumo šios sistemos neneigiamų sprendinių aibėje.

Bazinis sprendinys yra $\lambda^{(0)} = (1, 4, 2, 0, 0)$. Kadangi $f = -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5$, tai $c_1 = -3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 5$, $c_4 = -2$, $c_5 = 1$. Baziniai vektoriai yra $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, o β_4, β_5 nepriklauso bazei.

Sudarome lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	4	5
1	-3	1	2	-1
2	4	4	1	1
3	5	2	2	-1
		23	8	2
			-2	1
			-10	-1

Kadangi paskutinėje eilutėje yra neigiamų skaičių, tai bazinis sprendinys $(1, 4, 2, 0, 0)$ nėra minimumo taškas. Randame θ_1 .

Apskaičiuojame santykius:

$$1) j=4, \frac{l_1}{q_{14}} = \frac{1}{2}, \frac{l_2}{q_{24}} = 4, \frac{l_3}{q_{34}} = 1, \min_{1 \leq k \leq 3} \frac{l_k}{q_{k4}} = \frac{1}{2} = \frac{l_1}{q_{14}};$$

$$2) j=5, \frac{l_2}{q_{25}} = 4.$$

Kadangi $\frac{1}{2}(-10) < 4 \cdot (-1)$, tai imame $\theta_1 = \frac{1}{2}$, $j^* = 4$, $i_{k^*} = 1$. Todėl nauja bazė yra $\beta_4, \beta_2, \beta_3$. Randame ją atitinkantį sprendinį:

$$l_1^{(1)} = 0, l_2^{(1)} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{2}, l_3^{(1)} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, l_4^{(1)} = \frac{1}{2}, l_5^{(1)} = 0;$$

$$\lambda^{(1)} = \left(0, \frac{7}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right), f(\lambda^{(1)}) = 4 \cdot \frac{7}{2} + 5 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 18 < 23 = f(\lambda^{(0)}).$$

Naują lentelę sudarome naudodamiesi (8.15), (8.18)–(8.21) formulėmis

$$q'_{41} = \frac{1}{q_{14}} = \frac{1}{2}, \quad q'_{21} = -q_{24} q'_{41} = -\frac{1}{2},$$

$$q'_{31} = -q_{34} \cdot q'_{41} = -1,$$

$$q'_{45} = q_{15} \cdot q'_{41} = -\frac{1}{2},$$

$$q'_{25} = q_{25} - q_{24} q'_{45} = 1 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

$$q'_{35} = q_{35} - q_{34} \cdot q'_{45} = -1 - 2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

	γ	Bazinis sprendinys	1	5
4	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
3	5	1	-1	0
		18	-8	7
			-3	1
			5	-6

Paskutinėje eilutėje vėl gavome neigiamą skaičių. Todėl ir sprendinys $\left(0, \frac{7}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$ taip pat nėra minimumo taškas.

Apskaičiuojame santykius $\frac{l'_k}{q'_{k5}}$ ir surandame minimumą: $\frac{l'_2}{q'_{25}} = \frac{7}{3}$.

Paskutiniame stulpelyje tik viena koordinatė teigiama. Todėl $\theta_2 = \frac{7}{3}$ ir $i_{k^*} = 2$, $j^* = 5$. Nauja bazė yra $\beta_4, \beta_5, \beta_3$, o naujo bazinio sprendinio komponentės

$$l_1^{(2)} = 0, \quad l_2^{(2)} = 0, \quad l_3^{(2)} = 1, \quad l_4^{(2)} = \frac{5}{3}, \quad l_5^{(2)} = \frac{7}{3}.$$

Taigi naujasis bazinis sprendinys yra

$$\lambda^{(2)} = \left(0, 0, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Sudarome šį sprendinį atitinkančią lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	1	2
4	-2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
5	1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
3	5	1	-1	0
		4	-6	0
			-3	4
			3	4

Kadangi paskutinėje eilutėje įrašyti teigiami skaičiai, tai sprendinys

$$\left(0, 0, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

yra ieškomasis minimumo taškas, o funkcijos reikšmė tame taške

$$f(\lambda^{(2)}) = 4$$

yra ieškomoji minimali reikšmė.

2. Šiame pavyzdyje naudosimės dirbtine baze. Raskime funkcijos $f = 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 6x_4$ minimumo tašką lygčių sistemos

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 5,$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 7,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 9$$

neneigiamų sprendinių aibėje.

Pirmiausia pakeičiame uždavinį, įvesdami papildomus kintamuosius x_5, x_6, x_7 ir naują funkciją f_1 .

Reikia rasti funkcijos $f_1 = 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 6x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7)$ minimumą sistemos

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5,$$

$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 7,$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 9$$

neneigiamų sprendinių aibėje.

Toliau uždavinį sprendžiame simplekso metodu. Kadangi visi laisvieji nariai teigiami, tai bazinis sprendinys yra $\lambda^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 5, 7, 9)$. Lygčių sistemos matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o baziniai vektoriai $\beta_5, \beta_6, \beta_7$, t. y. paskutiniai trys matricos stulpeliai, todėl kitų stulpelių koordinatės šioje bazėje yra tų stulpelių elementai. Taigi iš karto gauname lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	1	2	3	4
5	M	5	3	-2	1	-1
6	M	7	1	1	-4	3
7	M	9	2	3	1	2
$21M$			$6M$	$2M$	$-2M$	$4M$
			3	-4	8	-6
			$3-6M$	$-4-2M$	$8+2M$	$-6-4M$

Paskutinėje eilutėje yra neigiamų skaičių, todėl ieškome kito bazinio sprendinio

$$\min \frac{l_k}{q_{k1}} = \frac{5}{3} = \frac{l_5}{q_{51}}, \quad \min \frac{l_k}{q_{k2}} = 3 = \frac{l_7}{q_{72}}, \quad \min \frac{l_k}{q_{k4}} = \frac{7}{3} = \frac{l_6}{q_{64}}.$$

Kadangi M galima imti tokį, kad būtų

$$\frac{5}{3} (6M-3) > 3 (2M+4), \quad \frac{5}{3} (6M-3) > \frac{7}{3} (4M+6),$$

tai imame $j^*=1, i_{k^*}=5$ ir $\theta = \frac{5}{3}$. Vadinas, nauja bazė yra $\beta_1, \beta_6, \beta_7$. Naują bazinį sprendinį apskaičiuojame, naudodamiesi (8.15) formulėmis, ir gauname

$$l_1 = \frac{5}{3}, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 0, \quad l_4 = 0, \quad l_5 = 0, \quad l_6 = 7 - \frac{5}{3} = \frac{16}{3}, \quad l_7 = 9 - \frac{5}{3} \cdot 2 = \frac{17}{3}.$$

Taigi naujas bazinis sprendinys yra

$$\lambda = \left(\frac{5}{3}, 0, 0, 0, 0, \frac{16}{3}, \frac{17}{3} \right).$$

Sudarome naują lentelę. Vektoriaus β_5 koordinatės apskaičiuojame iš (8.18) ir (8.20) formulių, o vektorių $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ koordinatės iš (8.19) ir (8.21) formulių ir gauname šitokią lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	5	2	3	4
1	3	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
6	M	$\frac{16}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{13}{3}$	$\frac{10}{3}$
7	M	$\frac{17}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
		$5+11M$	$1-M$	$-2+6M$	$1-4M$	$-1+6M$
			M	-4	8	-6
			$2M-1$	$-6M-2$	$4M+7$	$-6M-5$

Kadangi paskutinėje eilutėje yra tik du neigiami skaičiai stulpeliuose, pažymėtuose 2 ir 4, tai kiekviename iš jų randame santykio θ minimumus $\frac{17}{13}$, $\frac{8}{5}$. Kadangi esant pakankamai dideliems M

$$\frac{17}{13} (2+6M) < \frac{8}{5} (6M-5),$$

tai imame $\theta = \frac{8}{5}$. Vadinasi, $i_k^* = 6$, $j^* = 4$ ir nauja bazė yra $\beta_1, \beta_4, \beta_7$. Apskaičiavę bazinį sprendinį, gauname $\left(\frac{11}{5}, 0, 0, \frac{8}{5}, 0, 0, \frac{7}{5}\right)$. Naudodamiesi naujos lentelės užpildymo schema (skaičiavimus praleidžiame), gauname tokią lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	5	2	3	6
1	3	$\frac{11}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
4	-6	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{10}$	$\frac{3}{10}$
7	M	$\frac{7}{5}$	$-\frac{2}{5}$	3	$\frac{19}{5}$	$-\frac{4}{5}$
		$\frac{-15+7M}{5}$	$\frac{14-4M}{10}$	$\frac{-9+6M}{2}$	$\frac{75+38M}{10}$	$\frac{-15-8M}{10}$
			M	-2	8	M
			$\frac{6M-15}{10}$	$\frac{5-6M}{2}$	$\frac{5-38M}{10}$	$\frac{2M+15}{10}$

Paskutinėje eilutėje (kai M – didelis skaičius) vėl turime tik du neigiamus skaičius stulpeliuose, pažymėtuose 2 ir 3. Suradę kiekviename iš jų santykius θ , gauname $\frac{7}{15}, \frac{7}{19}$.

Kadangi

$$\frac{7}{15} \left(\frac{6M-5}{2} \right) < \frac{7}{19} \left(\frac{38M-5}{10} \right),$$

tai imame $\theta = \frac{7}{19}$. Tuo būdu gauname $i_{k*}=7, j^*=3$ ir naują bazę $\beta_1, \beta_4, \beta_3$, kurią atitinkantis bazinis sprendinys yra

$$\left(\frac{85}{38}, 0, \frac{7}{19}, \frac{79}{38}, 0, 0, 0 \right).$$

Sudarome naują lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	5	2	7	6
1	3	$\frac{85}{38}$	$\frac{11}{38}$	$-\frac{8}{19}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{3}{38}$
4	-6	$\frac{79}{38}$	$-\frac{9}{38}$	$\frac{29}{19}$	$\frac{13}{38}$	$\frac{1}{38}$
3	8	$\frac{7}{19}$	$-\frac{2}{19}$	$\frac{15}{19}$	$\frac{5}{19}$	$-\frac{4}{19}$
		$-\frac{107}{38}$	$\frac{55}{38}$	$-\frac{78}{19}$	$\frac{5}{38}$	$-\frac{67}{38}$
			M	-4	M	M
			$M - \frac{55}{38}$	$\frac{2}{19}$	$M - \frac{5}{38}$	$M + \frac{67}{38}$

Kadangi M galima parinkti tokį, kad paskutinės eilutės skaičiai būtų teigiami, tai taškas $\left(\frac{85}{38}, 0, \frac{7}{19}, \frac{79}{38}, 0, 0, 0 \right)$ yra funkcijos f_1 minimumo taškas. Todėl funkcijos f minimumo taškas yra $\left(\frac{85}{38}, 0, \frac{7}{19}, \frac{79}{38} \right)$, o jos minimali reikšmė

$$\min f = 3 \cdot \frac{85}{38} + 8 \cdot \frac{7}{19} - 6 \cdot \frac{79}{38} = -\frac{107}{38}.$$

§100. Išsigimimo atvejais

Šiame paragrafe išsiaiškinsime, kaip galima spręsti tuos tiesinio programavimo uždavinius, kurie netenkina neišsigimimo sąlygos, t. y. kai išraiškoje

$$\beta = l_1 \beta_1 + \dots + l_n \beta_n, \quad l_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

gali būti mažiau kaip m teigiamų koordinačių. Vadinasi, gali egzistuoti tokios bazės, kuriose ne visos vektoriaus β koordinatės bus teigiamos, o kai kurios iš jų bus lygios nuliui. Tokioms lygčių sistemoms $Ax^T = \beta$ negalioja 97 paragrafo teoremos. Taigi lentelės stulpelyje „j“, kai $c_j - z_j < 0$,

$$\min_{q_{i_k j} > 0} \frac{l_{i_k}}{q_{i_k j}}$$

gali būti pasiekiamas ne viename, o dviejuose ar daugiau taškų. Todėl nežinosime, kurį iš jų pasirinkti.

Šiuo atveju tiesinio programavimo uždavinys keičiamas kitu uždaviniu, taikant vadinamąjį ε -metodą.

Imame $\varepsilon > 0$ ir konstruojame vektorių

$$\beta^{(\varepsilon)} = \beta + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \beta_j.$$

Kadangi

$$\beta_j = \sum_{k=1}^m q_{i_k j} \beta_{i_k} \quad (j = 1, \dots, n), \quad \beta = \sum_{k=1}^m l_{i_k} \beta_{i_k},$$

($l_{i_1}, \dots, l_{i_m}$ yra bazinio vektoriaus teigiamos komponentės), tai

$$\beta^{(\varepsilon)} = \sum_{k=1}^m \left(l_{i_k} + \sum_{j=1}^n q_{i_k j} \varepsilon^j \right) \beta_{i_k}.$$

Taigi sistemos

$$Ax^T = \beta^{(\varepsilon)} \quad (8.22)$$

bazinis sprendinys yra $\lambda^{(\varepsilon)} = (l_1^{(\varepsilon)}, \dots, l_n^{(\varepsilon)})$; čia

$$l_{i_k}^{(\varepsilon)} = l_{i_k} + \sum_{j=1}^n q_{i_k j} \varepsilon^j \quad (k = 1, \dots, m), \quad l_i^{(\varepsilon)} = 0 \quad (i \notin \{i_1, \dots, i_m\}).$$

Aišku, kad $l_{i_k}^{(\varepsilon)} > 0$ ($k = 1, \dots, m$) parinkus pakankamai mažą $\varepsilon > 0$. Funkcijos $f(x)$ reikšmė taške $\lambda^{(\varepsilon)}$ yra

$$z^{(\varepsilon)} = f(\lambda) + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j z_j.$$

Kadangi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z^{(\varepsilon)} = f(\lambda)$, tai ir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{\lambda^{(\varepsilon)}} z^{(\varepsilon)} = \min_{\lambda} f(\lambda).$$

Taigi lieka įsitikinti, kad (8.22) sistema, atitinkamai parinkus $\varepsilon > 0$, tenkina neišsigimimo sąlygą.

135 teorema. Atitinkamai parinkus $\varepsilon > 0$, (8.22) lygčių sistemos simplekso metodo lentelėje θ minimumas, t. y.

$$\min_{\substack{1 \leq k \leq m \\ q_{i_k t} > 0}} \frac{l_{i_k}^{(\varepsilon)}}{q_{i_k t}},$$

randamas vienareikšmiškai.

Irodymas.

$$l_{i_k}^{(\varepsilon)} = l_{i_k} + \sum_{s=1}^m q_{i_k i_s} \varepsilon^{i_s} + \sum' q_{i_k j} \varepsilon^j$$

(čia ir toliau Σ' reiškia sumavimą pagal tuos indeksus $j \in \{1, \dots, n\}$, kurie nėra lygūs nė vienam iš i_s ($s = 1, \dots, m$)); be to,

$$q_{i_k i_s} = \begin{cases} 1, & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases}$$

Todėl

$$l_{i_k}^{(\varepsilon)} = l_{i_k} + \varepsilon^{i_k} + \sum' q_{i_k j} \varepsilon^j.$$

Iš kurio nors stulpelio t gauname

$$\min_{\substack{1 \leq k \leq m \\ q_{i_k t} > 0}} \frac{l_{i_k}^{(\varepsilon)}}{q_{i_k t}} = \min_{\substack{1 \leq k \leq m \\ q_{i_k t} > 0}} \frac{1}{q_{i_k t}} \left(l_{i_k} + \varepsilon^{i_k} + \sum' q_{i_k j} \varepsilon^j \right).$$

Jeigu, pasirinkę du kuriuos nors numerius k' , k'' , $i_k' < i_k''$, randame

$$\min_{\substack{1 \leq k \leq m \\ q_{i_k t} > 0}} \frac{l_{i_k}}{q_{i_k t}} = \frac{l_{i_k'}}{q_{i_k' t}} = \frac{l_{i_k''}}{q_{i_k'' t}},$$

tai

$$\min_{\substack{1 \leq k \leq m \\ q_{i_k t} > 0}} \frac{l_{i_k}^{(\varepsilon)}}{q_{i_k t}} \neq \frac{l_{i_k''}^{(\varepsilon)}}{q_{i_k'' t}},$$

nes, imdami pakankamai mažą $\varepsilon > 0$, visada galime pasiekti, kad būtų

$$\frac{1}{q_{i_k' t}} \left(\varepsilon^{i_k'} + \sum' q_{i_k' j} \varepsilon^j \right) < \frac{1}{q_{i_k'' t}} \left(\varepsilon^{i_k'} + \sum' q_{i_k'' j} \varepsilon^j \right).$$

Tai ir įrodo teoremą.

Praktikoje, sprendžiant uždavinį, dažniausiai apsieinama be ε . Naudojama ši tokia schema.

Sakykime, M_0 yra aibė tų k , su kuriais pasiekiamas minimumas

$$\min_{\substack{1 \leq k \leq m \\ q_{i_k t} > 0}} \frac{l_{i_k}}{q_{i_k t}}.$$

Jeigu aibėje M_0 tėra vienas elementas, tai išsigimimo nėra. Jeigu aibėje M_0 yra daugiau elementų, tai sudarome aibę M_1 tokiu būdu: randame mažiausią $j_1 \neq i_k$ ($k=1, \dots, m$) ir M_1 pažymime aibę tų k , su kuriais pasiekiamas minimumas

$$\min_{k \in M_0} q_{i_k j_1} q_{i_k t}^{-1}.$$

Jeigu aibėje M_1 yra tik vienas elementas k_1 , tai bazės vektorius $\beta_{i_{k_1}}$ pakeičiamas vektoriumi β_t . Jeigu aibėje M_1 yra daugiau elementų, konstruojame naują aibę M_2 šitaip: randame mažiausią j_2 , $j_1 < j_2 \neq i_k$ ($k=1, \dots, m$) ir M_2 pažymime aibę tų k , su kuriais pasiekiamas minimumas

$$\min_{k \in M_1} q_{i_k j_1} q_{i_k t}^{-1}.$$

Jei aibėje M_2 tėra vienas elementas k_2 , tai bazės vektorius $\beta_{i_{k_2}}$ pakeičiame vektoriumi β_t . Jei joje yra daugiau elementų, tai kartojame tą pačią procedūrą, kol gauname vieno elemento aibę M_s .

Išsigimimo atvejai yra reti. Kad išmoktume taikyti ε -metodą praktikoje, išnagrinėsime vieną pavyzdį.

Pa vyzdys. Rasime funkcijos $f=3x_1+6x_2-5x_3-10x_4+11x_5-7x_6$ minimumo tašką ir minimumo reikšmę tiesinių lygčių sistemos

$$x_1+x_3-x_3 \quad +2x_5-7x_6=5,$$

$$x_2+x_3+x_4+3x_5-3x_6=7,$$

$$x_3+2x_4+x_5+x_6=4$$

neneigiamų sprendinių aibėje.

Pirmiausia ieškome bazinio sprendinio. Kad nereikėtų įvesti papildomų kintamųjų, perdirstame sistemą šitaip: iš antrosios lygties atimame trečiąją, po to gautoje sistemoje iš pirmosios lygties atimame antrąją lygtį ir pridėdame trečiąją lygtį. Gauname sistemą

$$x_1 \quad +3x_4+x_5-2x_6=6,$$

$$x_2 \quad -x_4+2x_5-4x_6=3,$$

$$x_3+2x_4+x_5+x_6=4,$$

kuri yra ekvivalenti pradinei. Šios sistemos matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

o bazinis sprendinys $(6, 3, 4, 0, 0, 0)$. Ši sprendinį atitinka bazė $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Sudarome lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	4	5	6
1	3	6	3	1	-2
2	6	3	-1	2	-4
3	-5	4	2	1	1
		16	-7	10	-35
			-10	11	-7
			-3	1	28

Apskaičiuojame

$$\min \frac{l_k}{q_{k4}} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2 = \frac{l_1}{q_{14}} = \frac{l_3}{q_{34}}, \quad \text{t. y. } \theta = 2.$$

Kadangi minimumas pasiekiamas dviejuose taškuose, tai turime išsigimimo atvejį.

Aibė M_0 šiuo atveju susideda iš dviejų taškų: 1 ir 3. Imame $j_1 = 5$. Kadangi

$$\frac{q_{15}}{q_{14}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{q_{35}}{q_{34}} = \frac{1}{2} \quad \text{ir} \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{2},$$

tai imame $k^* = 1$, t. y. vektorių β_1 keičiame vektoriumi β_4 . Tuo būdu gauname naują bazę $\beta_4, \beta_2, \beta_3$ ir bazinį sprendinį $(0, 5, 0, 2, 0, 0)$. Sudarome naują lentelę

	γ	Bazinis sprendinys	1	5	6
4	-10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
2	6	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$-\frac{14}{3}$
3	-5	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
		10	2	9	-33
			3	11	-7
			1	2	26

Paskutinėje eilutėje yra teigiami skaičiai. Vadinasi, taškas (0, 5, 0, 2, 0, 0) yra duotos funkcijos minimumo taškas, o $\min f = 6 \cdot 5 - 10 \cdot 2 = 10$.

Jeigu šios lentelės paskutinėje eilutėje būtų neigiamų skaičių, tai sprendimą reikėtų teisti.

§101. Dualumas. Dualumo teorema

Tarkime, kad duotas tiesinio programavimo uždavinys: *reikia rasti tiesinės funkcijos*

$$f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \langle \gamma, x \rangle$$

maksimumo tašką tiesinių nelygybių sistemos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, \dots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (T)$$

sprendinių aibėje.

Šiam uždaviniui *duali uždaviniu* vadinamas šitoks tiesinio programavimo uždavinys: *reikia rasti tiesinės funkcijos*

$$f_1(y_1, \dots, y_m) = f_1(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i = \langle \beta, y \rangle$$

minimumo tašką tiesinių nelygybių sistemos

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j=1, \dots, n), \quad y_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (D)$$

sprendinių aibėje.

Nesunku pastebėti, kad dualaus uždavinio (D) tiesinių nelygybių sistemos koeficientų matrica yra tiesioginio uždavinio (T) tiesinių nelygybių sistemos koeficientų matricos transponuota matrica. Funkcijos $f_1(y)$ koeficientai yra tiesioginio uždavinio nelygybių dešinėsios pusės $b_1, \dots, b_m$, o nelygybių

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j=1, \dots, n)$ dešinėsios pusės yra tiesioginio uždavinio (T) tiesinės funkcijos $f(x)$ koeficientai.

Pavyzdys. Sudaryti dualų tiesinio programavimo uždavinį visai nesunku.

Sakykime, reikia rasti tiesinės funkcijos $f = 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 8x_4$ maksimumo tašką nelygybių sistemos

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 5,$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 7,$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 6,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

sprendinių aibėje.

Sudarykite jam dualų uždavinį.

Kadangi $m=3$, $b_1=5$, $b_2=7$, $b_3=6$, tai dualus uždavinys yra šitoks: reikia rasti tiesinės funkcijos $f_1=5y_1+7y_2+6y_3$ minimumo tašką tiesinių nelygybių sistemos

$$\begin{aligned}y_1+3y_2+4y_3 &\geq 2, \\ -y_1+y_2+2y_3 &\geq -3, \\ 3y_1-y_2-3y_3 &\geq -6, \\ -2y_1+y_2-y_3 &\geq 8, \\ y_i &\geq 0 \quad (i=1, 2, 3)\end{aligned}$$

sprendinių aibėje.

Abu tiesinio programavimo uždaviniai, tiesioginis ir jam dualus, glaudžiai susiję. Jų ryšį nurodo šitokia teorema (pateikiama be įrodymo).

Dualumo teorema. *Jeigu bent vienas iš uždavinių (T) ar (D) turi sprendinį, tai ir kitas taip pat turi sprendinį. Be to, jeigu $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ yra tiesioginio uždavinio (T) kuris nors sprendinys, o $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m$ yra jam dualaus uždavinio (D) kuris nors sprendinys, tai*

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f_1(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m).$$

Taigi teorema teigia: arba abu uždaviniai (T) ir (D) turi sprendinius, arba nė vienas iš jų neturi sprendinio; be to, abiejų funkcijų ekstremumų reikšmės yra lygios, t. y. funkcijos $f(x)$ maksimumas atitinkamoje srityje lygus funkcijos $f_1(y)$ minimumui.

Uždaviniai

Išspręskite tiesinio programavimo uždavinius simplekso metodu, neįvesdami papildomų kintamųjų.

12. Raskite funkcijos $f=4x_1-5x_2+6x_3-8x_4+6x_5$ minimumą ir minimumo tašką sistemos

$$\begin{aligned}x_1+3x_2-x_4 &= 4, \\ -2x_2-x_3+5x_4 &= -1, \\ 6x_2-3x_4+x_5 &= 3, \\ x_i &\geq 0 \quad (i=1, \dots, 5)\end{aligned}$$

sprendinių aibėje.

13. Raskite funkcijos $f=4x_1+6x_2-5x_3-7x_4+8x_5-2x_6$ minimumą ir minimumo tašką sistemos

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3-4x_4+x_5-x_6 &= 5, \\ x_1-x_2+x_3+3x_4-x_5+3x_6 &= 6, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-x_4+2x_5-4x_6 &= 12, \\ x_i &\geq 0 \quad (i=1, \dots, 6)\end{aligned}$$

sprendinių aibėje.

14. Raskite funkcijos $f=3x_1-4x_2+20x_3-9x_4-10x_5+4x_6$ maksimumą ir maksimumo tašką sistemos

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = -2,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 3,$$

$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 10,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, 6)$$

sprendinių aibėje.

Išspręskite tiesinio programavimo uždavinius.

15. Raskite funkcijos $f=4x_1-6x_2+11x_3$ minimumą ir minimumo tašką nelygybių sistemos

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 23,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 12,$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

sprendinių aibėje.

16. Raskite funkcijos $f=9x_1+20x_2+8x_3+17x_4$ minimumą ir minimumo tašką nelygybių sistemos

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 55,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 61,$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 87,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

sprendinių aibėje.

17. Raskite funkcijos $f=x_1+2x_2-5x_3+4x_4$ maksimumą ir maksimumo tašką nelygybių sistemos

$$-6x_1 + x_2 + 5x_3 + 9x_4 \geq -2,$$

$$3x_1 + 3x_3 - x_2 + x_4 \leq 10,$$

$$-8x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 7x_4 \geq 100,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

sprendinių aibėje.

18. Raskite funkcijos $f=23x_1+14x_2-27x_3+45x_4$ minimumą ir minimumo tašką nelygybių sistemos

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \geq -16,$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 \leq 15,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 25,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

sprendinių aibėje.

Grupės

§102. Grupė ir jos pogrupiai

Antrajame skyriuje buvo pateiktas algebrinės struktūros, vadinamos grupe, apibrėžimas. Buvo išnagrinėtos grupių paprasčiausios savybės, apibrėžti grupių izomorfizmai. Grupių pavyzdžių buvo pateikta ir kituose skyriuose – tai vieneto n -ojo laipsnio šaknų grupė V_n , n -ojo laipsnio keitinių grupė, n -osios eilės reguliariųjų matricių grupė, stačiakampių $[m \times n]$ eilės matricių adicinė grupė, erdvės tiesinių operatorių, turinčių atvirkštinius, grupė ir kt.

Priminsime grupės apibrėžimą.

Tarkime, G – netuščia aibė, $$ – algebrinė vidinė binarė operacija (trumpai – operacija) aibėje G , t. y.*

$$G \times G \xrightarrow{*} G.$$

*Algebrinė struktūra $(G, *)$ vadinama grupe, jeigu:*

$$G.1. (\forall a, b, c \in G) \quad (a * b) * c = a * (b * c),$$

$$G.2. (\exists e \in G) (\forall a \in G) \quad a * e = e * a = a,$$

$$G.3. (\forall a \in G) (\exists a' \in G) \quad a * a' = a' * a = e.$$

Jeigu, be to, dar ir

$$G.4. (\forall a, b \in G) \quad a * b = b * a,$$

tai grupė vadinama komutatyvia.

Vietoje „grupė $(G, *)$ “ dažnai sakysime „grupė G “. Kai algebrinė operacija $*$ yra daugyba, grupę vadiname *multiplikacine*, jos neutralųjį elementą žymime e_G ar tiesiog e , elementui a simetrišką žymime $a' = a^{-1}$. Kai operacija yra sudėtis, grupė vadinama *adicine*, jos neutralusis elementas žymimas 0_G arba 0 , ir $a' = -a$. Aibė G vadinama grupės *bazine aibe*.

Pastaba. II skyriuje, norėdami labiau pabrėžti struktūros ir jos bazinės aibės skirtumą, jas žymėjome skirtingomis raidėmis. Kartais patogiau žymėti ta pačia, tik skirtingo šrifto raide: pusjuodžiu šrifto – struktūrą, o kursyvu – tos struktūros bazinę aibę.

Grupės paprasčiausios savybės išnagrinėtos II skyriaus 27 paragrafe, todėl čia jų nekartosime.

Jeigu $G_1 \subset G$ ir struktūra $(G_1, *)$ yra grupė, tai ji vadinama grupės $(G, *)$ pogrupiu.

Kiekviena grupė G turi pogrupius $(\{e\}, *)$ ir G , kurie vadinami *trivialiais*.

Grupė, neturinti netrivialių pogrupių, vadinama *pirmine*.

136 teorema. Aibės G netuščias poaibis A yra grupės G pogrupis tada ir tik tada, kai:

- 1) aibė A uždara grupės G operacijos atžvilgiu,
- 2) aibėje A yra kiekvienam jos elementui atvirkštinis.

Įrodymas. Akivaizdu, kad tos sąlygos yra būtinos. Įrodysime pakankumą. Iš abiejų teoremos sąlygų išplaukia, kad aibei A priklauso grupės operacijos neutralusis elementas. Kartu aibėje A teisingos ir sąlygos G.2 – G.3. Pirmoji sąlyga negali būti neteisinga poaibyje A , jei ji teisinga aibėje G .

Pavyzdžiai. 1. Lyginių sveikųjų skaičių aibė $Z_2 = \{2k \mid k \in Z\}$ yra sveikųjų skaičių adicinės grupės pogrupis (nulis taip pat yra lyginis skaičius).

2. Aibė $(2) = \{2^m \mid m \in Z\}$ yra teigiamų realiųjų skaičių aibės R_+ multiplikacinės grupės pogrupis, nes

$$2^k \cdot 2^l = 2^{k+l}, \quad o \quad (2^k)^{-1} = 2^{-k}.$$

Taigi aibė turi savybes, kurios nurodytos 136 teoremoje.

Grupė $(G, *)$, kurios bazinė aibė G yra baigtinė, vadinama *baigtine grupe*, o jos elementų skaičius žymimas $E(G)$ ir vadinamas *grupės eile*. Priešingu atveju grupė vadinama *begaline*, jos eilė yra ∞ .

Kiekvienas baigtinės grupės pogrupis yra baigtinis, o begalinė grupė gali turėti ir baigtinių, ir begalinių pogrupių. Štai aibės Z poaibis Z_2 yra begalinis. Tuo tarpu $\{-1, 1\}$ yra baigtinis 2-osios eilės grupės $(R_+, \cdot)$ pogrupis.

Uždaviniai

Išsiaiškinkite, ar sudaro grupes.

1. Teigiamų racionaliųjų skaičių aibė su daugyba.
2. Racionaliųjų skaičių aibė su sudėtimi.
3. Kvadratinų n -osios eilės matricų aibė su daugyba.
4. Kvadratinų n -osios eilės matricų, kurių determinantai lygūs 1, aibė su daugyba.
5. Kompleksinių skaičių, turinčių modulį 1, aibė su daugyba.
6. Aibė $\{a^m \mid m \in Z\}$, $a \in R$, $a > 0$, su daugyba.
7. Įstrižaininių n -osios eilės matricų su nelygiais nuliui įstrižainės elementais aibė su daugyba.
8. Įstrižaininių n -osios eilės matricų aibė su sudėtimi.
9. Lyginių n -ojo laipsnio keitinių aibė su daugyba.
10. Primityviųjų n -ojo laipsnio vieneto šaknų aibė su daugyba.

§103. Ciklinės grupės. Elemento eilė, jos savybės

27 paragrafe apibrėžėme grupės elemento sveikuosius „laipsnius“ („kartotinius“). Veiksmas su tokiais laipsniais sutampa su skaičių laipsnių veiksmu.

Tarkime, kad $a \in G$. Iš veiksmų taisyklių išplaukia, kad aibė

$$\{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

tenkina 136 teoremos sąlygas. Todėl struktūra

$$(a) = (\{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}, *)$$

yra grupės $(G, *)$ pogrupis.

($\forall a \in G$) aibė (a) yra grupės G pogrupis.

Grupę (a) vadiname cikline grupe, generuota elemento a .

Jeigu grupėje G yra elementas a , su kuriuo

$$(G, *) = (a),$$

tai grupė G yra ciklinė, o jos elementas a vadinamas ją *generuojančiu elementu*.

Pakartotinai pažymėsime, kad, kai grupė adicinė, visus su cikline grupe susijusius faktus gausime paėmę $a^m = m \cdot a$.

Ciklinės grupės gali būti baigtinės ir begalinės. Jeigu grupė yra baigtinė, tai bet kurio jos elemento visi laipsniai negali būti skirtingi – priešingu atveju grupėje būtų be galo daug elementų.

Mažiausias natūrinis skaičius d , kurį imant

$$a^d = e \tag{9.1}$$

(raide e žymime grupės neutralųjį elementą), vadinamas elemento a eile, žymimas $E(a)$.

Aišku, kad $E(e) = 1$. Aptarsime elemento eilės savybes.

1. *Baigtinės ciklinės grupės generuojančio elemento eilė sutampa su grupės eile, t. y.*

$$\text{jeigu } G = (a), \text{ tai } E(a) = E(G).$$

Irodymas. Iš tikrųjų elemento eilė negali būti didesnė už grupės eilę – priešingu atveju grupėje būtų daugiau skirtingų elemento laipsnių negu grupėje yra elementų. Generuojančio elemento eilė negali būti ir mažesnė už grupės eilę, nes ciklinę grupę sudaro tik to elemento laipsniai. Pakanka skai-

čiuoti tik neneigiamus elemento laipsnius, nes bet kuris neigiamas laipsnis lygus kuriam nors teigiamam laipsniui. Iš tikrųjų iš (9.1) išplaukia

$$a^{-d} = e^{-1} = e.$$

Pažymėję r mažiausią neneigiamą liekaną, gautą s padalijus iš d ($s=dt+r$), turime:

$$a^{-s} = a^{-dt-r} = (a^{-d})^t a^{-r} = e^t a^{-r} = a^{-r}$$

ir

$$a^{-r} = ea^{-r} = a^d a^{-r} = a^{d-r}.$$

Jeigu elemento eilė yra n , tai jo generuotą ciklinę grupę (a) galime taip užrašyti:

$$(a) = \{a^0 = e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

2. Baigtinėje ciklinėje grupėje (a) $a^m = e$ tada ir tik tada, kai m dalijasi iš $E(a)$.

Sąlygos pakankamumas (kad $a^{dt} = e$) akivaizdus. Įrodydami būtinumą, tarkime priešingai: $m=dt+r$, $0 < r < m$. Tuomet

$$e = a^m = a^{dt+r} = (a^d)^t a^r = e^t a^r = ea^r = a^r,$$

bet tai prieštarauja elemento a eilės d apibrėžimui. Taigi $r=0$.

3. Baigtinėje ciklinėje grupėje (a) $a^m = a^k$ tada ir tik tada, kai $m-k$ dalijasi iš $E(a)$.

Lygybę $a^m = a^k$ „dauginame“ iš dešinės iš a^{-k} ir gauname $a^{m-k} = e$. Lieka remtis antrąja savybe.

Įrodysime keletą ciklinių grupių savybių.

1. Bet kuri ciklinė grupė yra komutatyvi.

Jeigu grupės generuojantis elementas yra a , tai

$$a^m * a^n = a^{m+n} = a^n * a^m.$$

2. Visos tos pačios eilės baigtinės ciklinės grupės yra izomorfiškos.

Įrodymas. Imkime dvi ciklines grupes (a) ir (b). Funkcija $f: (a) \leftrightarrow (b)$, apibrėžta taisykle $f(a^m) = b^m$, yra izomorfizmas, nes

$$f(a^k * a^s) = f(a^{k+s}) = b^{k+s} = b^k * b^s = f(a^k) * f(a^s).$$

3. Visos begalinės ciklinės grupės yra izomorfiškos.

Bijekciją galima nustatyti ta pačia taisykle kaip ir 2 savybės įrodyme.

4. Ciklinės grupės kiekvienas pogrupis yra ciklinis.

Tarkime, kad ciklinės grupės (a) pogrupyje A mažiausias teigiamas a laipsnis yra $b=a^k$. Toks laipsnis visuomet bus pogrupyje A , nes

$$a^{-n} \in A \Rightarrow (a^{-n})^{-1} \in A \Rightarrow a^n \in A.$$

Jeigu kurio nors pogrupio A elemento a laipsnio rodiklis s nesidalytų iš k , t. y. būtų

$$s = kt + r, \quad 0 < r < k,$$

tai turėtume

$$\begin{aligned} ((a^s \in A) \wedge (a^k \in A)) &\Rightarrow ((a^s \in A) \wedge (a^{kt} \in A)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow ((a^s \in A) \wedge (a^{-kt} \in A)) \Rightarrow a^{s-kt} = a^r \in A, \end{aligned}$$

bet tai prieštarauja skaičiaus k apibrėžimui, nes $r < k$.

Adicinės ciklinės grupės – tai tokios grupės, kurių visi elementai yra vieno elemento a kartotiniai ma . Elemento eilė lygi tokiam mažiausiam teigiamam sveikajam skaičiui d , su kuriuo sandauga da lygi grupės nuliniam elementui. Adicinės ciklinės grupės taip pat turi išvardytas savybes.

Pavyzdys. n -ojo laipsnio vieneto šaknų grupė V_n yra ciklinė, ją generuoja bet kuri primitivioji to laipsnio vieneto šaknis.

Sudarysime visus galimus 12-ojo laipsnio vieneto šaknų grupės V_{12} pogrupius.

Pažymėkime, kaip paprastai, V_{12} elementus ε_k ($k=0, 1, 2, \dots, 11$). Kadangi V_{12} yra ciklinė grupė, tai ir visi jos pogrupiai taip pat cikliniai. Apskaičiuosime V_{12} elementų eiles. Randame:

$$E(\varepsilon_0) = 1,$$

$$E(\varepsilon_6) = 2,$$

$$E(\varepsilon_4) = E(\varepsilon_8) = 3,$$

$$E(\varepsilon_3) = E(\varepsilon_9) = 4,$$

$$E(\varepsilon_2) = E(\varepsilon_{10}) = 6,$$

$$E(\varepsilon_1) = E(\varepsilon_5) = E(\varepsilon_7) = E(\varepsilon_{11}) = 12.$$

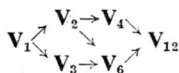
Elementas $\varepsilon_0 = 1$, kurio eilė 1, sudaro vienetinį vieno elemento pogrupį, kuris yra ne kas kita, kaip $V_1 = (\{1\}, \cdot)$.

Elementas ε_6 generuoja 2 elementų pogrupį $\varepsilon_6 = \varepsilon_6, \varepsilon_6^2 = \varepsilon_0 = 1$. Kadangi $\varepsilon_6 = -1$, tai tas pogrupis sutampa su antrojo laipsnio vieneto šaknų grupe $V_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$.

Elementai ε_4 ir ε_8 generuoja vieną ir tą patį pogrupį $\{\varepsilon_0, \varepsilon_4, \varepsilon_8\}$, kuris sutampa su trečiojo laipsnio vieneto šaknų grupe $V_3 = \left(\left\{ 1, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}, \cdot \right)$.

Elementas ε_3 generuoja pogrupį iš 4 elementų: $\varepsilon_3, \varepsilon_3^2 = \varepsilon_6, \varepsilon_3^3 = \varepsilon_9, \varepsilon_3^4 = \varepsilon_0 = 1$. Tą patį pogrupį generuoja ir ε_9 . Tas pogrupis sutampa su $V_4 = (\{-1, 1, i, -i\}, \cdot)$.

Toliau nesunku patikrinti, kad ε_2 ir ε_{10} generuoja V_6 , o visi kiti elementai – primitiviosios šaknys $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}$ – visą grupę V_{12} . Todėl V_{12} turi šiuos pogrupius: $V_1, V_2, V_3, V_4, V_6, V_{12}$. Pažymėję rodykle vieno pogrupio priklausomumą kitam (jo viršaičiui), gausime šitokią schemą:



Visi pogrupiai yra cikliniai.

Uždaviniai

11. Raskite vieneto šaknų grupės V_{10} visus pogrupius.

12. Raskite vieneto šaknų grupės V_{24} pogrupius:

1) (ε_8) , 2) (ε_6) , 3) (ε_4) , 4) (ε_3) , 5) (ε_7) .

13. Raskite trečiojo laipsnio keitinių grupės visus ciklinius pogrupius.

14. Raskite nelygių nuliui kompleksinių skaičių multiplikacinės grupės ciklinius pogrupius:

$$1) (i), \quad 2) \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad 3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right).$$

15. Raskite antrosios eilės kvadratinų reguliariųjų matricų grupės ciklinius pogrupius, kuriuos generuoja matricos:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

16. Raskite sveikųjų skaičių adicinės grupės ciklinius pogrupius:

$$1) (3), \quad 2) (-2), \quad 3) (7), \quad 4) (-4), \\ 5) (4), \quad 6) (m), \quad 7) (-m), \text{ įrodykite, kad } (m) = (-m).$$

§104. Lagranžo ir Kelio teoremos

Tarkime, kad $(G, *)$ yra baigtinė grupė, $E(G) = n$, o $(H, *)$ – jos pogrupis, kurio eilė $E(H) = k$. Trumpumo dėlei rašysime

$$a * b = ab.$$

Sakykime, $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$. Sudarykime aibę

$$Hg = \{h_1 g, h_2 g, \dots, h_k g\} = \{hg \mid h \in H\}; \quad (9.2)$$

čia $g \in G$. Pavadinkime ją pogrupiui $(H, *)$ *gretima klase*, *generuota elemento g*. Gretimos klasės turi šitokias savybes.

1. Kiekvienoje gretimose klasėse Hg yra tiek pat elementų, kiek jų yra pogrupio H bazinėje aibėje H .

Tarę, kad kurie nors du elementai sutampa: $h_i g = h_j g$, gautume (dauginami iš g^{-1}) $h_i = h_j$. Tai prieštarauja aibės apibrėžimui.

2. Jeigu $g \in H$, tai $Hg = H$.

Ši savybė išplaukia iš pogrupio uždarojo operacijos atžvilgiu.

3. Dvi gretimos klasės Hg_1 ir Hg_2 arba sutampa, arba neturi bendrų elementų.

Tarkime, kad šios dvi gretimos klasės turi bendrą elementą c . Kadangi $c \in Hg_2$, tai $\exists h_2 \in H$, su kuriuo $c = h_2 g_2$. Lygybę

$$h_1 g_1 = h_2 g_2$$

„padauginę“ iš kairės iš elementui h_1 „atvirkštinio“ h_1' , gauname

$$g_1 = (h_1' h_2) g_2.$$

Iš čia jau išplaukia, kad kiekvienas klasės Hg_1 elementas priklauso ir klasei Hg_2 , taigi $Hg_1 \subset Hg_2$. Kadangi visai taip pat galima gauti, kad $Hg_2 \subset Hg_1$, tai $Hg_1 = Hg_2$.

Kiekvienas G elementas g priklauso kuriai nors gretimai klasei, būtent $g \in Hg$. Tuo galime šitaip įsitikinti:

$$g = eg \quad \text{ir} \quad e \in H, \quad \text{todėl} \quad g \in Hg.$$

Iš pastarojo fakto ir gretimų klasių savybių išplaukia, jog grupės bazinėje aibėje G yra tokie elementai $g_1, g_2, \dots, g_m$, kad teisinga lygybė

$$G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_m,$$

ir kiekvienos dvi gretimos klasės šioje sumoje neturi bendrų elementų. Pagal kombinatorinę sudėties taisyklę (*nesusikertančių aibių sumos elementų skaičius lygus dėmenų elementų skaičių sumai*) turime:

$$n = \underbrace{k + k + \dots + k}_m = km.$$

Irodėme šitokią teiginį: *baigtinės grupės eilė dalijasi iš jos kiekvieno pogrupio eilės.*

Šis teiginys vadinamas *Lagranžo teorema* žymaus prancūzų matematiko Ž. L. Lagranžo (J.-L. Lagrange, 1736–1813) garbei. Tai viena svarbiausių baigtinių grupių teorijos teoremų, ja remiantis įrodomi ir kai kurie skaičių teorijos faktai.

Iš Lagranžo teoremos išplaukia, kad grupė, kurios eilė yra pirminis skaičius, neturi tiesioginių pogrupių. Vadinasi, *jeigu grupės eilė pirminis skaičius, tai ir grupė – pirminė.*

Kadangi elemento a eilė lygi ciklinės grupės $\langle a \rangle$ eilei, tai iš Lagranžo teoremos išplaukia šitokia išvada: *baigtinės grupės eilė dalijasi iš jos kiekvieno elemento eilės.*

Santykis $E(G)/E(H)$ vadinamas grupės G pogrupio H indeksu.

Kaip žinome, n -ojo laipsnio keitinių grupės yra baigtinės $n!$ eilės grupės. Jų reikšmė baigtinių grupių teorijoje išryškėja iš anglų matematiko A. Kelio (A. Cayley, 1821–1895) vardu pavadintos teoremos.

Kelio teorema. *Kiekviena baigtinė n -osios eilės grupė yra izomorfiška n -ojo laipsnio keitinių grupės pogrupiui.*

Irodymas. Tarkime, kad $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$, a yra koks nors aibės G elementas. Apibrėžkime funkciją

$$f_a: f_a(g_i) = ag_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Kadangi iš lygybės $ag_i = ag_j$ išplauktų $g_i = g_j$, tai funkcija f_a yra bijekcija $G \leftrightarrow G$ su kiekvienu $a \in G$ – n -ojo laipsnio keitiny. Todėl

$$H = \{f_a \mid a \in G\} \subset P_n.$$

Lieka patikrinti, ar aibė H tenkina 136 teoremos sąlygas.

Pažymėkime $f_a \circ f_b = f_{ab}$ keitinių f_b ir f_a sandaugą. Tada $(\forall g \in G) f_{ab}(g) = f_a(bg) = f_a(f_b(g))$ ir $f_{ab} = f_b f_a = f_a \circ f_b$. Todėl aibė H uždara kompozicijos $\circ$ atžvilgiu. Kadangi

$$(\forall g \in G) f_a \circ f_{a'}(g) = f_{aa'}(g) = f_e(g) = eg = g,$$

tai

$$(\forall f_a \in H) (f_a)' = f_{a'} \in H.$$

Pagal 136 teoremą ($H, \circ$) yra keitinių grupės ($P_n, \circ$) pogrupis.

Funkcija $F: (\forall a \in G) F(a) = f_a$ yra bijekcija $G \leftrightarrow H$.

$$(\forall a, b \in G) F(ab) = f_{ab} = f_a \circ f_b = F(a) \circ F(b).$$

Pastarasis teiginys reiškia, kad bijekcija $F: G \leftrightarrow H$ yra grupės G izomorfizmas į n -ojo laipsnio keitinių grupės pogrupį.

Uždaviniai

17. Išreikškite gretimų klasių suma vieneto šaknų grupę V_{10} , paėmę $H = (\epsilon_5)$.

18. Nustatykite, kurios iš vieneto šaknų grupių yra pirminės:

a) V_4 , b) V_5 , c) V_6 , d) V_7 , e) V_{13} , f) V_{15} , g) V_{14} .

19. Raskite grupei V_3 izomorfišką pogrupį 3-ojo laipsnio keitinių grupėje.

20. Raskite grupės V_4 izomorfišką pogrupį 4-ojo laipsnio keitinių grupėje.

105. Normalieji dalikliai. Faktorgrupės

Tarkime, kad G — bet kokia grupė, H — jos pogrupis. Vartosime praeito paragrafo žymėjimus. Aibė Hg , apibrėžta (9.2) lygybe, vadinama *dešiniąja pogrupiui H gretima klase, generuota elemento g* . Panašiai apibrėšime *kairiąją gretimą klase*

$$gH = \{ gh \mid h \in H \} \quad (g \in G).$$

Abi šios klasės sutampa, kai grupė G komutatyvi. Bendruoju atveju įvedama šitokia sąvoka.

Grupės G pogrupis H vadinamas tos grupės normaliuoju dalikliu, jei bet kurio grupės G elemento generuotos dešinėsios ir kairiosios pogrupiui H gretimos klasės sutampa:

$$gH = Hg.$$

137 teorema. *Grupės G pogrupis H yra jos normalusis daliklis tada ir tik tada, kai su visais $h \in H$ ir $g \in G$*

$$ghg^{-1} \in H.$$

Įrodymas. Būtinumas. Iš lygybės $gH = Hg$, teisingos su visais $g \in G$, išplaukia, kad kiekvienam pogrupio elementui h galima rasti tame pogrupyje tokį elementą h' , su kuriuo $gh = h'g$. Taigi

$$h' = ghg^{-1} \in H$$

su visais $g \in G$, $h \in H$. Sąlygos būtinumas įrodytas.

Pakankamumas. Iš priklausomybės $ghg^{-1} \in H$, teisingos su visais $g \in G$, $h \in H$, išplaukia, kad $ghg^{-1} = h'$; čia h' — tam tikras H elementas, t. y. $gh = h'g$ ir $gH \subset Hg$. Analogiškai galima įrodyti, kad $Hg \subset gH$. Įrodėme ir sąlygos pakankamumą. Teorema įrodyta.

Toliau laikysime, kad H yra grupės G normalusis daliklis. Kadangi $gH = Hg$, tai kairiāsias ir dešiniāsias klases vadinsime tiesiog *gretimomis klasėmis* ir žymėsime vienodai: H_g . Įrodysime normaliajam dalikliui gretimų klasių keletą savybių.

138 teorema. *Dvi gretimios klasės arba sutampa, arba neturi bendrų elementų.*

Ši teorema įrodoma visiškai taip pat kaip ir praeitame paragrafe pateikta gretimų klasių 3 savybė.

Iš teoremos išplaukia šitokia išvada.

$H_a = H_b$, tada ir tik tada, kai $b \in H_a$ (arba $a \in H_b$).

Kadangi $a \in H_a$ ir $H_a = H_b$, tai iš čia išplaukia $a \in H_b$ – sąlygos būtinumas. Jeigu $a \in H_b$, tai pagal 138 teoremą $H_a = H_b$, nes $a \in H_a$. Taigi sąlyga pakankama.

Atskiras tos išvados atvejis yra šitoks: *tada ir tik tada $H_a = H$, kai $a \in H$.*

Pagal 138 teoremą sumoje

$$G = \bigcup_{g \in G} H_g$$

sugrupavę vienodus dėmenis, gausime išraišką

$$G = \cup H_g,$$

kurioje jau nebus vienodų dėmenų.

Aibę

$$G/H = \{ H_g \mid g \in G \}$$

vadiname *aibės G faktoraibe pagal normalųjį daliklį H .*

Apibrėžkime faktoraibėje algebrinę operaciją $\otimes$ šitaip:

$$H_a \otimes H_b = H_{a*b}.$$

Sutrumpintai rašysime:

$$H_a H_b = H_{ab}.$$

139 teorema. *Algebrinė struktūra $(G/H, \otimes)$ yra grupė. Jeigu G yra komutatyvi, tai ir $(G/H, \otimes)$ komutatyvi.*

Įrodymas. Patikrinsime, ar ši struktūra turi grupės apibrėžime nurodytas savybes G.1–G.3.

G.1. Asociatyvumas išplaukia iš grupės G operacijos asociatyvumo: $(\forall a, b, c \in G) (H_a H_b) H_c = H_a (H_b H_c)$, nes $(ab)c = a(bc)$.

G.2. Neutralusis elementas yra gretima klasė $H_e = H$.

G.3. Nesunku patikrinti, kad klasei H_a simetriškas elementas operacijos atžvilgiu yra klasė $H_{a^{-1}}$ ($aa^{-1} = e$).

G.4. Operacijos $\otimes$ komutatyvumas trivialiai išplaukia iš grupės G komutatyvumo.

Grupė $(G/H, \otimes)$ vadinama grupės G faktorgroupe pagal pogrūpį H ; žymima G/H .

140 teorema. *Ciklinių grupių faktorgrupės yra ciklinės.*

Įrodymas. Sakykime, $G=(g)$, jos pogrūpis $H=(g^k)$. Grupės G elemento g^r gretima klasė H atžvilgiu yra

$$Hg^r = (Hg)^r,$$

t. y. faktorgrupė G/H sudaryta iš klasės Hg laipsnių, taigi ji yra ciklinė. Teorema įrodyta.

Pavyzdžiai. 1. Patikrinsime, ar trečiojo laipsnio keitinių grupėje σ_3 pogrūpis $H = \{(I, (1, 2, 3), (1, 3, 2)), \cdot\}$ yra normalusis daliklis ($I = (1) = (1)(2)(3)$).

Grupė σ_3 turi 6 elementus – be išvardytųjų, dar keitinius $(1, 2), (1, 3), (2, 3)$. Kadangi iš $g \in H$ visada išplaukia $gH = H$, tai, norint patikrinti sąlygą $Hg = gH$, užtenka apskaičiuoti gretimas klases tų elementų, kurie nepriklauso pogrūpiui H :

$$\begin{aligned} (1, 2)H &= (1, 2)\{(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\} = \\ &= \{(1, 2)(1), (1, 2)(1, 2, 3), (1, 2)(1, 3, 2)\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(1, 2) &= \{(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}(1, 2) = \\ &= \{(1)(1, 2), (1, 2, 3)(1, 2), (1, 3, 2)(1, 2)\} = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}. \end{aligned}$$

Taigi

$$(1, 2)H = H(1, 2).$$

Panašiai galima įsitikinti, kad sutampa ir kitos gretimos klasės:

$$(1, 3)H = H(1, 3) \quad \text{ir} \quad (2, 3)H = H(2, 3).$$

Matome, kad H yra normalusis daliklis.

Faktorgrupė σ_3/H turi 2 klases k_1 ir k_2 , nes H indeksas grupėje σ_3 lygus 2. Klasė $k_1 = \{(1), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$, $k_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Šioje 2 elementų faktorgrupėje teisingi šitokie sąryšiai:

$$k_1^2 = k_1^{-1} = k_2^2 = k_2^{-1} = k_1, \quad k_1 k_2 = k_2.$$

2. Patikrinsime, ar toje pačioje grupėje σ_3 pogrūpis $\sigma_2 = \{(1), (1, 2)\}$ yra normalusis daliklis. Turime:

$$(1, 3)\sigma_2 = (1, 3)\{(1), (1, 2)\} = \{(1, 3)(1), (1, 3)(1, 2)\} = \{(1, 3)(1, 3, 2)\}.$$

$$\sigma_2(1, 3) = \{(1), (1, 2)\}(1, 3) = \{(1)(1, 3), (1, 2)(1, 3)\} = \{(1, 3)(1, 2, 3)\}.$$

Matome, kad $(1, 3)\sigma_2 \neq \sigma_2(1, 3)$. Vadinas, σ_2 nėra normalusis daliklis.

Uždaviniai

21. Sudarykite nurodytų grupių faktorgrupes pagal nurodytą pogrūpį H (raskite visus faktorgrupės elementus, sudarykite daugybos lentelę):

- 1) $V_{12}, H = \langle \epsilon_3 \rangle,$
- 2) $V_{10}, H = \langle \epsilon_2 \rangle,$
- 3) $V_{15}, H = \langle \epsilon_5 \rangle,$
- 4) $V_{15}, H = \langle \epsilon_3 \rangle,$
- 5) $V_{18}, H = \langle \epsilon_6 \rangle.$

§106. Grupių homomorfizmai

Su grupių izomorfizmais ir kai kuriomis jų savybėmis susipažinome II skyriuje. Čia nagrinėsime grupių homomorfizmus.

Tarkime, kad $G=(G, *)$ ir $G_1=(G_1, *_1)$ yra grupės. Funkcija $f: G \rightarrow G_1$, turinti savybę

$$(\forall a, b \in G) \quad f(a * b) = f(a) *_1 f(b), \quad (9.3)$$

vadinama grupės G :

1) homomorfizmu grupėje G_1 , jei $f(G) \neq G_1$,

2) homomorfizmu į grupę G_1 , jei $f(G) = G_1$.

Abipus vienareikšmis homomorfizmas vadinamas izomorfizmu (atitinkamai grupėje arba į grupę).

Pavyzdžiai. 1. Apibrėžkime $f: V_6 \rightarrow V_3$ taisykle

$$f(a) = a^2.$$

Akiivaizdu, kad bet kurios 6-ojo laipsnio vieneto šaknies kvadratas yra kubinė šaknis. Lengva patikrinti, kad šaknys atvaizduojamos šitaip:

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_0^{(6)} \searrow & \varepsilon_1^{(6)} \searrow & \varepsilon_2^{(6)} \searrow \\ & \varepsilon_0^{(3)} & \varepsilon_1^{(3)} \\ \varepsilon_3^{(6)} \nearrow & \varepsilon_4^{(6)} \nearrow & \varepsilon_5^{(6)} \nearrow \end{array}$$

Nesunkiai patikriname ir (9.3) sąlygą:

$$f(ab) = (ab)^2 = a^2 b^2 = f(a) f(b).$$

Todėl funkcija – homomorfizmas grupės V_6 į grupę V_3 .

2. Apibrėšime multiplikacinės nelygių nuliui kompleksinių skaičių grupės $\mathbf{K}^*$ ir multiplikacinės realiųjų teigiamų skaičių grupės $\mathbf{R}_+$ surjekciją taisykle

$$f(\alpha) = |\alpha|.$$

Kadangi $|\alpha\beta| = |\alpha| |\beta|$, tai $f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$. Apibrėžtoji funkcija yra grupės $\mathbf{K}^*$ homomorfizmas į grupę $\mathbf{R}_+$.

3. Funkcija $f: \mathbf{Z} \rightarrow \{0\}$, apibrėžta taisykle

$$(\forall k \in \mathbf{Z}) \quad f(k) = 0,$$

yra grupės $(\mathbf{Z}, +)$ homomorfizmas į grupę $(\{0\}, +)$.

141 teorema. Grupės G homomorfinis vaizdas $f(G)$ yra grupė – grupės G_1 pogrupis.

[Irodymas. Tarkime, kad $f: G \rightarrow G_1$ yra homomorfizmas, $f(G)$ yra grupės G vaizdas. Įrodysime, kad aibė $f(G)$ yra G_1 pogrupis. Kadangi $(\forall a_1, b_1 \in f(G))$ $(\exists a, b \in G) f(a) = a_1, f(b) = b_1$ ir $f(ab) = f(a)f(b) = a_1 b_1$, tai $a_1 b_1 \in f(G)$. Matome, kad $f(G)$ uždara operacijos (kurią taip pat vadiname daugyba ir atitinkamai žymime) atžvilgiu. Taip pat paprasta patikrinti, kad $e_1 = f(e)$ yra operacijos neutralusis elementas aibėje $f(G)$.

Patikrinsime, ar kiekvienas aibės $f(G)$ elementas turi aibėje $f(G)$ jam simetrišką elementą. Iš tikrųjų, kadangi $a \in G \Rightarrow a' \in G$ (su kuriuo $aa' = a' = e$), tai

$$e_1 = f(e) = f(aa') = f(a)f(a') = a_1 f(a').$$

Analogiškai įrodoma, kad $e_1 = f(a')a_1$. Taigi $a_1' = f(a') \in f(G)$.

Teorema įrodyta. Kartu įsitikinome, kad neutraliojo elemento vaizdas yra neutralusis elementas ir elementui simetriško elemento vaizdas yra elemento vaizdai simetriškas elementas.

Jeigu homomorfizmas nėra abipus vienareikšmis, tai grupės vaizdo $f(G)$ elementas turės ne vieną, o daugiau pirmvaizdžių (originalų). Kad galėtume išsiaiškinti pirmvaizdžių struktūrą, įvesime *branduolio* sąvoką.

Homomorfizmo $f: G \rightarrow G_1$ branduoliu $\text{Ker } f$ vadiname aibę tų G elementų, kurių vaizdas yra grupės G_1 neutralusis elementas e_1 :

$$\text{Ker } f = \{ a \mid a \in G, f(a) = e_1 \}.$$

142 teorema. *Homomorfizmo $f: G \rightarrow G_1$ branduolys yra grupės G normalusis daliklis.*

Įrodymas. Reikia patikrinti, ar aibė $\text{Ker } f$ tenkina 136 ir 137 teoremų sąlygas. Pažymėkime $M = \text{Ker } f$.

1. Kai $a, b \in M$, tai $f(a) = f(b) = e_1$. Todėl ir

$$f(ab) = f(a)f(b) = e_1 e_1 = e_1.$$

Tai reiškia, kad $ab \in M$.

2. Jeigu $a \in M$, tai $f(a) = e_1$. Bet

$$f(aa') = f(e) = e_1 \quad \text{ir} \quad f(aa') = f(a)f(a'),$$

todėl ir $f(a') = e_1$. Taigi $a' \in M$.

Matome, kad branduolys M yra grupės G pogrupis.

3. Turime: ($\forall g \in G, a \in M$)

$$f(gag') = f(g)f(a)f(g') = f(g)e_1f(g') = f(gg') = f(e) = e_1.$$

Todėl $gag' \in M$. Teorema įrodyta.

Adicinės grupės homomorfizmo branduolys – aibė tų G elementų, kurių vaizdai – grupės G_1 nulinis elementas.

Nagrinėtuose pavyzdžiuose homomorfizmo branduoliai atitinkamai buvo $\{\varepsilon_0^{(6)}, \varepsilon_3^{(6)}\} = V_2$, skaičius 0 ir paskutiniame pavyzdyje – visa grupė Z .

143 teorema. *Jeigu $f: G \rightarrow G_1$ yra homomorfizmas, tai grupės G elementai turi tą patį vaizdą tada ir tik tada, kai jie priklauso tai pačiai pogrupiui $M = \text{Ker } f$ gretimai klasei.*

Įrodymas. Jeigu $f(a) = f(b)$, tai $f(ab^{-1}) = e_1$, t. y. $ab^{-1} \in M$. Iš čia išplaukia, kad $a = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b \in Mb$. Tačiau ir $b \in Mb$. Sąlygos būtinumas įrodytas.

Jeigu $a, b \in Mb$, tai aibėje M egzistuoja tokie elementai m_1 ir m_2 , su kuriais $m_1 a = m_2 b$. Iš čia

$$a = m_1^{-1} m_2 b \Rightarrow f(a) = f(m_1^{-1}) f(m_2) f(b) = e_1 e_1 f(b) = f(b).$$

Irodėme ir sąlygos pakankumą.

Dabar jau galime įrodyti pagrindinę šio paragrafo teoremą, kartais vadinamą grupių homomorfizmo teorema.

144 teorema. Jeigu $f: G \rightarrow G_1$ yra homomorfizmas, tai grupės G faktorgrupė pagal homomorfizmo branduolį $\text{Ker } f$ yra izomorfiška grupės G homomorfiškam vaizdui $f(G)$:

$$G/\text{Ker } f \cong f(G).$$

Irodymas. Tarkime, kad $a_1 \in f(G)$ ir $b_1 \in f(G)$. Pažymėkime $N_{a_1} = \{a \in G | f(a) = a_1\}$, $N_{b_1} = \{b \in G | f(b) = b_1\}$. Apibrėžkime funkciją $F: f(G) \rightarrow G/\text{Ker } f$ šitaip: $F(a_1) = N_{a_1}$.

Iš 143 teoremos išplaukia, kad ši funkcija yra bijekcija. Patikrinsime, ar ji turi izomorfizmo savybę.

Aišku, kad

$$N_{a_1} = M_a \quad \text{ir} \quad N_{b_1} = M_b;$$

čia a ir b – tokie elementai, su kuriais $f(a) = a_1$ ir $f(b) = b_1$. Todėl

$$F(a_1 b_1) = N_{a_1 b_1} = M_{ab} = M_a \cdot M_b = N_{a_1} N_{b_1} = F(a_1) F(b_1).$$

Teorema įrodyta.

Remiantis 143 ir 144 teoremomis, galima apibrėžti konkretų homomorfizmą. Randame kokį nors grupės G normalųjį daliklį H (aibę tų G elementų, kurių vaizdas yra grupės G_1 neutralusis elementas). Gretimos klasės H_g kiekvieno elemento b funkcijos reikšmę apibrėžiame $f(b) = f(g)$. Lieka tik taip parinkti reikšmes $f(g)$, kad funkcija turėtų apibrėžime nurodytas savybes.

Tuo atveju, kai G ir G_1 baigtinės, grupės G homomorfizmą grupėje G_1 galima apibrėžti palyginti nesunkiai (ypač kai grupės ciklinės). Jeigu grupės G normalusis daliklis H , kurį norima laikyti homomorfizmo branduoliu, parinktas, tai tada grupėje G_1 reikia parinkti tokį pogrupį G' , kad būtų

$$\frac{E(G)}{E(H)} = E(G'),$$

o grupės G/H elementų (gretimų klasių) skaičius lygus pogrupio G' eilei. Jeigu tokio pogrupio nėra, tai H negali būti jokio homomorfizmo branduolys. Jeigu toks pogrupis G' yra, tai tereikia apibrėžti izomorfizmą

$$G/H \leftrightarrow G',$$

kuris ir indukuos homomorfizmą.

Pavyzdys. Apibrėšime grupės V_{24} homomorfizmą grupėje V_{18} . Kad atskirtume, 24-ojo laipsnio vieneto šaknis žymėsime raidėmis ε , o 18-ojo laipsnio – η .

Jei imtume homomorfizmo branduoliu 8-ojo laipsnio vieneto šaknų grupę

$$H = (\{\varepsilon_0, \varepsilon_3, \varepsilon_6, \varepsilon_9, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{15}, \varepsilon_{18}, \varepsilon_{21}\}, \cdot),$$

tai G' reikėtų imti grupės V_{18} 3-osios eilės pogrupį, nes $E(V_{34}): E(H)=3$. Toks yra

$$V_3 = (\{ \eta_0, \eta_6, \eta_{12} \}, \cdot).$$

Todėl grupės V_{34} homomorfizmas grupėje V_{18} yra grupės V_{34} homomorfizmas į grupę V_3 , apibrėžtas formule

$$f(\varepsilon_{3k+r}) = \eta_{6r}$$

($k=0, 1, \dots, 8, r=0, 1, 2$).

Kad ši funkcija yra homomorfizmas, lengva patikrinti:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_{3k_1+r_1} \cdot \varepsilon_{3k_2+r_2}) &= f(\varepsilon_{3(k_1+k_2)+r_1+r_2}) = \\ &= \eta_{6(r_1+r_2)} = \eta_{6r_1} \cdot \eta_{6r_2} = f(\varepsilon_{3k_1+r_1}) f(\varepsilon_{3k_2+r_2}), \end{aligned}$$

$$\text{Ker } f = \{ \varepsilon_s \mid f(\varepsilon_s) = \eta_{10} \} = \{ \varepsilon_0, \varepsilon_3, \varepsilon_6, \dots, \varepsilon_{21} \}.$$

Nėra tokio homomorfizmo f , kad būtų $f(V_{34}) = V_{18}$. Galima apibrėžti tik grupės V_{34} homomorfizmus į grupės V_{18} pogrupius V_1, V_2, V_3, V_6 .

Uždaviniai

22. Patikrinkite, ar funkcija $f: V_{15} \rightarrow V_{10}$, apibrėžta formule $f(\varepsilon_{3k+r}) = \eta_{2r}$ ($k=0, 1, \dots, 4, r=0, 1, 2$), yra 15-ojo laipsnio vieneto šaknų ε_i grupės homomorfizmas 10-ojo laipsnio vieneto šaknų η_j grupėje. Raskite homomorfizmo branduolį, gretimas klases pagal jį, taip pat kiekvieno elemento iš $f(V_{15})$ visą pirmvaizdį.

23. Apibrėžkite grupės V_{20} homomorfizmą grupėje V_{12} taip, kad jo branduolys būtų lygus V_8 . Raskite grupės V_{20} vaizdą, vaizdo elementų pilnus pirmvaizdžius.

24. Išsiaiškinkite, ar galima apibrėžti grupės V_{18} homomorfizmus į grupes:

- 1) V_2 , 2) V_3 , 3) V_4 , 4) V_5 , 5) V_6 .

Apibrėžkite juos, raskite jų branduolius.

Uždavinių atsakymai ir nurodymai

I skyrius

1. 1, 2, 6, 7. 2. Teiginių 2, 3, 4, 5 teisingumo reikšmė 1, kitų – 0. 3. 1) teisingi teiginiai $P(2), P(5), P(-3)$; 2) visi neteisingi, 3) teisingi teiginiai $P(2), P(5)$. 4. 1) $(-2 - \sqrt{19}, -2 + \sqrt{19})$, 2) $(\pi/6, 5\pi/6)$, 3) $(0, 10)$. 5. 1) neiginys „lygtis $3x^2 - 4x - 5 = 0$ neturi sprendinių“, jo teisingumo reikšmė yra 0; 2) neiginys „į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą“, jo teisingumo reikšmė yra 1; 3) neiginys „nėra tokios α reikšmės, kad būtų $\cos 2\alpha \neq \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ “, jo teisingumo reikšmė yra 1; 4) $4^2 > 2^4$, jo teisingumo reikšmė yra 0; 5) neiginys „yra tokia kvadratinė lygtis, kurios šaknų suma lygi jos laisvajam nariui“, jo teisingumo reikšmė yra 1. 6. 1) $p \vee q \equiv „3^2 - 4 \cdot 5 > 0$ arba lygtis $x^2 - 3x + 5 = 0$ turi sprendinį“, $\tau(p \vee q) = 1, p \wedge q \equiv „3^2 - 4 \cdot 5 > 0$ ir lygtis $x^2 - 3x + 5 = 0$ turi sprendinį“, $\tau(p \wedge q) = 0, p \Rightarrow q \equiv „jei $3^2 - 4 \cdot 5 > 0$, tai lygtis $x^2 - 3x + 5 = 0$ turi sprendinį“, $\tau(p \Rightarrow q) = 1, q \Rightarrow p \equiv „jei lygtis $x^2 - 3x + 5 = 0$ turi sprendinį, tai $3^2 - 4 \cdot 5 > 0$ “, $\tau(q \Rightarrow p) = 0, p \Leftrightarrow q \equiv „tada ir tik tada $3^2 - 4 \cdot 5 > 0$, kai lygtis $x^2 - 3x + 5 = 0$ turi sprendinį“, $\tau(p \Leftrightarrow q) = 0$; 2) $p \vee q \equiv „į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą arba ne apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą“, $\tau(p \vee q) = 1, p \wedge q \equiv „į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą ir ne apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą“, $\tau(p \wedge q) = 0, p \Rightarrow q \equiv „jei į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą, tai ne apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą“, $\tau(p \Rightarrow q) = 0, q \Rightarrow p \equiv „jei ne apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą, tai į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą“, $\tau(q \Rightarrow p) = 1, p \Leftrightarrow q \equiv „tada ir tik tada į kiekvieną trikampį galima įbrėžti apskritimą, kai ne apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą“, $\tau(p \Leftrightarrow q) = 0$.$$$$$$$$

7. 1)

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

2)

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$\overline{p \vee r}$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p \vee r})$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

3)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$q \Rightarrow p$	$(\overline{p \Rightarrow q}) \vee (q \Rightarrow p)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1

8. 1) Sudarome abiejų formų teisingumo lenteles:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Kadangi formų $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ir $(p \wedge q) \Rightarrow r$ teisingumo reikšmės sutampa, tai formos yra logiškai ekvivalencijos.

9. Nurodymas. Sudarykite šių formų teisingumo reikšmių lenteles ir įsitikinkite, kad formų teisingumo reikšmės yra vienietai. **10.** 1) tiesioginė $(p \Rightarrow q) \equiv$ „jeigu realiųjų skaičių a ir b sandauga ab teigiama, tai skaičiai a ir b yra vienodų ženklų“, atvirkštinė $(q \Rightarrow p) \equiv$ „jeigu skaičiai a ir b yra vienodų ženklų, tai jų sandauga ab yra teigiama“, priešingoji $(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \equiv$ „jeigu realiųjų skaičių a ir b sandauga ab nėra teigiama, tai skaičiai a ir b nėra vienodų ženklų“, priešingoji atvirkštinei $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) \equiv$ „jeigu skaičiai a ir b nėra vienodų ženklų, tai jų sandauga ab nėra teigiama“. Visos 4 teoremos teisingos. **11.** 1) $p \Leftrightarrow q \equiv$ „tada ir tik tada realiųjų skaičių a ir b sandauga teigiama, kai skaičiai a ir b yra vienodų ženklų“. **13.** 1) $(-\infty, 5/3]$; 2) $\emptyset$; 3) $[10^{-3}, \infty)$. **14.** 1) Formos ekvivalencijos, nes jomis apibrėžtos aibės lygios: $\{2, -1\}$; 2) ekvivalencijos; 3) neekvivalencijos; 4) neekvivalencijos; 5) neekvivalencijos. **18.** 32. **19.** Negali. **20.** $A = B = C = D$. **21.** $\{2, 3, 4\}$; $\emptyset$; $\{2\}$. **22.** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\{2, 4\}$; $\{6\}$. **23.** $\{0\}$; $(\sqrt{2}, \infty) \cup (-\infty, -\sqrt{2})$; $(-\infty, \infty)$; $\{7/6, -1/3\}$. **24.** $\bar{A} = [-10, 3) \cup (5, 10]$; $\bar{B} = (1, 10]$; $\bar{C} = [-10, 1]$; $\bar{D} = [-10, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 5) \cup (5, 10]$. **25.** Visais atvejais $A = \emptyset$, tik 3 atveju $A =$ bet kokia aibė. **26.** $Y = \emptyset$, $X =$ tokia aibė, kad $AX = \emptyset$. **27.** Teisingi. **29.** $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$. **31.** 1) $(B \cap C) \supset A$; 2) $(B \cap C) \subset A$. **32.** 1) $AB \cup AC \cup BC$; 2) $A \setminus B$; 3) $\emptyset$. **34.** 1) kad ir kokie būtų skaičiai x ir y , priklausantys natūrinių skaičių aibei $\mathbb{N}$, egzistuoja toks natūrinis skaičius z , kad $x+y=z$ (trumpiau: dviejų natūrinių skaičių suma yra natūrinis skaičius); 4) kad ir koks būtų natūrinis skaičius n , nėra tokio sveikojamo skaičiaus k , kad būtų teisinga lygybė $2^k = -n$. **35.** $(\forall x, y, z) x \cdot y = z \Rightarrow \Rightarrow y \cdot x = z$. **36.** 4) $(\forall x) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (su bet kuria (realia) x reikšme teisinga lygybė $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$); $(\exists x) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (yra tokia (reali) x reikšmė, su kuria teisinga lygybė $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$); $(\forall x) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (ne su visomis x reikšmėmis teisinga lygybė $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$); $(\exists x) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (nėra tokios (realios) x reikšmės, su kuria būtų teisinga lygybė $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Pastarieji du teiginiai turi teisingumo reikšmę 0, pirmieji du – reikšmę 1. **37.** 1) $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$; 2) $A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, u), (1, v)\}$; 3) $A^2 = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$; 4) $N^2 = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{N}\}$. **39.** 2) $A^3 = \{(\alpha, \alpha, \alpha), (\alpha, \alpha, \beta), (\alpha, \beta, \alpha), (\alpha, \beta, \beta), (\beta, \alpha, \alpha), (\beta, \alpha, \beta), (\beta, \beta, \alpha), (\beta, \beta, \beta)\}$; 3) $N^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{N}\}$. **40.** 1) $\{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$; 2) $\{(1, x), (1, y), (2, x)\}$; 3) $\{(1, x), (1, y), (2, y)\}$; 4) $\{(1, x), (2, x), (2, y)\}$; 5) $\{(1, y), (2, x), (2, y)\}$; 6) $\{(1, x), (1, y)\}$; 7) $\{(1, x), (2, x)\}$; 8) $\{(1, x), (2, y)\}$; 9) $\{(1, y), (2, x)\}$; 10) $\{(1, y), (2, y)\}$; 11) $\{(2, x), (2, y)\}$; 12) $\{(1, x)\}$; 13) $\{(1, y)\}$; 14) $\{(2, x)\}$; 15) $\{(2, y)\}$; 16) $\emptyset$. **42.** 3) surjekcija ir injekcija, taigi bijekcija; 4) surjekcija. **43.** 6. **44.** Vienas iš būdų: jei $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{Z}$, tai $n = 2k \Leftrightarrow z = k$, $n = 2k + 1 \Leftrightarrow z = -k$. **45.** $\text{Card } A = 31$, $\text{Card } B = \text{Card } C = 0$, $\text{Card } D = \text{Card } E = \text{Card } F = \text{Card } G = \text{Card } N$. **46.** Reikia taip parinkti aibes, kad būtų: 1) $B \subset A$, 2) $AB = \emptyset$, 3) $AB = \emptyset$, 4) vienas iš būdų $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, 5) $A \subset B$, 6) $A = B = \{a\}$, 7) $A \subset B$. **47.** Simetrinių sąryšių nėra, tranzityvūs visi, išskyrus 1, refleksyvių nėra. **48.** Faktoriaibė $\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4\}$; čia $A_i = \{z | z = 5k + i, k \in \mathbb{Z}\}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. **49.** Sukeisti visais galimais būdais aibės elementus. **50.** 1) 20; 2) 252; 3) 66; 4) 25. **51.** 1) 20; 2) 3024; 3) 30 240; 4) 24. **52.** 1) 6; 2) 120; 3) 40 320; 4) 3 628 800. **53.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **54.** $(n-m)(n-m+1)$. **55.** 256. **56.** $(8!)^2$. **57.** 120. **58.** 2730. **59.** 294. **60.** $6 + 6^2 + \dots + 6^8$. **61.** 5000. **62.** 1) 25; 2) 32; 3) 64; 4) 100 000. **63.** 1) 105; 2) 1120; 3) 90; 4) 24. **64.** 1) 6; 2) 15; 3) 84; 4) 715. **65.** $9 \cdot 10^{11}$. **66.** 64. **67.** 64. **68.** 220. **69.** 15. **70.** 237.

II skyrius

1. 1) galima; 2) galima atlikti tik sudėtį; 3) galima; 4) galima; 5) galima; 6) negalima. **2.** 1) galima; 2) galima atlikti tik daugybą; 3) galima atlikti tik sudėtį; 4) galima; 5) galima atlikti tik daugybą; 6) galima. **3.** 1) uždaras; 2) uždaras; 3) uždaras; 4) uždaras; 5) uždaras; 6) uždaras. **4.** 1) uždaras; 2) uždaras; 3) uždaras; 4) uždaras; 5) neuždaras; 6) uždaras. **5.** 3)

	R_0	R_{60}	R_{120}	R_{180}	R_{240}	R_{300}
R_0	R_0	R_{60}	R_{120}	R_{180}	R_{240}	R_{300}
R_{60}	R_{60}	R_{120}	R_{180}	R_{240}	R_{300}	R_0
R_{120}	R_{120}	R_{180}	R_{240}	R_{300}	R_0	R_{60}
R_{180}	R_{180}	R_{240}	R_{300}	R_0	R_{60}	R_{120}
R_{240}	R_{240}	R_{300}	R_0	R_{60}	R_{120}	R_{180}
R_{300}	R_{300}	R_0	R_{60}	R_{120}	R_{180}	R_{240}

6. Sudėtis ir daugyba komutatyvios ir asociatyvios bei tarpusavyje distributyvios. Sudėties neutralusis elementas – 0, kiekvienas skaičius $m+n\sqrt{2}$ turi priešingą elementą $-m-n\sqrt{2}$, taigi egzistuoja sudėčiai priešingas (atvirkštinis) veiksmas – atimtis. Daugybės neutralusis elementas – 1. 7. Be praeitime uždavinyje minėtų savybių, čia kiekvienam nenuliniam elementui egzistuoja atvirkštinis. Taigi ir daugybai atvirkštinis veiksmas egzistuoja. 8. „Sudėties“ (+) ir „atimties“ (–) lentelės:

(+)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	(–)	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_0	a_1	a_1	a_0	a_4	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_4	a_0	a_1	a_2	a_2	a_1	a_0	a_4	a_3
a_3	a_3	a_4	a_0	a_1	a_2	a_3	a_3	a_2	a_1	a_0	a_4
a_4	a_4	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

9. Sudėtis komutatyvi ir asociatyvi, turi neutralųjį elementą, egzistuoja jai atvirkštinė operacija. 10. „Daugyba“ komutatyvi, asociatyvi, uždarieji poaibiai: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 3\}$, $\{0, 4\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 1, 5\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{0, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{0, 1, 3, 4\}$, $\{0, 1, 2, 4\}$, $\{0, 1, 3, 5\}$, $\{0, 2, 3, 4\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 11. Operacija komutatyvi ir asociatyvi, jos neutralusis elementas 0 (jei apibrėžti $D(0, 0)=0$). 12. Operacija komutatyvi ir asociatyvi, jos neutralusis elementas 1. 13. Operacija komutatyvi ir asociatyvi, jos neutralusis elementas 0, atvirkštinė operacija egzistuoja. $(3\oplus 5)\oplus(4\oplus 6)\oplus 2=6$, $5\oplus(5\oplus 4\oplus 2)\oplus 6=1$, lygčių sprendiniai atitinkamai 2, 6, 1, 4. 14. Operacija komutatyvi ir asociatyvi, neutralusis elementas – 1, egzistuoja atvirkštinė operacija. Pateiktųjų reiškinių skaičiavimo atsakymai: 6, 4, 2, lygčių sprendiniai: 5, 5, nėra. 15. 2) 5; 3) 5. 31. $1952-504\sqrt{5}$. 32. 1) 3; 2) 4; 3) 14. 33. 45. 34. 1) 0,098; 2) 1,01; 3) 0,97. 35. 1) 1,003; 2) 1,03; 3) 0,92. 36. 1) 1,035; 2) 1,146; 3) 1,006.

III skyrius

9. 1) $-0,487$; $-7,243$; $-13,055$; $-1,144$; 2) $35,217$; $-30,270$; $80,990$; $0,076$; 10. 1) $7+3i$, $-1-7i$, $22+7i$, $\frac{2-23i}{41}$; 2) $-9+3i$, $3-10i$, $46+3i$, $\frac{-2+9i}{17}$; 3) $-\frac{1}{10}+3i$, $\frac{31}{10}-\frac{1}{3}i$, $-\frac{208}{45}-\frac{2}{3}i$, $-\frac{208}{45}-\frac{2}{3}i$, $\frac{120-525i}{488}$; 4) $-2,7+6,39i$; $3,72-7,25i$; $1,2955+4,8622i$; $-\frac{4,5697-2,0979i}{56,8165}$; 5) sandauga lygi $-19\sqrt{6}+2i$. 11. 1) $3(\cos 0 + i \sin 0)$; 2) $3(\cos \pi + i \sin \pi)$; 3) $10(\cos \pi + i \sin \pi)$; 4) $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; 5)

$\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$; 6) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$; 7) $2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$; 8) $2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$; 9) $2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$; 10) $10 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. 12. 1) $2^{-10} (1-i)^{18}$, toliau reikia skaičiuoti pagal binomo formulę; 2) $2^{-18} (1+i)^{27}$; 3) $-71-39\sqrt{3}i$; 4) $4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$. 13. 1) $z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, $z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}$; 2) $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$, $z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$; 3) $z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right)$, $z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right)$; 4) $z_1 = \sqrt[4]{13} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $z_2 = \sqrt[4]{13} (\cos (\alpha + \pi) + i \sin (\alpha + \pi))$; čia α yra mažiausias neneigiamas sistemos

$$\begin{cases} \cos x = \frac{2}{\sqrt{13}}, \\ \sin x = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

sprendinys. 14. 1) $z_k = \cos \frac{\pi + 4k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{6}$, $k=0, 1, 2$; 2) $\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; 4) $z_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 8k\pi}{12} + i \sin \frac{\pi + 8k\pi}{12} \right)$, $k=0, 1, 2$. 15. 1) $z_k = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \right)$, $k=0, 1, 2, 3, 4$; 5) $z_k = \sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{3\pi + 8k\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi + 8k\pi}{12} \right)$, $k=0, 1, 2$. 17. 1) $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; 4) $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8}$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. 18. 1) $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_4, \varepsilon_7, \varepsilon_8, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}$. 19. 1) $\varepsilon_3, \varepsilon_6, \varepsilon_9, \varepsilon_0$, $E(\varepsilon_3)=4$. 20. Lygties $x^9 + 27 = 0$ šaknys yra $\sqrt[9]{3} \varepsilon_k$; čia ε_k yra 9-ojo laipsnio šaknys iš -1 . 21. 1) $x_1 = -\frac{1}{2} (\sqrt{3} - i)$, $x_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + i)$.

IV skyrius

1. $(4, -2)$. 2. $\left(4, \frac{26}{5}\right)$. 3. $\left(\frac{11}{12}, -\frac{63}{10}\right)$. 4. $\left(\frac{76}{51}, -\frac{5}{17}\right)$. 5. $\left(t, \frac{1-4t}{3}\right)$. 6. Nėra sprendinių. 7. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$. 8. $(1, 1, 1)$. 9. Nėra sprendinių. 10. $(1, -1, 0, -2)$. 11. $(0, 3, 0, 1)$. 12. Nėra sprendinių. 13. $(1+2t, t, -2-7t)$. 14. $\left(\frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2}\right)$. 15. $(0, 0, 0)$. 16. $(2t_1 - 3t_2 + 2t_3, t_1, t_2, t_3)$. 17. $(0, 0, 0, 0, 0)$. 22. a) priklausoma; b) priklausoma; c) nepriklausoma; d) nepriklausoma; e) nepriklausoma; f) nepriklausoma. 23. a) sudaro; b) sudaro; c) sudaro; d) nesudaro; e) sudaro; f) sudaro. 24. a) $r=2$; b) $r=2$; c) $r=3$; d) $r=3$; f) $r=2$; g) $r=3$. 25. a) $r=3$; b) $r=3$; c) $r=2$; d) $r=5$. 26. a) kai $\lambda=1$, $r=1$; kai $\lambda \neq 1$, $r=4$; b) kai $\lambda=3$, $r=2$; kai $\lambda \neq 3$, $r=3$. [27. Kai $a \neq -b$, $\left(\frac{a+b^2}{a+b}, \frac{a(b+1)}{a+b}\right)$; kai $a = -b$ ir $b+1 \neq 0$, sprendinių nėra; kai $a = -b = -1$, $(1-t, t)$. 28. Kai $a \neq -b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\left(\frac{a+b}{a}, \frac{a-b}{b}\right)$; kai $a=0$, $(t, -1)$; kai $b=0$, $a \neq 0$, sprendinių nėra; kai $a=b=0$, (t_1, t_2) ; kai

$a = -b \neq 0$, sprendinių nėra. 29. Suderinta su visomis a, b, c reikšmėmis, $\left(\frac{a+b-c}{2}, \frac{a-b+c}{2}, \frac{-a+b+c}{2} \right)$. 30. Kai $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b, a-b-6 \neq 0$, suderinta, apibrėžta; kai $a=b=0$, neapibrėžta; kai $a=b=-3/2$, neapibrėžta; kai $a=b \neq 0$ ir $a=b \neq -3/2$, nesuderinta; kai $a=6, b=0$, neapibrėžta; kai $a \neq b, a \neq 0, b=0$, nesuderinta; kai $a=0, b=-6$ arba $b=2$, neapibrėžta; kai $a=0, b \neq -6, b \neq 2, b \neq 0$, nesuderinta. 31. Kai $a \neq 1, b \neq 1, (a-1)(b-1)-4 \neq 0$, sistema apibrėžta, jos sprendinys yra $x_1 = x_2 = \frac{a(a+1)-2b}{(a+1)(b+1)-4}, x_3 = x_4 = \frac{b(b+1)-2a}{(a+1)(b+1)-4}$. Kai $a=1, b \neq 1$, sistema neapibrėžta ir jos bendrasis sprendinys yra $\left(-1, -1, \frac{2(1-t)-(b-t)(b+1)}{1-b}, t \right)$, o kai $a \neq 1, b=1$, $\left(t, \frac{2(1-t)-(a-t)(a+1)}{1-a}, -1, -1 \right)$. Kai $a=b=1$, sistema neapibrėžta ir jos bendrasis sprendinys yra $(1-t_1-t_2-t_3, t_1, t_2, t_3)$. Kai $(a+1)(b-1)-4=0$, bet $a \neq 1$ ir $b \neq 1$, sistema nesuderinta. 32. Nesuderinta, kad ir kokios būtų a reikšmės.

V skyrius

13. Naudokitės lygybe $(AB)^T = B^T A^T$ ir tuo faktui, kad simetrinei matricai teisingas teiginys $S^T = S$. 15. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & a \\ -b & -\sqrt{ab} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & a \\ -b & \sqrt{ab} \end{pmatrix}$. 16.

$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ a & \mp 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$. 21. a) $(a_{ij}), a_{ij}=0$, kai $j < i-1$, arba kai $j > i, a_{i-1} = -1, a_{ii} = 1$;

b) $(b_{ij}), b_{ij}=0$, kai $j < i, b_{ii}=1, b_{ii+k} = (-1)^k a^k, k=1, \dots, n-i$; c) $(c_{ij}), c_{ij}=0$, kai

$$j > i, c_{ii} = \frac{1}{a_i}, c_{ij} = \frac{\prod_{k=j+1}^i (-b_k)}{a_i}, \text{ kai } j < i; \text{ d) } (d_{ij}), d_{ii} = 2-n, d_{ik} = d_{k1} = 1,$$

$$\prod_{k=j}^i a_k$$

$k=2, \dots, n, d_{ii} = -1, i=2, \dots, n$; e) $(e_{ij}), e_{ii} = \frac{2-n}{a(n-1)}, e_{ij} = \frac{1}{a(n-1)}, \text{ kai } j \neq i$.

22. Naudokitės lygybe $(AB)^T = B^T A^T$. 29. a) (1, 2, 3, 5, 4); b) (1, 2)(3, 4)(5, 6); c) (1, 2, 3)(4, 5, 6); d) (1, 2, 3, 5)(4, 6, 7, 8); e) (1, 5, 6, 8)(2, 3, 4, 7). 30. c) n ; d) $(1/2)(k(k-1)-(n-k)(n-k-1))$; e) $(1/2)(n-k)(n+k-1)$; f) $3n$. 35. f) a;

$$g) (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} y_1 \prod_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - x_i). \text{ 37. a) } \sum_{i=1}^n a_i (-1)^{i+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k; \text{ b) } - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} a_k;$$

$$c) n+1; d) (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(a^n + \sum_{k=0}^{n-2} a^k \right). \text{ 38. } \prod_{n \geq j > i \geq 1} (x_j - x_i).$$

VI skyrius

3. Nesudaro. 4. Nesudaro. 7. a) tiesė, kurioje yra taškai (0, 0) ir (2, -1); b) tiesė, kurioje yra taškai (0, 0) ir (-1, 1); c) tiesė, kurioje yra taškai (0, 0) ir (3, 7); d) tiesė, kurioje yra taškai (0, 0) ir (-1, -5). 8. a) plokštuma, kurioje yra taškai (0, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 0, 0); b) plokštuma, kurioje yra taškai (0, 0, 0), (2, -1, 1), (2, 3, -1); c) plokštuma, kurioje yra taškai (0, 0, 0), (2, 3, 2), (1, -1, 1); taškas (1, 4, 1) priklauso šiai plokštumai; d) plokštu-

ma, kurioje yra taškai $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$; taškai $(1, 2, 1)$ ir $(2, 3, 1)$ priklauso šiai plokštumai. **9.** Tiesioginė. **10.** Poerdvių sankirta $\{(2c, c, 0) | c \in \mathbf{R}\} = H(2, 1, 0)$. Poerdvių suma lygi $\mathbf{R}^3$ ir nėra tiesioginė. **11.** Poerdvių sankirta $\{(c, 2c, c) | c \in \mathbf{R}\} = H(1, 2, 1)$. Poerdvių suma lygi $\mathbf{R}^3$ ir nėra tiesioginė. **12.** a) sudaro; b) nesudaro; c) nesudaro. **13.** a) nesudaro, b) sudaro, c) sudaro, d) nesudaro. **14.** Septintojo uždavinio visi poerdviai vienmačiai. Aštuntojo uždavinio visi poerdviai dvimačiai. **15.** $\alpha = 7\alpha_1 + 2\alpha_2$. **16.** $\alpha = 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3$, $\beta = 2\alpha_1 + (-13)\alpha_2 + \frac{89}{4}\alpha_3$. **17.** Sudaro. **18.** Sudaro. **19.** Reikia parinkti tokį trečią vektorių $\alpha_3 = (a, b, c)$, kad būtų

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ a & b & c \end{pmatrix} = 3.$$

Prie duotų vektorių reikia prijungti tokius du vektorius $\alpha_3 = (a, b, c, d)$ ir $\alpha_4 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, kad būtų

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 4.$$

$$\mathbf{21.} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 5 & -7 & 13 \\ 8 & 8 & -8 \\ 14 & -10 & -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{9}{16}\beta_1 + \frac{19}{16}\beta_2 + \frac{15}{16}\beta_3,$$

$\beta = -34\alpha_1 - 9\alpha_2 + 7\alpha_3$. **22.** $\left(\frac{107}{2}, -16, -\frac{251}{6}, \frac{15}{2}\right)$. **24.** a) sistemos sprendinių erdvė

yra dvimatė. Viena iš fundamentinių sistemų $(3, 5, 1, 0, 5)$ ir $(13, 25, 21, 35, 0)$; b) sistemos sprendinių erdvė yra dvimatė. Viena iš fundamentinių sistemų $(14, 86, -10, -55, 0, 27)$, $(1, -2, 1, 1, 3, 0)$. **25.** a) -6 ; b) 33 ; c) -28 ; d) -9 ; e) 21 ; f) 36 . **26.** Įrašykite matricą A ir radę funkcijas patikrinkite, ar jos turi skaliarinės daugybos $1-4$ savybes. **27.** a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{26}$; c) $4\sqrt{2}$; d) $\sqrt{11}$; e) $\sqrt{42}$; f) $\sqrt{15}$; g) $\sqrt{19}$. **28.** a) neortogonalūs; b) — f) ortogonalūs. **29.** a) $3\pi/4$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}$; f) $\arccos \sqrt{\frac{2}{77}}$.

31. a) $\beta_1 = (2, 5)$, $\beta_2 = (5, -2)$; b) $\beta_1 = (-7, 8)$, $\beta_2 = (8, 7)$; c) $\beta_1 = (3, 2, 1)$, $\beta_2 = (1, -4, 5)$, $\beta_3 = (-1, 1, 1)$; d) $\beta_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\beta_2 = (8, 5, 3, -13)$, $\beta_3 = (-8, -5, 86, 13)$, $\beta_4 = (-6, 7,$

$0, -1)$. **32.** Atsakymas ne vienintelis. Viena iš galimų ortonormuotų bazių: $\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0,$

$\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right)$, $\varepsilon_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{10}}, 0\right)$, $\varepsilon_3 = \left(0, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$, $\varepsilon_4 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Duotojo vektoriaus $\alpha = (a, b, c, d)$ koordinatės bazėje $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ randamos iš formulės $x_i = \langle \alpha, \varepsilon_i \rangle$, $i=1, 2, 3, 4$. **33.** Viena iš galimų ortonormuotų bazių yra $\varepsilon_1 =$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$, $\varepsilon_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{3}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$, $\varepsilon_3 =$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\varepsilon_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $\alpha = -\frac{3}{\sqrt{15}}\varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{15}}\varepsilon_2 +$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_3 + \sqrt{3}\varepsilon_4$, $\beta = -\frac{11}{\sqrt{15}}\varepsilon_1 + \frac{22}{\sqrt{15}}\varepsilon_2 + \frac{4}{\sqrt{3}}\varepsilon_3 + \frac{5}{\sqrt{3}}\varepsilon_4$, $\gamma = 0 \cdot \varepsilon_1 - \sqrt{15}\varepsilon_2 -$

$-4\sqrt{3}\varepsilon_3 + 4\sqrt{3}\varepsilon_4$. **34.** a) $\{c(4, 3) | c \in \mathbf{R}\}$; b) $\{c(7, 10, -1) | c \in \mathbf{R}\}$; c) $\{c(-5, 7, -2, 13) | c \in \mathbf{R}\}$. **35.** Kiekvienais ortogonaliais vektoriais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, kurie yra ortogonalūs ir

vektoriui $(1, 4, 5, 10)$, generuotas poerdvis $H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Pvz., $\{c_1(4, -1, 0, 0) + c_2(-25, -100, 17, 34) + c_3(0, 0, 2, -1) | c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\}$. **36.** Vektorius priklauso poerdviui, todėl jo projekcija sutampa su juo, o statmuo į poerdvį lygus nuliui. **37.** Projekcija $(-5, -105,$

5, 40); statmuo (1, 4, 5, 10); atstumas iki poerdvio $\sqrt{142}$. **38.** a) ir b) remkitės vektorių sudėties ir daugybos iš skaičiaus savybėmis. **39.** 1 ir 2 savybės išplaukia iš skaliarinės daugybos apibrėžimo, tikrindami 3 savybę naudokitės Koši–Buniakovskio nelygybę. **40.** Skaliarinės daugybos apibrėžimo 1–3 savybės tikrinamos remiantis matricų daugybos savybėmis, 4 savybę galima įrodyti matematinės indukcijos metodu.

VII skyrius

1. $\mathcal{A}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$, tiesinis. **2.** $\mathcal{B}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^5$, netiesinis. **3.** $\mathcal{C}: (\mathbf{R}^2)^T \rightarrow (\mathbf{R}^3)^T$, tiesinis. **4.** $\mathcal{D}: (\mathbf{R}^3)^T \rightarrow (\mathbf{R}^2)^T$, netiesinis. **5.** $\mathcal{G}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, tiesinis. **6.** $\mathcal{H}: (\mathbf{R}^3)^T \rightarrow (\mathbf{R}^3)^T$, tiesinis. **8.** Kadangi $\alpha = 5\alpha_1 - 6\alpha_2 + 7\alpha_3$, tai $(\alpha)\mathcal{A} = 5(\alpha_1)\mathcal{A} + (-6)(\alpha_2)\mathcal{A} + 7(\alpha_3)\mathcal{A}$. Telielia naudotis sąlyga.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad (51, -47, 25, 3).$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -6 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16, -8, 13), (-24, 30, -31).$$

10. Operatoriaus matrica lygi $(a_{ij})^{-1}(b_{jk})$; čia (a_{ij}) – vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ koordinačių matrica, (b_{ij}) – vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ koordinačių matrica. **11.** Tinka 10 uždavinio nurodymas. **15.** a) turi; b) neturi; c) turi; d) neturi; e) turi; f) turi. **17.** a) $r=3, d=1$; b) $r=4, d=1$. **18.** a) $\{O\}$; b) $\{t(1, 1, -1, 0) \mid t \in \mathbf{R}\}$. **19.** Spręskite uždavinį $(x_1, x_2, x_3)A = (-1, -2, 7)$. **20.** Spręskite uždavinį $(x_1, x_2, x_3, x_4)A = (0, 0, 1, -1)$. **21.** a) $l_1=2, \alpha_1=(1, -1), l_2=5, \alpha_2=(1, 2)$; b) $l_{1,2}=2, \alpha=(1, -1)$; c) $l_1=-1, \alpha_1=(0, 1, -1)$; $l_2=2, \alpha_2=(3, 3, -5)$; $l_3=5, \alpha_3=(0, 0, 1)$; d) $l_1=-4, \alpha_1=(7, -36, 23)$; $l_{2,3}=2, \alpha_2=(1, 0, -1)$.

Literatūra

1. Kubilius J. Realaus kintamojo funkcijų teorija. V.: Mintis, 1970.
2. Matuliaskas A. Algebra. V.: Mokslo, 1985.
3. Žilinskas G. Aukštoji algebra. V.: Valst. polit. ir moksl. lit. l-kla, 1960.
4. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
5. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.
6. Гасс С. И. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961.
7. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. М.: Наука, 1965.
8. Гудстейн Р. Л. Математическая логика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
10. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
11. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
12. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979.
13. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М.: Просвещение, 1967.
14. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1959.
15. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз, 1962.
16. Линдон Р. Заметки по логике. М.: Мир, 1968.
17. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
18. Новиков П. С. Элементы математической логики. М.: Физматгиз, 1959.
19. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. М.: Просвещение, 1966.
20. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.
21. Феферман С. Числовые системы. М.: Наука, 1971.
22. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. М.: Мир, 1979.
23. Энциклопедия элементарной математики. Т. 1, 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
24. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М.: Сов. радио, 1964.

Dalykinė rodyklė

- Adjunktas determinanto elemento 242
- — minoro 254
- Aibė 25
- aprėžta 353
- baigtinė 26, 46
- begalinė 26
- faktoraibė 44
- iškiloji 352
- matricų 196
- operatorių 302
- suskaičiuojama (skaičioji) 41
- tiesiškai sutvarkyta 45
- tiesinių lygčių sistemos sprendinių 142
- tirštoji 45
- tuščioji 26
- universalioji 27
- Aibės papildinys 30
- Aibių galia 41
- Dekarto daugyba 36
- ekvivalentumas 40
- sankirta (sandauga) 28
- skirtumas 29
- suma (junginys) 27
- Aksioma Archimedo 73
- indukcijos 69
- Aksiominis metodas 19
- Aksiomų sistemos interpretacija 19
- Algebra Bulio 67
- logikos 12
- tiesinė 310
- Aristotelis 5
- Asociatyvumas daugybos 12
- operacijos 61
- sudėties 12
- Ašis menamoji 119
- realioji 119
- Bazė erdvės R^n 164
- ortogonalioji 290
- ortonormuotoji 290
- vektorinės erdvės 267
- Bazės keitimas 273
- keitimo matrica 273
- Bernulis J. 77
- Bijekcija 39
- Branduolys homomorfizmo 394
- tiesinio operatoriaus 315
- Bulis 5
- Buniakovskis 285
- Ciklas 225
- Daugdara tiesinė 281
- Dedekindo pjūviai 105
- Dekartas 36
- Deriniai be pasikartojimų 50
- kartotiniai 55
- Determinantas n -osios eilės 231
- 2-osios eilės 231
- 3-osios eilės 231
- Disjunkcija 8
- Distributyvumas 12, 64
- Dimensija erdvės 268
- tiesinės daugdaros 281
- Ekvivalentumas aibių 40
- lygčių sistemų 143
- loginių formų 11
- Erdvė vektorinė 261
- Euklido 283
- Erdvės ortogonalusis papildinys 293
- Ferma 69
- Forma loginė 11
- Formulė Kardano 136
- Muavro 121
- Niutono 75
- Frobenijus 247
- Fundamentinė sprendinių sistema 278
- Funkcija Oilerio 131
- Gausas 151
- Gretima klasė 388
- Gretiniai 48
- kartotiniai 53
- Grupė 73
- Abelio 79
- adicinė 79
- ciklinė 385
- faktorgrupė 392
- keitinių 79
- lauko multiplikacinė 91

- multiplikacinė 79
- neišsiginusių tiesinių operatorių 309
- reguliariųjų matricų 210
- vieneto šaknų 129
- Grupės eilė 384
- elemento eilė 385

Hiperplokštuma 281
Homomorfizmas grupių 81, 393
— žiedų 89

- Implikacija 9
- Indukcija 69
- matematinė 70
- Injekcija 39
- Intervalas atvirasis 15
- uždarasis 15
- Inversija 226
- Izomorfizmas Euklido erdvių 294
- grupių 82, 393
- laukų 93
- tiesinių algebrų 269
- žiedų 89

Junginiai 46

- Kapelis 185
- Keitinys atvirkštinis 224
- lyginis 227
- nelyginis 227
- n -ojo laipsnio 221
- vienetinis 224
- Keitinio ženklas 227
- Keitinių daugyba 223
- lygybė 222
- Kėliniai 50
- kartotiniai 53
- lyginiai 226
- nelyginiai 226
- Kėlinio ženklas 226
- Kombinacija 46
- Kombinatorika 52
- Kompleksinė plokštuma 119
- Kompleksiniai skaičiai 114
- — juginiai 123
- Kompleksinio skaičiaus argumentas 120
- — geometrinis vaizdavimas 119
- — komponentės 118
- — modulis 120
- — trigonometrinė forma 120
- Kompleksinių skaičių atimtis 118
- — dalyba 121
- — daugyba 121
- — sudėtis 118
- Komponentės 155
- vektoriaus-eilutės 155
- vektoriaus-stulpelio 157
- Komutatyvumas daugybos 12

- operacijos 61
- sudėtis 12
- Koši 285
- Koši—Buniakovskio nelygybė 285
- Krameris 250
- Kronekeris 185
- Kvantorius 33
- egzistavimo 33
- visuotinumui 33

- Laplasas 255
- Laukas (kūnas) 90
- išsidėstęs 107
- pirminis 95
- Lauko automorfizmas 124
- charakteristika 95
- minimalusis plėtinys 114
- tolydumas 106
- Leibnicias 5
- Lygties sprendinys 140
- Lygtis charakteristinė 321
- dvinarė 126
- kubinė 134
- kvadratinė 133
- 4-ojo laipsnio 137
- matricinė 212
- tiesinė 140
- vektorinė 167, 185
- Logikos dėsnis 15
- — dvigubo neigimo 13
- — kontrapozicijos 15
- — negalimo trečiojo 13, 15
- — neprieštaravimo 15
- — prieštaros 16
- — silogizmų 16
- Loginis neigimas 8

- Matematinės indukcijos principas 70
- — — apibendrintasis 74
- — — apibendrintas sustiprintasis 74
- — — sustiprintasis 73

- Matrica 193
- atvirkštinė 208
- bazės keitimo 272
- elementarioji 219
- kvadratinė 195
- nulinė 196
- ortogonalioji 329
- reguliarioji 209
- simetrinė 195
- stačiakampė 193
- tiesinio operatoriaus 301
- tiesinių lygčių sistemos 167
- — operatorių sandaugos 306
- — — sumos 304
- transponuotoji 195
- vienetinė 196
- Matricos charakteristinis polinomas 322
- charakteristinės šaknys 322

- determinantas 231
- eilė 194
- elementarieji pertvarkiai 179
- elementas 193
- transponavimas 195
- Matricų daugyba 201
 - — iš lauko elementų 197
 - lygybė 196
 - panašumas 312
 - sudėtis 197
 - tiesinė algebra 310
- Metodas Gauso 151
 - simplekso 355
 - ϵ -metodas 375
- Minoras determinanto elemento 242
 - gaubiantysis 247
 - jungtinis 254
 - matricos 246
- Niutonas 75
- Oilerio ir Veno diagramos 31
- Operatoriaus branduolys 315
 - defektas 315
 - matrica 301
 - tikrinė reikšmė 318
 - tikrinis vektorius 318
 - rangas 313
- Operatorius 298
 - atvirkštinis 307
 - neišsigimęs 309
 - nulinis 299
 - ortogonalusis 328
 - paprastojo spektro 324
 - projektavimo 299
 - simetrinis 327
 - tiesinis 299
- Operatorių aibė 302
 - daugyba 305
 - — iš lauko elementų 302
 - erdvė 304
 - lygybė 298
 - sudėtis 302
- Paskalio trikampis 52
- Paskalis 52
- Peanas 68
- Peano aksiomos 68
- Poaibis 26
- Poerdviai ortogonalūs 292
- Poerdvis 263
 - generuotas 264
 - invariantinis 318
 - vektorinės erdvės 263
- Poerdvio ortogonalusis papildinys 293
- Poerdvių sankirta 264
 - suma 265
 - tiesioginė suma 265
- Pogrupio eilė 389
 - indeksas 389
- Pogrupis 384
 - ciklinis 385
- Polaukis 94
- Predikatas 7
- Pusgrupė 67
- Rangas matricos 183
- Refleksyvumas 43
- Sąlygos būtinosios 20
 - — ir pakankamosios 20
 - pakankamosios 20
- Sąryšis 37
 - binaris 37
 - ekvivalentumo 44
 - funkcinis 38
 - refleksyvusis 43
 - simetrinis 43
 - tiesinės tvarkos 44
 - tranzityvusis 43
- Sprendinys bazinis 357
 - tiesinės lygties 140
 - tiesinių lygčių sistemos 141
 - tiesinių lygčių sistemos bendrasis 147
 - — — — atskirasis 147
- Surjekcija 39
- Taisyklė Kramerio 250
 - de Morgano 16, 31
 - teisingos išvados 17
 - neteisingos išvados 17
 - daugybos kombinatorinė 48
 - sudėties kombinatorinė 47
- Taškas ekstreminis 353
- Tautologija 11
- Teiginių jungtys 8
 - disjunkcija 8
 - ekvivalencija 10
 - konjunkcija 9
 - neigimas 8
- Teiginys 6
 - paprastasis 8
 - sudėtinis 8
- Teiginio teisingumo reikšmė 6
- Teorema atvirkštinė 19
 - Frobenijaus 247
 - grupių izomorfizmo 82
 - Kronekerio ir Kapelio 185
 - Lagranžo 389
 - Laplaso 255
 - Minkovskio 333
 - priešinga 19
 - — atvirkštinei 19
 - tiesioginė 19
- Tiesinio programavimo dualieji uždaviniai 380
 - — uždavinio kanoninė formuluotė 348
 - — — standartinė formuluotė 346
 - — — uždavinys 343
- Tiesinių lygčių sistema 141
 - — — apibrėžtoji 142

— — — homogeninė 141
— — — neapibrėžtoji 142
— — — nehomogeninė 141
— — — nesuderintoji 142
— — — suderintoji 142
— — — trapecijos formos 146
— — — trikampio formos 146
— — sistemų ekvivalentumas 143
— — — elementarieji pertvarkiai 144
Transpozicija 226

Uždarumas operacijos atžvilgiu 60

Vektorius 261

Vektoriai ortogonalūs 286

— tiesiškai nepriklausomi 161

— tiesiškai priklausomi 161

Vektoriaus modulis (ilgis) 285

Vektorių komponentės 155

— koordinatės 165

— lygybė 155

— ortogonalumas 286

— rinkinys 160

— — ortogonalusis 287

— — ortonormuotasis 287

— — tiesiškai nepriklausomas 161

— — tiesiškai priklausomas 161

— ekvivalentūs rinkiniai 175

— rinkinio rangas 174

— skaliarinė daugyba 282

— — sandauga 282

— sudėtis 155

— tiesinė kombinacija 160

Vektorius-eilutė 155

Vektorius-stulpelis 155

Turinys

Pratarmė	3
I skyrius. Matematinės logikos ir aibių teorijos pradmenys	5
§ 1. Matematinė logika	5
§ 2. Teiginiai ir predikatai	6
§ 3. Loginės operacijos	8
§ 4. Loginės formos	11
§ 5. Logikos algebra	12
§ 6. Logikos dėsniai	15
§ 7. Aksiomos ir teoremos	17
§ 8. Teoremos įrodymas — kas tai?	21
§ 9. Predikatinės formos	23
§ 10. Aibių algebra	25
§ 11. Kvantoriai	33
§ 12. Aibių Dekarto daugyba	35
§ 13. Binariai sąryšiai	37
§ 14. Funkciniai sąryšiai. Ekvivalenčios aibės	38
§ 15. Ekvivalentumo ir tvarkos sąryšiai	43
§ 16. Baigtinės aibės. Kombinatorika	46
§ 17. Gretiniai, kėliniai, deriniai	48
§ 18. Kartotiniai junginiai	53
II skyrius. Algebrinės struktūros	58
§ 19. Algebrinė binarė operacija	58
§ 20. Algebrinių binarių operacijų galimos savybės	60
§ 21. Algebrinės struktūros	67
§ 22. Natūriniai skaičiai	68
§ 23. Natūrinių skaičių sudėtis ir jos savybės	70
§ 24. Natūrinių skaičių daugyba ir jos savybės	71
§ 25. Kai kurios natūrinių skaičių aibės savybės. Matematinės indukcijos teoremos	72
§ 26. Niutono binomo formulė	75
§ 27. Grupės. Paprasčiausios grupių savybės	79
§ 28. Grupių izomorfizmai	81
§ 29. Žiedai. Paprasčiausios žiedų savybės	85
§ 30. Žiedų homomorfizmai ir izomorfizmai	89
§ 31. Laukai. Paprasčiausios laukų savybės	90
§ 32. Laukų izomorfizmai	93
§ 33. Lauko polaukiai. Lauko charakteristika	94
III skyrius. Skaičių laukai	99
§ 34. Sveikieji skaičiai ir jų veiksmai	99
§ 35. Racionaliųjų skaičių laukas	101
§ 36. Dedekindio pjūviai	104
§ 37. Realųjų skaičių lauko apibrėžimas	106

§ 38. Realųjų skaičių aksiomų interpretacijos	108
§ 39. Realųjų skaičių paprasčiausios savybės	111
§ 40. Kompleksiniai skaičiai	113
§ 41. Kompleksinių skaičių geometrinė interpretacija. Kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma	118
§ 42. Jungtiniai kompleksiniai skaičiai. Modulio savybės	123
§ 43. Šaknies traukimas	124
§ 44. Vieneto šaknys	128
§ 45. Antrojo, trečiojo ir ketvirtjo laipsnio lygtys	133
IV skyrius. Tiesinių lygčių sistemos	139
§ 46. Pagrindinės sąvokos	139
§ 47. Tiesinių lygčių sistemų ekvivalentumas. Elementarieji pertvarkiai	143
§ 48. Gauso algoritmas. Tiesinių lygčių sistemos suderintumo sąlygos	146
§ 49. n -mačių vektorių-eilučių erdvė $\mathbf{R}^n$. Vektorių-stulpelių erdvė	153
§ 50. Vektorių tiesinė priklausomybė	160
§ 51. Erdvės $\mathbf{R}^n$ bazė	163
§ 52. Vektorių tiesinės kombinacijos ir tiesinių lygčių sistemos	167
§ 53. Tiesinių homogeninių lygčių sistemos sprendinių savybės	171
§ 54. Vektorių rinkinio rangas	173
§ 55. Vektorių rinkinių ir matricių elementarieji pertvarkiai	178
§ 56. Tiesinių lygčių sistemos suderintumo sąlyga	185
§ 57. Parametrinių tiesinių lygčių sistemų sprendimas	190
V skyrius. Matricos ir determinantai	193
§ 58. Pagrindinės sąvokos	193
§ 59. Matricių sudėtis ir daugyba iš lauko elementų	196
§ 60. Matricių daugyba ir jos savybės	201
§ 61. Matriciai atvirkštinės matricos egzistavimo sąlygos ir jos radimas	207
§ 62. Tiesinių lygčių sistemos matricinė forma. Matricinės lygtys	212
§ 63. Elementariosios matricos	219
§ 64. Keitiniai	221
§ 65. Determinanto apibrėžimas. Antrosios ir trečiosios eilės determinantai	229
§ 66. Determinanto savybės	233
§ 67. Determinanto skaičiavimas remiantis jo savybėmis	236
§ 68. Determinanto skleidimas pagal eilutę (stulpelį)	240
§ 69. Frobenijaus teorema. Atvirkštinės matricos išraiška. Kramerio taisyklė	246
§ 70. Laplaso teorema. Matricių sandaugos determinantas	254
VI skyrius. Vektorinės erdvės	260
§ 71. Vektorinės erdvės apibrėžimas ir paprasčiausios savybės	260
§ 72. Vektorinės erdvės virš $\mathbf{L}$ poerdviai. Poerdvių veiksmai	263
§ 73. Vektorių tiesinė priklausomybė. Erdvės bazė ir dimensija. Erdvių izomorfizmai	266
§ 74. Vektorinės erdvės bazių konstravimas. Bazių keitimas	271
§ 75. Tiesinių homogeninių lygčių sistemos sprendinių erdvė	276
§ 76. Tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibės savybės	280
§ 77. Vektorių skaliarinė daugyba ir jos savybės	282
§ 78. Koši—Buniakovskio nelygybė	285
§ 79. Ortogonalųjų vektorių rinkiniai	287
§ 80. Ortogonalūs poerdviai. Euklido erdvių izomorfizmai	292
VII skyrius. Tiesiniai operatoriai	297
§ 81. Tiesinio operatoriaus apibrėžimas. Pavyzdžiai	297
§ 82. Tiesiniai operatoriai ir matricos. Operatorių sudėtis ir daugyba iš skaičiaus	300
§ 83. Tiesinių operatorių daugyba	305
§ 84. Tiesinės algebros	309

§ 85. Tiesinio operatoriaus matricos kitimas keičiant bazę. Panašiosios matricos	310
§ 86. Tiesinio operatoriaus rangas, branduolys ir defektas	313
§ 87. Tiesinio operatoriaus tikrinės reikšmės ir tikriniai vektoriai	318
§ 88. Charakteristinė lygtis	320
§ 89. Paprastojo spektro tiesiniai operatoriai	324
§ 90. Simetriniai operatoriai	326
§ 91. Ortogonalieji operatoriai	328
VIII skyrius. Tiesinių nelygybių sistemos. Tiesinio programavimo elementai	331
§ 92. Tiesinių nelygybių sistema, jos išvados	331
§ 93. Neneigiamų sprendinių egzistavimo sąlyga	338
§ 94. Tiesinio programavimo uždavinys	343
§ 95. Tiesinio programavimo uždavinio sprendimo paprasčiausi atvejai	348
§ 96. Iškilosios aibės erdvėje $\mathbf{R}^n$. Tiesinės funkcijos ekstremumas iškilajoje uždaroje aibėje	352
§ 97. Simplekso metodo teorija	355
§ 98. Bazinio sprendinio radimas. Dirbtinė bazė	363
§ 99. Skaičiavimo simplekso metodu schema	365
§ 100. Išsigimimo atvejais	375
§ 101. Dualumas. Dualumo teorema	380
IX skyrius. Grupės	383
§ 102. Grupės ir jos pogrupiai	383
§ 103. Ciklinės grupės. Elemento eilė, jos savybės	385
§ 104. Lagranžo ir Kelio teoremos	388
§ 105. Normalieji dalikliai. Faktogrupės	390
§ 106. Grupių homomorfizmai	393
Uždavinių atsakymai ir nurodymai	396
Literatūra	404
Dalykinė rodyklė	405

Bulota K., Survila P.

Bu236 Algebra ir skaičių teorija: Vadovėlis ped. inst. matematikos spec.— 2-asis patais. ir papild. leid.— V.: Mokslas, 1989—

[D.] 1.—410, [1] p.: brėž.— Bibliogr.: p. 404 (24 pavad.).— Dalyk. r. klė: p. 405—408. ISBN 5—420—00415—1

Knygoje pateikiami matematinės logikos ir aibių teorijos pradmenys, apžvelgiama natūrinių skaičių sistema, supažindinama su pagrindinėmis algebrinėmis struktūromis: grupe, žiedu, lauku, jų savybėmis. Nagrinėjama skaičių laukai, tiesinių lygčių sistemos ir su jomis susijusių n -mačių vektorių su realiomis komponentėmis ir n -vektorinės erdvės ir erdvių tiesiniai operatoriai.

B 1602040000—075
M854(08)—89 119—89

BBK 22.132/73
MBBK 51.71

Учебное издание. БУЛОТА Антанас-Кястутис Юргевич, СУРВИЛА Пранас Владович. АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. Ч. 1. Допущено Министерством народного образования ЛитССР в качестве учебника для студентов пед. ин-тов. Издание 2-е, переработанное и дополненное. Вильнюс, «Мокслас», 1989. На литовском языке.

Mokymo leidinys. BULOTA Antanas Kęstutis, SURVILA Pranas. ALGEBRA IR SKAIČIŲ TEORIJA. D. 1. Redaktorė E. Leikauskienė. Viršelio dailininkas ir meninis redaktorius V. Ajauskas. Techninė redaktorė A. Gineičienė. Korektorės: A. Sidarkevičienė, M. Treigienė.

ИБ № 3210

Duota rinkti 1988 10 10. Pasirašyla spaudai 1989 05 12. Formatas 60×90¹/₁₆. Popierius — spaudos Nr. 1. Garnitūra — literatūrinė, 10 punktų. Iškilioji spauda. 25,75 sąl. sp. 1. 26 sąl. spalv. atsp. 28,76 apsk. leid. 1. Tiražas 4000 egz. Užsakymas 1671. Kaina 1 rb 20 kp. Leidykla „Mokslas“, 232050 Vilnius, Zvaigždžių 23. Spaudė Spindulio spaustuvė, 232000 Kaunas. Gėdino 10.